Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 28, No. 3, pp. 319-330, September 2002.

서버 제어정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬의 분석

이호우[1†] · 박노익[2] · 박종근[3]

[1]성균관대학교 시스템경영공학부/[2]한국전자통신연구원 네트워크연구소 네트워크구조팀/
[3]한국전자통신연구원 기획관리본부 품질경영팀

Operational Behavior of the BMAP/G/1 Queue with Server Control

Ho Woo Lee[1] · No Ik Park[2] · Jong Geun Park[3]

[1]Department of Systems Management Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon, 440-746
[2] Network Architecture Team, Network Technology Laboratory, Electronics and Telecommunications Research Institute, Daejeon, 305-350
[3] Quality Management Team, R&D Strategy Planning Division, Electronics and Telecommunications Research Institute, Daejeon, 305-350

We consider BMAP/G/1 queueing system with *N*-policy and multiple vacations. We derive the vector generating functions of the queue length in a factorized form and interpret the factorization. We also derive the mean queue length.

Keywords: queueing system, BMAP arrivals, server control

1. 서론

기존 대기행렬시스템에 대한 많은 연구들은 도착과정이 포아송과정(Poisson process)이라는 가정 하에 행하여졌다. 그러나 포아송과정은 실제 시스템의 적용에 한계를 갖고 있다. 특히 도착률이 가변적이고 상관관계를 갖는 다양한 종류의 트래픽(traffic)을 발생시키는 광대역종합정보통신망(Broadband Integrated Service Digital Network, B-ISDN) 등과 같은 통신망에서의 도착과정은 도착률이 시간에 관계없이 항상 일정하다고 가정하는 포아송과정으로는 표현하기가 힘들다. 따라서 최근에는 포아송과정을 변형시킨 새로운 도착과정을 적용하여 대기행렬시스템의 분석이 이루어지고 있다. 이중에서 마코비안 도착과정(Markovian Arrival Process, MAP)과 집단 마코비안 도착과정(Batch Markovian Arrival Process, BMAP)은 앞에서 언급한 도착률이 가변적이고 상관관계를 갖는 도착과정을 비교적 잘 표현하고 있어 최근 이를 적용한 대기행렬의 연구가 활발히 진행중이다.

한편, *N*-정책, *T*-정책, *D*-정책 등 제어정책이 고려된 대기행렬시스템에 대한 연구도 활발하게 진행되어 왔는데 대부분이 도착과정을 포아송과정으로 가정하고 있고, MAP 또는 BMAP을 적용한 제어정책이 고려된 대기행렬시스템에 대한 연구는 찾아보기 힘들다.

MAP 또는 BMAP을 적용한 대부분의 대기행렬시스템은 그 분석 도구로서 행렬분석법(matrix-analytic method)을 사용하였는데 분석의 주된 목적은 성능척도들을 계산하는 알고리듬의 개발이었다. MAP/G/1과 BMAP/G/1 대기행렬에 관련된 고전적인 이론들은 행렬분석법의 선구자인 Neuts(1981, 1989)의 이

본 연구는 학술진흥재단의 연구비 지원으로 이루어졌음(KRF-99-041E00110 E1400).
† 연락저자 : 이호우 교수, 440-746 경기도 수원시 장안구 천천동 300 성균관대학교 시스템경영공학부, Fax : 031-290-7610, e-mail : hwlee@yurim.skku.ac.kr
2002년 5월 접수, 1회 수정(10일 소요) 후, 2002년 8월 게재 확정.

론을 바탕으로 한다. MAP은 기본개념이 같은 "versatile Markovian point process"로 Neuts (1979)에 의하여 소개되었다. BMAP/G/1 대기행렬시스템은 Ramaswami의 $N/G/1$ 대기행렬시스템으로 처음 분석되었으며(Ramaswami, 1980), BMAP이라는 용어는 Lucantoni(1991)가 처음으로 사용하였고 그는 Ramaswami의 계산 알고리듬을 개선하였다.

Kasahara *et al.* (1996)은 N-정책과 복수휴가를 갖는 MAP/G/1 대기행렬시스템에 대하여 고객수분포와 대기시간분포를 유도하였다. Takine and Hasegawa (1994)는 우선순위를 갖는 2계층 축출-계속형 MAP/G/1 대기행렬시스템을, Takine (1996)는 MAP/G/1 비축출형 우선순위 대기행렬시스템에서 각 고객 계층의 평균 대기시간을 분석하였다. Shin and Pearce (1998)는 고객수 상태에 따라 휴가를 다르게 갖는 BMAP/G/1 대기행렬 시스템의 고객수분포를 구하였다.

행렬분석법과 달리 부가변수법은 시스템 설계를 용이하게 하기 위한 시스템의 운용특성을 분석하기에 효과적이다. MAP 관련 대기행렬시스템을 부가변수법을 이용하여 분석한 연구들도 찾아볼 수 있다. Hwang (1997)은 MAP/G/1 대기행렬시스템과, 상위계층고객이 포아송과정으로 도착하고 하위계층은 MAP에 따라 도착하는 $MAP, M/G_1, G_2/1$ 축출-계속형 우선순위 대기행렬시스템에서의 부하량과정을 부가변수법을 이용하여 분석하였고, Sugahara *et al.* (1995)은 상위계층고객이 스위치 포아송과정(switched Poisson process, SPP)에 따라 도착하고 하위계층 고객은 포아송과정에 따라 도착하는 비축출형 우선순위 대기행렬시스템을 부가변수법을 이용하여 분석하였으며, Niu *et al.* (1999)은 부가변수법을 이용하여 유한용량 통신시스템을 모델링 하였다.

그러나 MAP 또는 BMAP관련 대기행렬시스템에 대하여 부가변수법을 적용한 지금까지의 연구들은 일반적인 분석의 틀(general framework)을 제공하지 못하고 있다. Lee *et al.* (1999a, b)은 부가변수법을 이용한 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 일반적인 분석의 틀을 제공하였는데, 이 분석틀의 장점은 부가변수법을 이용한 M/G/1 대기행렬시스템의 분석에 익숙한 이들이 이해하기 쉽다는 것이다. 그들은 잔여서비스시간을 부가변수로 이용하여 고객수분포와 대기시간분포를 유도하였다. 안부용 (2000)은 부가변수법을 이용하여 제어정책이 있는 MAP/G/1 대기행렬의 운영특성을 분석하였다. N-정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬의 경우 고객이 집단으로 도착하기 때문에 바쁜기간 시작점에서의 고객수가 N보다 큰 경우가 발생한다. 이 경우 바쁜기간을 시작하게 하는 도착집단의 크기와 바쁜기간 시작점에서의 고객수가 몇 명인가를 고려해야 하기 때문에 도착과정이 MAP인 경우보다 분석이 어려워진다. 또한 안부용 (2000)은 고객수가 N을 넘은 이후의 준비기간을 고려하여 준비기간 이후에는 무조건 바쁜기간이 시작되는 시스템을 분석하였다.

본 연구에서는 N-정책과 복수휴가를 갖는 BMAP/G/1 대기행렬을 분석함으로써 서버의 제어가 가능한 일반적인 BMAP/G/1 대기행렬의 운용행태를 이해할 수 있는 분석틀을 제공한다. 고객은 집단 마코비안 도착과정(BMAP)에 따라 도착하고, 한 명의 서버가 선입선출방식(FCFS)에 의하여 한 명씩 서비스한다. 각 고객에 대한 서비스시간은 서로 독립이고 동일한 일반분포를 따르며 고객이 시스템 내에 존재하는 한 서비스를 계속한다. 시스템 내에 더 이상 서비스할 고객이 없으면 서버는 휴가를 떠난다. 휴가에서 돌아왔을 때 시스템 내에 N명 이상의 고객이 있으면 즉시 서비스를 시작하고 N명 미만이면 다시 휴가를 떠난다. 여기서 휴가의 길이는 잠재마코프체인(underlying Markov chain, UMC) 상태와 무관하며 서로 독립이고 동일한 일반분포를 따른다고 가정한다(<그림 1>).

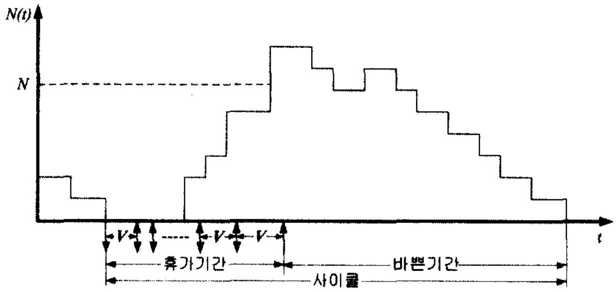

그림 1. N-정책과 복수휴가를 갖는 BMAP/G/1 대기행렬의 샘플경로.

2. 고객수분포

본 절에서는 잔여서비스시간과 잔여휴가시간을 부가변수로 한 부가변수법을 이용하여 시스템방정식을 세우고, 이 식들로부터 임의시점과 이탈시점에서의 고객수분포를 유도한다.

본 논문에서는 기본적으로 행렬분석법에서 사용하는 기호들을 그대로 따른다.

2.1 임의시점에서의 고객수분포

다음과 같은 기호와 확률을 정의하자.

N : 임계값(threshold)

$N(t)$: 시점 t에서의 고객수

$J(t)$: 시점 t에서의 잠재 마코프체인(UMC) 상태

$S(x)$: 서비스시간의 분포함수(distribution function, DF)

$s(x)$: 서비스시간의 확률밀도 함수(probability density function, pdf)

$S^*(\theta)$: 서비스시간의 Laplace-Stieltjes 변환(LST)

$S_R(t)$: 시점 t에서의 잔여서비스시간(remaining service time)

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} Pr[J(t) = i], (1 \le i \le m)$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$$

$(D_n)_{ij}\,\Delta t$: UMC 상태가 i에 있을 때 Δt 동안 크기 n인 집단이 도착하면서 UMC 상태가 j로 전이할 확률

D_n : $(D_n)_{ij}$를 원소로 갖는 $m\times m$ 행렬

$D=\sum_{n=0}^{\infty} D_n$: UMC의 전이율행렬

e : 모든 원소가 1인 $m\times 1$ 열벡터

$\lambda=\pi\sum_{n=1}^{\infty} nD_n e$: 고객의 도착률

$\lambda_g=\pi\sum_{n=1}^{\infty} D_n e$: 고객집단의 도착률

$\rho=\lambda E(S)$: 교통밀도(traffic intensity)

$\zeta(t)=\begin{cases}0, & \text{시점 } t\text{에 서버가 휴가중}\\ 1, & \text{시점 } t\text{에 서버가 서비스중}\end{cases}$

$\tau(t)=k$, 시점 t에 서버가 k번째 휴가중, $k\geq 1$

$V(x)$: 한 휴가의 길이(휴가시간)의 분포함수

$v(x)$: $V(x)$의 확률밀도함수

$V^*(\theta)$: $V(x)$의 Laplace-Stieltjes 변환

$V_R(t)$: 시점 t에서의 잔여휴가시간

$q_{n,k,i}(x,t)=Pr[\zeta(t)=0, N(t)=n, \tau(t)=k,$
$J(t)=i, V_R(t)\in(x,x+dx]]\ (n\geq 0, k\geq 1, 1\leq i\leq m)$

$p_{n,i}(x,t)=Pr[\zeta(t)=1, N(t)=n, J(t)=i,$
$S_R(t)\in(x,x+dx]]\quad (n\geq 0, 1\leq i\leq m)$

$q_{n,k,i}(x)=\lim_{t\to\infty} q_{n,k,i}(x,t),\ p_{n,i}(x)=\lim_{t\to\infty} p_{n,i}(x,t)$

다음과 같은 벡터들을 정의하자.

$$q_{n,r}(x)=(q_{n,r,1}(x),\dots,q_{n,r,m}(x)),$$
$$p_n(x)=(p_{n,1}(x),\dots,p_{n,m}(x))$$

위에서 정의한 기호, 확률, 벡터들을 이용하면, 다음과 같은 벡터 안정상태방정식(vector steady-state equations)을 얻을 수 있다.

$$-\frac{d}{dx}q_{0,1}(x)=q_{0,1}(x)D_0+p_1(0)v(x) \tag{1}$$

$$-\frac{d}{dx}q_{l,1}(x)=q_{l,1}(x)D_0+\sum_{k=0}^{l-1}q_{k,1}(x)D_{l-k} \quad (l\geq 1) \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dx}q_{0,r}(x)=q_{0,r}(x)D_0+q_{0,r-1}(0)v(x)\ (r\geq 2) \tag{3}$$

$$-\frac{d}{dx}q_{l,r}(x)=q_{l,r}(x)D_0+q_{l,r-1}(0)\,v(x)+\sum_{k=0}^{l-1}q_{k,r}(x)D_{l-k}\quad (r\geq 2, 1\leq l\leq N-1) \tag{4}$$

$$-\frac{d}{dx}q_{n,r}(x)=q_{n,r}(x)D_0+\sum_{k=0}^{n-1}q_{k,r}(x)D_{n-k}\quad (r\geq 2, n\geq N) \tag{5}$$

$$-\frac{d}{dx}p_1(x)=p_1(x)D_0+p_2(0)s(x) \tag{6}$$

$$-\frac{d}{dx}p_l(x)=p_l(x)D_0+p_{l+1}(0)s(x)+\sum_{k=0}^{l-1}p_k(x)D_{l-k}\quad (2\leq l\leq N-1) \tag{7}$$

$$-\frac{d}{dx}p_n(x)=p_n(x)D_0+p_{n+1}(0)s(x)+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)D_{n-k}+\sum_{r=1}^{\infty}q_{n,r}(0)s(x)\quad (n\geq N) \tag{8}$$

다음과 같은 벡터생성함수(vector generation function)를 정의하자.

$$p(z,x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x)z^n,\ p(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(0)z^n$$
$$q_r(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{n,r}(x)z^n,\ q_r(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{n,r}(0)z^n\quad (r\geq 1)$$

식 (1)-(8)의 n번째 식에 z^n을 곱하고 모든 n에 대하여 더한 후 정리하면 다음을 얻는다.

$$-\frac{d}{dx}q_1(z,x)=q_1(z,x)D(z)+p_1(0)v(x) \tag{9}$$

$$-\frac{d}{dx}q_r(z,x)=q_r(z,x)D(z)+\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n v(x) \tag{10}$$

$$-\frac{d}{dx}p(z,x)=p(z,x)D(z)+\frac{1}{z}[p(z,0)-zp_1(0)]s(x)+\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}q_{n,r}(0)z^n s(x) \tag{11}$$

위에서 $D(z)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n z^n$이다.

다음과 같은 라플라스 변환을 정의하자.

$$p^*(z,\theta)=\int_0^{\infty}e^{-\theta x}p(z,x)dx,$$
$$q_r^*(z,\theta)=\int_0^{\infty}e^{-\theta x}q_r(z,x)dx$$

식 (9)-(11)의 양변에 라플라스 변환을 취하면 다음을 얻는다.

$$q_1^*(z,\theta)[\theta I+D(z)]=q_1(z,0)-p_1(0)V^*(\theta) \tag{12}$$

$$q_r^*(z,\theta)[\theta I+D(z)]=q_r(z,0)-\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n V^*(\theta) \tag{13}$$

$$p^*(z,\theta)[\theta I+D(z)]=\left[1-\frac{S^*(\theta)}{z}\right]p(z,0)-\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\left[q_r(z,0)-\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r}(0)z^n\right]-p_1(0)\right\}S^*(\theta) \tag{14}$$

$p^*(z,\theta)$는 고객수, 잔여서비스시간, 서버가 바쁠 확률, UMC의 상태확률을 나타내는 결합변환벡터(joint vector transform)이고, $q_r^*(z,\theta)$ $(r\geq 1)$는 서버가 r번째 휴가중일 때의

고객수, 잔여휴가시간, 서버가 유휴할 확률, UMC 상태확률을 나타내는 결합변환벡터이다. $q_r^*(z,\theta)$, $p^*(z,\theta)$가 결정되기 위해서는 $q_r(z,0)$, $p(z,0)$가 결정되어야 한다. 이는 식 (12)-(14)의 좌변을 $\mathbf{0}$으로 만들어 줌으로써 가능하다.

다음의 기호를 정의하자.

$$q_r^*[z,-D(z)]=\int_0^\infty q_r(z,x)e^{D(z)x}dx,$$

$$p^*[z,-D(z)]=\int_0^\infty p(z,x)e^{D(z)x}dx$$

식 (12)-(14)의 좌변을 $\mathbf{0}$으로 만들어주기 위해서 식 (9)-(11)의 양변에 $e^{D(z)x}$를 곱하고 x에 대하여 적분한 후 위의 기호를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$q_1^*[z,-D(z)]D(z)+q_1(z,0) \tag{15}$$
$$=q_1^*[z,-D(z)]D(z)+p_1(0)V^*(-D(z))$$

$$q_r^*[z,-D(z)]D(z)+q_r(z,0) \tag{16}$$
$$=q_r^*[z,-D(z)]D(z)+\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^nV^*(-D(z))$$

$$p^*[z,-D(z)]D(z)+p(z,0) \tag{17}$$
$$=p^*[z,-D(z)]D(z)+\frac{1}{z}[p(z,0)-zp_1(0)]A(z)$$
$$+\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}q_{n,r}(0)z^nA(z)$$

위에서 $A(z)=\int_0^\infty e^{D(z)x}dS(x)$이다.

식 (15)의 $V^*(-D(z))=\int_0^\infty e^{D(z)x}dV(x)$는 휴가기간 동안 도착하는 고객수에 대한 행렬 GF이므로 지금부터는 $V^*(-D(z))$대신에 $V(z)$를 사용하기로 한다.

식 (15)-(17)로부터 다음을 얻는다.

$$q_1(z,0)=p_1(0)V(z) \tag{18}$$

$$q_r(z,0)=\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^nV(z) \tag{19}$$

$$p(z,0)[zI-A(z)] \tag{20}$$
$$=z\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\left[q_r(z,0)-\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r}(0)z^n\right]-p_1(0)\right\}A(z)$$

식 (18)과 (19)를 (12)와 (13)에 각각 대입하면 다음을 얻는다.

$$q_1^*(z,\theta)[\theta I+D(z)]=p_1(0)[V(z)-V^*(\theta)I] \tag{21}$$

$$q_r^*(z,\theta)[\theta I+D(z)] \tag{22}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-V^*(\theta)I]$$

0번째 휴가는 존재하지 않지만 편의상 0번째 휴가의 종료점을 바쁜기간의 종료점으로 생각하면 $q_{0,0}(0)=p_1(0)$, $q_{n,0}(0)=\mathbf{0}$ ($n\geq1$)이다. 식 (19)를 이용하면 식 (14)와 (20)은 다음과 같이 정리된다.

$$p^*(z,\theta)[\theta I+D(z)] \tag{23}$$
$$=\left[1-\frac{S^*(\theta)}{z}\right]p(z,0)$$
$$-\left[\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^nV(z)\right.$$
$$\left.-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r}(0)z^n-q_{0,0}(0)\right]S^*(\theta)$$
$$=\left[1-\frac{S^*(\theta)}{z}\right]p(z,0)$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]S^*(\theta)$$

$$p(z,0)[zI-A(z)] \tag{24}$$
$$=z\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]A(z)$$

식 (24)를 (23)에 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$p^*(z,\theta)[\theta I+D(z)] \tag{25}$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]$$
$$\cdot[A(z)[zI-A(z)]^{-1}(z-S^*(\theta))-S^*(\theta)]$$

임의시점의 고객수와 UMC 상태를 나타내는 결합변환벡터 $Y(z)$는 다음과 같이 표현된다.

$$Y(z)=\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(z,0)+p^*(z,0) \tag{26}$$

식 (21), (22), (25)를 (26)에 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$Y(z)=(z-1)\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I] \tag{27}$$
$$\cdot A(z)[zI-A(z)]^{-1}D(z)^{-1}$$

$D(z)$와 $A(z)$, $D(z)$와 $[zI-A(z)]^{-1}$가 각각 가환(commutative)이므로 식 (27)은 다음과 같다.

$$Y(z)=(z-1)\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]D(z)^{-1}$$
$$\cdot A(z)[zI-A(z)]^{-1} \tag{28}$$

2.2 고객수분포의 확률적 해석

본 절에서는 식 (28)의 $\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]$ $D(z)^{-1}$를 좀 더 자세히 표현함으로써 임의시점 고객수분포에 대한 결합벡터 $Y(z)$에 대한 확률적 해석을 시도한다.

[정리 1] $m\times m$ 행렬 V_n의 (i,j)번째 원소를 휴가 시작점

에서 UMC 상태가 i라는 조건 하에 휴가 동안 n명이 도착하고 휴가 종료점에서의 UMC 상태가 j일 확률이라 하자. 또한, $\boldsymbol{\phi}_n = \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{n,r-1}(0)\ (0 \le n \le N-1)$을 정의하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \boldsymbol{p}_1(0)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\phi}_n = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\phi}_{n-k} \boldsymbol{V}_k,\ (1 \le n \le N-1)$$

(증명) 직전의 휴가동안 도착한 고객수에 조건을 취하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{q}_{n,r}(0) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{q}_{n-k,r-1}(0)\ \boldsymbol{V}_k$$

따라서 $\sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{n,r-1}(0) = \boldsymbol{\phi}_n$라고 정의했으므로, $n=0$인 경우에는

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{0,r-1}(0) = \boldsymbol{q}_{0,0}(0) + \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{0,r}(0)$$
$$= \boldsymbol{p}_1(0) + \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{0,r-1}(0)\ \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{p}_1(0) + \boldsymbol{\phi}_0 \boldsymbol{V}_0$$

가 되어 $\boldsymbol{\phi}_0 = \boldsymbol{p}_1(0)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$를 얻는다. 또한, $1 \le n \le N-1$인 경우에는 $\boldsymbol{q}_{n,0}(0) = \boldsymbol{0}$이기 때문에 다음과 같이 증명된다.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{n,r-1}(0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_{n-k,r-1}(0)\ \boldsymbol{V}_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\phi}_{n-k} \boldsymbol{V}_k \qquad \blacksquare$$

[정리 2] $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{R}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_{n-i}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1} \boldsymbol{V}_i$를 각각 $m \times m$ 행렬로 정의하면 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{p}_1(0) \boldsymbol{R}_n [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$$

(증명) 수학적 귀납법을 이용하여 증명해 보자.

[정리 1]로부터 $n=0$인 경우는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \boldsymbol{p}_1(0)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1} = \boldsymbol{p}_1(0) \boldsymbol{R}_0 [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$$

$n = 1, 2, \ldots, l$인 경우에 성립한다고 가정하고 $n = l+1$인 경우를 보면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\phi}_{l+1} = \sum_{k=0}^{l+1} \boldsymbol{\phi}_{l+1-k} \boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{\phi}_{l+1} \boldsymbol{V}_0 + \sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{\phi}_{l+1-k} \boldsymbol{V}_k$$

따라서 $\boldsymbol{\phi}_{l+1} = \sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{\phi}_{l+1-k} \boldsymbol{V}_k [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$를 얻고 다음과 같이 증명된다.

$$\boldsymbol{\phi}_{l+1} = \sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{\phi}_{l+1-k} \boldsymbol{V}_k [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{l+1} \boldsymbol{p}_1(0) \boldsymbol{R}_{l+1-k} [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1} \boldsymbol{V}_k [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1}$$
$$= \boldsymbol{p}_1(0) \boldsymbol{R}_{l+1} [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0]^{-1} \qquad \blacksquare$$

[정리 2]에 포함되어 있는 $\boldsymbol{R}_n$의 확률적 의미를 분석하기 위하여 군휴가기간(grand vacation period)과 군휴가과정(grand vacation process)의 개념을 이용한다. 군휴가에 대한 논의는 Lee *et al.*(1994)을 따른다.

N_k, J_k를 각각 k번째 군휴가 시작 직후의 고객수 및 UMC 상태를 나타낸다고 하면 다음의 정리가 성립한다.

[정리 3] $Pr[N_k = l+n, J_k = j | N_{k-1} = l, J_{k-1} = i]$ (29)
$= [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0)^{-1} \boldsymbol{V}_n]_{ij}$

(증명) 군휴가과정은 N-정책이 없는 복수휴가시스템에서 휴가기간에 해당되므로 다음이 성립한다.

$$Pr[N_k = l+n, J_k = j | N_{k-1} = l, J_{k-1} = i]$$
$$= \left[\sum_{m=0}^{\infty} (\boldsymbol{V}_0)^m \boldsymbol{V}_n \right]_{ij} = [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0)^{-1} \boldsymbol{V}_n]_{ij} \qquad \blacksquare$$

즉, $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}_0)^{-1} \boldsymbol{V}_n$은 군휴가 동안 n명의 고객이 도착할 확률과 군휴가 시작점과 끝점간의 UMC 상태변화 확률을 나타내는 행렬이다.

벡터 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$를 유휴기간 시작시점에서의 UMC 상태에 대한 확률벡터라고 하자.

[정리 4]

(1) $(\boldsymbol{R}_n)_{ij}$는 유휴기간 시작시점에서의 UMC 상태가 i라는 조건 하에 고객수 n명으로 시작하는 군휴가가 존재하고(즉, 군휴가과정이 상태 n을 방문하고) 그때의 UMC 상태가 j일 확률이다.

(2) $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{R}_n)_j$는 임의의 군휴가 시작점에서의 고객수가 n명이고 그때의 UMC 상태가 j일 확률이다.

(증명)

(1) 임의의 군휴가 시작점에서 고객수가 0명인 경우는 첫 번째 군휴가 시작점이 유일하다. 따라서 $(\boldsymbol{R}_0)_{ii} = 1$이고 $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{I}$이다. 다음을 정의하자.

$$I_{n,r} = \begin{cases} 1, & r\text{번째 군휴가가 존재하고 군휴가 시작 직후의 고객수가 } n \text{ 명이면} \quad (1 \le r \le n+1) \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

$(\gamma_{n,r})_{ij} = Pr$ [유휴기간 시작점의 UMC 상태가 i라는 조건 하에 $I_{n,r} = 1$이고 r번째 군휴가 시작점

의 UMC 상태가 j임]

$(\gamma_{n,r})_{ij}$로 이루어진 $m\times m$ 행렬을 $\Gamma_{n,r}$라 하자. $r-1$번째 군휴가를 떠나는 시점에서의 고객수에 조건을 취하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\Gamma_{n,r}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{n-k,r-1}[I-V_0]^{-1}V_k,\ (r\le n-k+2)$$

위 식에서 $r=1,2,\dots n+1$에 대하여 양변에 합을 취하면 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n+1}\Gamma_{n,r}&=\sum_{r=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{n-k,r-1}(I-V_0)^{-1}V_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=2}^{n-k+2}\Gamma_{n-k,r-1}(I-V_0)^{-1}V_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n-k+1}\Gamma_{n-k,r}(I-V_0)^{-1}V_k\end{aligned}$$

$\sum_{r=1}^{n+1}\Gamma_{n,r}=R_n$이라 하면 $R_n=\sum_{k=1}^{n}R_{n-k}[I-V_0]^{-1}V_k$이 되어 [정리 2]를 만족한다. 결국, $(R_n)_{ij}$는 유휴기간 시작시점에서의 UMC 상태가 i라는 조건 하에 군휴가과정이 상태 n을 방문하고 UMC 상태가 j일 확률임이 증명된다.

(2) (1)의 증명으로부터 자명하다. ■

이제 [정리 3]을 이용하면 [정리 2]의 $R_n=\sum_{k=1}^{n}R_{n-k}[I-V_0]^{-1}V_k$을 해석할 수 있다. 즉, 군휴가 시작점에서 고객수가 n명이려면 직전 군휴가 시작점에서 고객수가 $(n-k)$명이라는 조건 하에 그 군휴가 동안 k명이 증가하면 된다.

휴가기간에서 첫 번째 군휴가 동안에 도착한 고객수에 조건을 취하면 다음의 정리가 성립한다.

[정리 5] [정리 2]에서 정의된 $R_n=\sum_{k=1}^{n}R_{n-k}[I-V_0]^{-1}V_k$는 또한 다음과 같다.

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}[I-V_0]^{-1}V_kR_{n-k}$$ ■

[정리 1]과 [정리 2]의 ϕ_n, R_n을 이용하면 식 (28)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}Y(z)&=(z-1)\sum_{n=0}^{N-1}\phi_nz^n[V(z)-I]D(z)^{-1}\\&\quad A(z)[zI-A(z)]^{-1}\\&=(z-1)p_1(0)\sum_{n=0}^{N-1}R_n[I-V_0]^{-1}z^n\\&\quad[V(z)-I]D(z)^{-1}\cdot A(z)[zI-A(z)]^{-1}\end{aligned}\tag{30}$$

$Y(z)$가 결정되기 위해서는 $p_1(0)$이 결정되어야 한다. 이를 위하여 우선 다음의 정리를 살펴보자.

[정리 6] $\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(z,\theta)|_{z=1,\theta=0}$는 임의의 시점에서 서버가 유휴할 확률과 그 때의 UMC 상태를 나타내는 벡터가 된다. 따라서 서버가 유휴할 확률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}1-\rho&=\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)e\\&=p_1(0)E(V)\sum_{n=0}^{N-1}R_n[I-V_0]^{-1}e\end{aligned}\tag{31}$$

(증명) 식 (21)과 (22)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(z,\theta)[\theta I+D(z)]\\&=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-V^*(\theta)I]\end{aligned}\tag{32}$$

식 (32)에 $\theta=0$을 대입하고 [정리 1]을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(z,0)D(z)&=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}q_{n,r-1}(0)z^n[V(z)-I]\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\phi_nz^n[V(z)-I]\end{aligned}\tag{33}$$

식 (33)에 $z=1$을 대입하고 양변에 $\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)e\pi$를 더하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)&=\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)e\pi\\&\quad+\sum_{n=0}^{N-1}\phi_n[V-I][D+e\pi]^{-1}\end{aligned}\tag{34}$$

한편, 식 (33)을 z에 대하여 미분하고 $z=1$을 대입한 후 양변에 e를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)d=\left\{\sum_{n=0}^{N-1}n\phi_n[V-I]+\sum_{n=0}^{N-1}\phi_nV^{(1)}\right\}e\tag{35}$$

여기서 $V^{(1)}e=\lambda E(V)e+[V-I](e\pi+D)^{-1}d$이고 $d=\sum_{n=1}^{\infty}nD_ne$이다. 식 (34)의 양변에 d를 곱한 후 식 (35)를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{r=1}^{\infty}q_r^*(1,0)e&=\sum_{n=0}^{N-1}\phi_n[\lambda E(V)e\\&\quad+[V-I](e\pi+D)^{-1}d]\\&\quad-\sum_{n=0}^{N-1}\phi_n[V-I](e\pi+D)^{-1}d\end{aligned}$$

$$=\lambda\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{\phi}_n E(V)\boldsymbol{e} \tag{36}$$

[정리 2]를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\boldsymbol{q}_r^*(1,0)\,\boldsymbol{e}=\boldsymbol{p}_1(0)E(V)\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e} \tag{37}$$

따라서 식(31)이 만족된다. ■

$\boldsymbol{x}_0=(x_{0,1},x_{0,2},\dots,x_{0,m})$에서 $x_{0,j}$를 임의의 이탈시점 직후에 서버가 유휴하고 UMC 상태가 j일 안정상태 확률이라고 정의하자.

[정리 6]을 이용하면 $\boldsymbol{p}(1,0)\,\boldsymbol{e}=\lambda$를 보일 수 있고, 따라서 $\boldsymbol{p}_1(0)=\lambda\boldsymbol{x}_0$이 된다.

$\boldsymbol{p}_1(0)=\lambda\boldsymbol{x}_0$를 (30)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(z)&=(z-1)\lambda\boldsymbol{x}_0\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^n[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]\\&\quad\boldsymbol{D}(z)^{-1}\cdot\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1}\end{aligned} \tag{38}$$

이제 $\boldsymbol{Y}(z)$가 완전하게 결정되기 위해서는 $\boldsymbol{x}_0$만 결정되면 된다. $\boldsymbol{K}(z)$를 한 사이클의 시작점(사이클을 임의의 바쁜기간 종료점에서 다음 바쁜기간 종료점 사이의 기간으로 정의하자)과 종료점간의 UMC 상태변화를 고려한 사이클 동안의 서비스 종료수의 행렬 GF라고 하자. $\boldsymbol{K}(z)$를 구하기 위해서는 바쁜기간 시작점 직후에서의 고객수와 UMC 상태의 결합확률을 알아야 한다. 이를 위해 다음의 정리들을 살펴보자.

[정리 7] $m\times m$ 행렬 $\boldsymbol{Q}_k^N\,(k\ge N)$의 (i,j)번째 원소를 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태가 i라는 조건 하에서 바쁜기간 시작점에서의 고객수가 k이고 그 때의 UMC 상태가 j일 확률이라 하자. $\boldsymbol{Q}_N(z)$를 $\boldsymbol{Q}_k^N$의 행렬 GF라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_N(z)&=\sum_{k=N}^{\infty}\boldsymbol{Q}_k^N z^k \\&=\boldsymbol{I}+\sum_{j=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_j[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^j[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]\end{aligned} \tag{39}$$

(증명) 첫 번째 휴가 동안에 도착하는 고객집단의 크기에 조건을 취하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\boldsymbol{Q}_k^N=\boldsymbol{V}_k+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{V}_j\boldsymbol{Q}_{k-j}^{N-j}\quad(k\ge N)$$

따라서 행렬 GF는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_N(z)&=\sum_{k=N}^{\infty}\boldsymbol{Q}_k^N z^k\\&=\boldsymbol{V}(z)-\sum_{j=0}^{N-1}\boldsymbol{V}_j z^j+\sum_{k=N}^{\infty}z^k\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{V}_j\boldsymbol{Q}_{k-j}^{N-j}\\&=\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0-\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{V}_j z^j+\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{Q}_N(z)\\&\quad+\sum_{k=N}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{k-1}\boldsymbol{V}_j\boldsymbol{Q}_{k-j}^{N-j}\\&=\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0-\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{V}_j z^j+\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{Q}_N(z)\\&\quad+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=N-j}^{\infty}\boldsymbol{V}_j z^j\boldsymbol{Q}_k^{N-j}z^k\\&=\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{Q}_N(z)\\&\quad+\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{V}_j z^j[\boldsymbol{Q}_{N-j}(z)-\boldsymbol{I}]\end{aligned}$$

$N=1$이면 위 식의 마지막 항은 0이다. 이를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_N(z)&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0]\\&\quad+[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{V}_j z^j[\boldsymbol{Q}_{N-j}(z)-\boldsymbol{I}]\end{aligned} \tag{40}$$

이제 수학적 귀납법을 이용하자. $N=1$일 때는 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_1(z)&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0]\\&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0]\\&\quad+[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}-[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\\&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{V}(z)-[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\\&\quad+[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}-[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{V}_0\\&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]+\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}$를 이용하면 다음과 같이 되어 $N=1$인 경우의 식(39)가 성립한다.

$$\boldsymbol{Q}_1(z)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}] \tag{41}$$

$N=2,3,\dots,k$에 대하여 성립한다고 가정하고 $N=k+1$의 경우를 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{k+1}(z)&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0]\\&\quad+[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{V}_j z^j[\boldsymbol{Q}_{k+1-j}(z)-\boldsymbol{I}]\\&=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0]\\&\quad+[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{V}_j z^j\\&\quad\sum_{i=0}^{k-j}\boldsymbol{R}_i[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^i[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]\end{aligned} \tag{42}$$

식 (42)의 마지막 항에 포함된 $\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{V}_j z^j\sum_{i=0}^{k-j}\boldsymbol{R}_i[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^i$를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} V_j z^j \sum_{i=0}^{k-j} R_i[I-V_0]^{-1} z^i &= V_1 z[R_0+\cdots+R_{k-2}z^{k-2}+R_{k-1}z^{k-1}]\\ &\quad [I-V_0]^{-1}\\ &\quad + V_2 z^2[R_0+\cdots+R_{k-2}z^{k-2}][I-V_0]^{-1}\\ &\quad +\cdots+ V_k z^k R_0[I-V_0]^{-1}\\ &= V_1 z R_0[I-V_0]^{-1}\\ &\quad + V_1 z R_1 z[I-V_0]^{-1} + V_2 z^2 R_0[I-V_0]^{-1}\\ &\quad +\cdots+ V_1 z R_{k-1} z^{k-1}[I-V_0]^{-1}\\ &\quad +\cdots+ V_k z^k R_0[I-V_0]^{-1}\\ &= \sum_{n=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} V_i R_{n-i}[I-V_0]^{-1} z^n \end{aligned} \tag{43}$$

식 (43)을 (42)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(z) &= [I-V_0]^{-1}[V(z)-V_0]\\ &\quad + \sum_{n=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}[I-V_0]^{-1}\\ &\quad V_i R_{n-i} z^n [I-V_0]^{-1}[V(z)-I] \end{aligned}$$

[정리 5]로부터 $\sum_{i=1}^{n}[I-V_0]^{-1} V_i R_{n-i} = R_n$, $R_0 = I$ 이므로 식 (42)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(z) &= [I-V_0]^{-1}[V(z)-V_0]\\ &\quad + \sum_{n=1}^{k} R_n[I-V_0]^{-1} z^n [V(z)-I]\\ &= I + [I-V_0]^{-1}[V(z)-I]\\ &\quad + \sum_{n=1}^{k} R_n[I-V_0]^{-1} z^n [V(z)-I]\\ &= I + \sum_{n=0}^{k} R_n[I-V_0]^{-1} z^n [V(z)-I] \end{aligned}$$

따라서 정리가 증명된다. ■

레벨-$(i+1)$ 에서 레벨-i까지의 최초경과시간을 기본기간(fundamental period)이라 하며, 기본기간은 $M/G/1$에서 준-바쁜기간(sub-busy period)에 해당한다. 기본기간에 대한 논의는 Neuts(1989)를 따르도록 한다.

$G(z)$를 기본기간의 시작점과 끝점의 UMC 상태변화를 고려한 서비스 종료수의 행렬 GF라고 하자. [정리 7]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} K(z) &= Q_N(z)\,|_{z=G(z)}\\ &= I + \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1}[G(z)]^n[V(G(z))-I] \end{aligned} \tag{44}$$

따라서 사이클 동안의 UMC 전이확률행렬 K는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K &= K(z)\,|_{z=1}\\ &= I + \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n[V(G)-I] \end{aligned} \tag{45}$$

x^*를 한 사이클 시작점에서의 UMC 상태가 주어진 조건 하에서 그 사이클 동안 서비스 받는 고객수에 대한 벡터GF라고 하자.

[정리 8] 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} x^* &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1}\frac{\lambda E(V)}{1-\rho} e\\ &\quad + (K-I)(eg+D(G))^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu \end{aligned} \tag{46}$$

(증명)

$\frac{d}{dz}K(z)|_{z=1} = K^{(1)}$, $\frac{d}{dz}V(G(z))|_{z=1} = V^{(1)}(G)$라 하자. 식 (44)를 z에 대하여 미분하고, $z=1$을 대입한 후 양변에 e를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} K^{(1)} e &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1}\\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} G^k G^{(1)} G^{n-k-1}[V(G)-I]e\\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n V^{(1)}(G)e \end{aligned} \tag{47}$$

여기서 $V^{(1)}(G)e$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(G)e &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} e^{D(G(z))x} dV(x)\Big|_{z=1}\\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[D(G)]^{n-1}\\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i G^{(1)} e\, dV(x) \end{aligned} \tag{48}$$

양변의 앞에 $(eg+D(G))^{-1}(eg+D(G))$를 곱한 후 $G^{(1)} = e = \mu$를 이용하면 다음을 얻는다. 여기서 g는 기본기간의 시작점과 끝점에서의 UMC 상태변화 확률을 나타내는 확률행렬(stochastic matrix) $G = G(z)|_{z=1}$ 의 정상확률(stationary probabilities) 벡터이다.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(G)e &= (eg+D(G))^{-1}\int_0^\infty eg\\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[D(G)]^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu\, dV(x)\\ &\quad + (eg+D(G))^{-1}\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[D(G)]^n\\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu\, dV(x) \end{aligned}$$

여기서 $g[D(G)]^{n-1} = 0$, $(n \ge 2)$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(G)e & \qquad (49)\\ &= \int_0^\infty (eg+D(G))^{-1} xeg \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu dV(x) \\ &+ \int_0^\infty (eg+D(G))^{-1}(e^{D(G)x}-I) \\ &\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu dV(x) \end{aligned}$$

식 (40)에 $g\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu = \frac{\lambda}{1-\rho}$ 를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} V^{(1)}(G)e &= (eg+D(G))^{-1} e \frac{\lambda E(V)}{(1-\rho)} \\ &+ (eg+D(G))^{-1}(V(G)-I) \\ &\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu \end{aligned} \qquad (50)$$

$(eg+D(G))e=e$ 로부터 $(eg+D(G))^{-1}e=e$ 이고 $(eg+D(G))$ 와 $(V(G)-I)$가 가환이므로 $(eg+D(G))^{-1}$와 $(V(G)-I)$도 가환이다. 식 (50)을 (47)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} x^* = K^{(1)}e &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} \frac{\lambda E(V)}{1-\rho} G^n e \\ &+ (K-I)(eg+D(G))^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sum_{i=0}^{k-1} G^i \mu \end{aligned}$$

여기서 $G^n e = e$ 이므로 식 (46)이 성립한다. ■

마코프재생과정(Markovian renewal process)의 이론에 의하면 $x_0 = \frac{x}{xx^*}$ 이므로 [정리 8]의 결과를 여기에 대입하면 다음을 얻는다.

$$x_0 = \frac{(1-\rho)x}{\lambda x E(V) \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} e} \qquad (51)$$

식 (31)과 $p_1(0) = \lambda x_0$ 를 이용하면 마찬가지로 (51)을 얻을 수 있다.

식 (51)을 (38)에 대입하면 임의시점 고객수에 대한 벡터GF $Y(z)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{x \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} z^n}{x \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} e} \frac{[V(z)-I]}{E(V)} \qquad (52) \\ & D(z)^{-1} \cdot (z-1)(1-\rho) A(z)[zI-A(z)]^{-1} \end{aligned}$$

벡터 x와 벡터 g 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

[정리 9]

(a) $$x = \frac{g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1}}{g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} e} \qquad (53)$$

(b) $$g = \frac{x\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]}{x\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} e\right]} \qquad (54)$$

(증명)

(a) 식 (45)를 다음과 같이 다시 쓰자.

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} K \qquad (55) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} + [V(G)-I] \end{aligned}$$

식 (55)의 양변의 앞에 g를 곱하고 $gV(G)=g$를 이용하면(Lucantoni *et al.*, 1990) 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} K \qquad (56) \\ &= g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} \end{aligned}$$

식 (56)을 $g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} e$로 나누고 다음을 정의하자.

$$u = \frac{g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1}}{g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} e} \qquad (57)$$

그러면 식 (57)은 $uK=u$와 $ue=1$을 만족시킨다. 따라서, u는 K의 유일한 정상확률이 되고 $u=x$가 만족된다.

(b) 식 (53)의 양변에 $\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]$을 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g &= \left\{ g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} e \right\} \qquad (58) \\ & x \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n \end{aligned}$$

식 (58)의 양변의 뒤에 e를 곱하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &g\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} G^n\right]^{-1} e \qquad (59) \\ &= \frac{1}{x \sum_{n=0}^{N-1} R_n[I-V_0]^{-1} e} \end{aligned}$$

식 (59)의 양변의 뒤에 $\boldsymbol{x}$ 를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{g}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{G}^n\right]^{-1}\boldsymbol{ex} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e}} \tag{60}$$

여기서 $\boldsymbol{g}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{G}^n\right]^{-1}\boldsymbol{ex} = \boldsymbol{g}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{G}^n\right]^{-1}$이므로 (54)가 만족된다. ■

$N=1$이면 $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}}{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e}}$가 된다. 이것은 결국 임의의 휴가시점에서의 UMC 상태확률벡터가 됨을 [정리 10]으로부터 알 수 있다. 이것은 복수휴가 $MAP/G/1$ 대기행렬에서의 $\boldsymbol{g}$ 의 의미와 일치한다(Lucantoni *et al.*, 1990).

식 (54)를 (51)에 대입한 후 정리하면 다른 형태의 $\boldsymbol{x}_0$가 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{1-\rho}{\lambda E(V)}\,)\,\boldsymbol{g}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{G}^n\right]^{-1} \tag{61}$$

2.3 이탈시점에서의 고객수분포

이탈시점에서의 고객수에 대한 벡터생성함수를 $\boldsymbol{X}(z)$라고 정의하면 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{X}(z)=\frac{\boldsymbol{p}(z,0)}{z\boldsymbol{p}(1,0)\,\boldsymbol{e}} \tag{62}$$

식 (24)를 (62)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{X}(z)=\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{q}_{n,r-1}(0)z^n \tag{63}$$
$$[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1}$$

여기에 [정리 1], [정리 2], $\boldsymbol{p}_1(0)=\lambda\boldsymbol{x}_0$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{x}_0\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^n[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}] \tag{64}$$
$$\cdot\,\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1}$$

여기에 식 (51)을 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{X}(z) = \frac{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^n}{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e}}\,\frac{[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]}{E(V)} \tag{65}$$
$$\boldsymbol{D}(z)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda}(1-\rho)\,\boldsymbol{D}(z)\,\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1}$$

식 (52)로부터 $\boldsymbol{X}(z)$와 $\boldsymbol{Y}(z)$는 다음의 관계에 있음이 확인된다(Takine, 1998).

$$\boldsymbol{Y}(z)\,\boldsymbol{D}(z)=\lambda(z-1)\,\boldsymbol{X}(z) \tag{66}$$

2.4 고객수분포의 확률적 분해성질

본 절에서는 임의시점과 이탈시점의 고객수분포에 대한 확률적 분해성질을 밝힌다. 식 (52)와 (65)에 포함된 항들을 해석하자.

[정리 10]

(1) 서버가 유휴한 임의의 시점을 t_{idle} 이라고 하자. $\boldsymbol{\varPsi}_k^{N,V}=\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}}{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{e}}$는 t_{idle} 을 포함하는 휴가의 시작점에서 고객수가 k 명일 확률벡터이다.

(2) $\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{\varPsi}_k^{N,V}$는 임의의 휴가 시작점에서의 UMC 상태확률벡터이다.

(증명)

(1) 군휴가 동안의 평균 휴가수는 일반적인 복수휴가 시스템에서의 평균 휴가수와 같다. $((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1})_{ij}$는 임의의 군휴가 시작점에서의 UMC 상태가 i 라는 조건 하에 그 군휴가 내에서 UMC 상태 j로 시작하는 휴가의 평균수이다(Lucantoni *et al.*, 1990). $(\boldsymbol{R}_n)_{ij}$는 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태가 i 라는 조건하에 군휴가과정이 상태(고객수) k를 방문하고 그 때의 UMC 상태가 j 일 확률이므로([정리 4]) $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1})_j$는 임의의 군휴가 시작점에서 고객수가 n 명이고 UMC 상태 j로 떠나는 휴가의 평균수가 된다. 따라서 $\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{e}$는 휴가기간 동안의 평균 휴가수가 된다. 한 군휴가 내에서 임의의 휴가 시작점에서의 고객수는 그 군휴가 시작점에서의 고객수와 같으므로 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{e}$는 고객수 n으로 시작하는 휴가의 평균수이다. 휴가의 길이는 서로 독립이고 동일한 일반분포를 따르므로 결국 $(\boldsymbol{\varPsi}_k^{N,V})_j$는 휴가기간 내의 임의의 시점 t_{idle} 을 포함하는 휴가 시작점에서의(고객수, UMC 상태)가 (k,j)일 확률이다.

(2) (1)의 증명으로부터 자명하다. ■

$N=1$이며 $\boldsymbol{\varPsi}_0^{N,V}=\frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}}{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e}}$는 N-정책이 없는 복수휴가 시스템에서 임의의 휴가 시작점에서의 UMC 상태확률벡터가 되는데 이는 결국 $\boldsymbol{g}$ 와 같음을 식 (54)에서 확인할 수 있다.

$\boldsymbol{V}^{+}(z)$를 경과휴가시간 동안 도착한 고객수와 그 동안의 UMC의 상태변화를 나타내는 행렬GF라 하면 다음과 같다.

$$V^+(z) = \int_0^\infty e^{D(z)x} \frac{1-V(x)}{E(V)}\, dx \tag{67}$$
$$= \frac{[V(z)-I]}{E(V)} D(z)^{-1}$$

따라서 [정리 10]의 결과와 식 (67)로부터 다음이 성립한다.

[정리 11] 다음의 $\boldsymbol{p}_{idle}(z)$는 임의의 유휴시점에서의 고객수GF이다.

$$\boldsymbol{p}_{idle}(z) = \frac{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^n}{\boldsymbol{x}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{e}} \tag{68}$$

$$\frac{[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]}{E(V)} \boldsymbol{D}(z)^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}_n^{N,V} z^n \boldsymbol{V}^+(z) \quad \blacksquare$$

[정리 11]을 식 (52)와 (65)에 적용하면 고객수GF에 대한 다음과 같은 분해법칙이 성립한다.

[정리 12]

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{p}_{idle}(z)\,\boldsymbol{\chi}_Y(z) \tag{69}$$
$$\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{p}_{idle}(z)\,\boldsymbol{\chi}_X(z) \tag{70}$$

여기서 $\boldsymbol{\chi}_Y(z)$, $\boldsymbol{\chi}_X(z)$는 각각 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\chi}_Y(z) = (1-\rho)(z-1)\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1} \tag{71}$$
$$\boldsymbol{\chi}_X(z) = \frac{1}{\lambda}(1-\rho)\boldsymbol{D}(z)\boldsymbol{A}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]^{-1} \tag{72}\blacksquare$$

위의 분해법칙에 대한 일반적인 증명은 Chang, *et al.*(2002)을 보기 바란다.

3. 평균고객수

식 (30)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{Y}(z)\boldsymbol{D}(z) = (z-1)\boldsymbol{U}(z)$$

여기서 $\boldsymbol{U}(z)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{U}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)] = \boldsymbol{p}_1(0)\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}z^n$$
$$[\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}(z)$$

$\frac{d^k}{dz^k}\boldsymbol{U}(z)|_{z=1} = \boldsymbol{U}^{(k)}$, $\boldsymbol{U}(z)|_{z=1} = \boldsymbol{U}$, $\frac{d^k}{dz^k}\boldsymbol{D}(z)|_{z=1} = \boldsymbol{D}^{(k)}$라고 정의하면, Lucantoni (1991)의 절차에 따라 안정상태 임의시점에서의 평균 고객수를 구하면 다음과 같다.

$$L = \boldsymbol{Y}^{(1)}\boldsymbol{e}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{e} - \frac{1}{2\lambda}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}^{(2)}\boldsymbol{e}$$
$$+ \frac{1}{\lambda}[\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}^{(1)} - \boldsymbol{U}][\boldsymbol{D}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}\boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{e}$$

여기서 마지막으로 L이 결정되기 위해서는 $\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{e}$와 $\boldsymbol{U}$가 결정되어야 하는데 각각은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{U} = \lambda\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{p}_1(0)\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1} \tag{76}$$
$$[\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{e} = \frac{1}{1-\rho}\Big\{ & \boldsymbol{p}_1(0)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} n\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{V}^{(1)} \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} n\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}^{(1)} \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{V}^{(1)}\boldsymbol{A}^{(1)} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}\boldsymbol{V}^{(2)} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}^{(2)}\Big)\boldsymbol{e} \\
& + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{e} \\
& - \boldsymbol{p}_1(0)\Big(\sum_{n=0}^{N-1} n\boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A} \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}^{(1)}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A} \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{R}_n[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0]^{-1}[\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}^{(1)}\Big) \\
& [\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}]\boldsymbol{e} \\
& + \boldsymbol{U}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}][\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}]\boldsymbol{e}\Big\}
\end{aligned} \tag{77}$$

4. 결 론

본 논문에서는 제어정책을 고려한 *BMAP/G/*1 대기행렬시스템의 운영특성을 분석하였다. 안정상태 임의시점과 이탈시점에서의 고객수분포를 유도하였고, 이의 확률적 분해법칙을 밝혔다. 또한, 성능척도로서 평균고객수를 유도하였다.

참고문헌

Ahn, B. Y. (2000), *Operational characteristics of the MAP/G/1 queue with server control*, Ph. D thesis, Dept of Industrial Engineering, Sung Kyun Kwan University, Korea.

Chang, S. H., Takine, T., Chae, K. C. and Lee, H. W. (2002), A unified queue length formula for BMAP/G/1 queue with generalized vacations, To appear in Vol 18, No. 2, *Stochastic Models*.

Hwang, G. U. (1997), *The MAP/G/1 queue and its applications to ATM networks*, Ph. D thesis, Dept of Mathematics, KAIST, Korea.

Kasahara, S., Takine, T., Takahashi, H. and Hasegawa, T. (1996), MAP/G/1 Queues under N-policy with and without Vacations, *J. of the Operations Research Society of Japan*, **39**(2), 188-212.

Lee, H. W., Lee, S. S., Park, J. O. and Chae, K. C. (1994), Analysis of the $M^X/G/1$ Queue with N-policy and Multiple vacations, *J. Appl. Prob.*, **31**, 476-496.

Lee, H. W. (1998), *Queueing Theory*, 2nd ed., Sigma Press, Seoul, Korea.

Lee, H. W., Moon, J. M., Park, J. G. and Kim, B. K. (1999a), An Analysis of the BMAP/G/1 queue I : Continuous Time Case, submitted for publication.

Lee, H. W., Moon, J. M., Park, J. G. and Kim, B. K. (1999b), An Analysis of the BMAP/G/1 queue II : Discrete Time Case, submitted for publication.

Lucantoni, D. M. (1991), New Result on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process, *Commun. Statist. – Stochastic Models*, **7**(1), 1-46.

Lucantoni, D. M., Meier-Hellstern, K. S. and Neuts, M. F. (1990), A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes, *Adv. Appl. Prob.*, **22**, 676-705.

Neuts, M. F. (1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

Neuts, M. F. (1989), *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker Inc., New York.

Neuts, M. F. (1979), A versatile Markovian point process, *J. Appl. Prob.*, **16**, 764-779.

Niu, Z. and Takahashi, H. (1999), A finite-capacity queue with exhaustive vacation/close-down/setup times and Markovian arrival processes, *Queueing Systems*, **31**, 1-23.

Ramaswami, V. (1980), The $N/G/1$ Queue and its Detailed Analysis, *Adv. Appl. Prob*, **12**, 222-261.

Shin, H. W., Pearce, C. E. M. (1998), The MAP/G/1 vacation queue with queue-length dependent vacation schedule, *J. Austral. Math. Soc.*, **40**, 207-221.

Sugahara, A., Takine, T., Takahashi, H. and Hasegawa, T. (1995), Analysis of a nonpreemptive priority queue with SPP arrivals of high class, *Performance Evaluation*, **21**, 215-238.

Takine, T. and Hasegawa, T. (1994), The workload in the MAP/G/1 queue with state-dependent services: its application to a queue with preemptive resume priority, *Stochastic Models*, **10**(1), 183-204.

Takine, T. (1996), A nonpreemtive priority MAP/G/1 queue with two classes of customers, *J. of Opns. Res. Soc. of Japan*, **39**(2), 266-290.

Takine, T. (1998), On the relationship between queue lengths at a random instant and at a departure in the stationary queue with BMAP arrivals, *Stochastic Models*, **14**(3), 601-610.