Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 28, No. 1, pp. 99-104, March 2002.

# 변수추가시의 비가능 내부점기법의 감도분석

김우제[1†] · 박찬규[2] · 임성묵[3] · 박순달[3] · Katta G. Murty[4]

[1]대진대학교 산업시스템공학과/[2]한국전산원/[3]서울대학교 산업공학과/
[4] Dept. of IOE, University of Michigan

# A Method of Sensitivity Analysis for the Infeasible Interior Point Method When a Variable is Added

Woo-Je Kim[1] · Chan-kyoo Park[2] · Sungmook Lim[3] · Soondal Park[3] · Katta G. Murty[4]

[1]Department of Industrial and Systems Engineering, Daejin University, Kyungkido, 487-711
[2]Department of IT Audit & Supervision, National Computerization Agency, Kyungkido, 449-717
[3]Department of Industrial Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-742
[4]Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor 48109 USA

This paper presents a method of sensitivity analysis for the infeasible interior point method when a new variable is introduced. For the sensitivity analysis in introducing a new variable, we present a method to find an optimal solution to the modified problem. If dual feasibility is satisfied, the optimal solution to the modified problem is the same as that of the original problem. If dual feasibility is not satisfied, we first check whether the optimal solution to the modified problem can be easily obtained by moving only dual solution to the original problem. If it is possible, the optimal solution to the modified problem is obtained by simple modification of the optimal solution to the original problem. Otherwise, a method to set an initial solution for the infeasible interior point method is presented to reduce the number of iterations required. The experimental results are presented to demonstrate that the proposed method works better.

***Keywords***: interior point method, sensitivity analysis

## 1. 서 론

선형계획법에서 목적함수 계수, 우변상수, 행렬계수 등의 데이터가 변화할 때, 그리고 새로운 활동의 추가나 새로운 제약식의 추가시에 그 영향을 평가하는 것은 현실 문제에 있어 매우 유용하다. 왜냐하면 현실문제에서는 이른바 what-if 질문들에 대한 검토가 유용하게 활용되고 있기 때문이다. 이러한 데이터의 변화시에 변화된 문제를 처음부터 새로 푸는 것은 비효율적이다. 따라서 데이터의 변화시 기존에 풀었던 해를 이용하여 의사결정을 하기 위하여 감도분석 이론이 폭 넓게 연구되어 왔다.

단체법에서는 감도분석 방법이 목적함수 계수, 우변상수, 행렬계수 등의 데이터가 변화할 때와 새로운 활동의 추가나 새로운 제약식의 추가시에 모두 잘 개발되었다. 이 방법은 기저정보를 이용하여 감도분석에 소요되는 추가적인 계산량이 적으므로 여러 가지 단체법을 이용한 선형계획법 패키지에서도 감도분석 정보를 제공하고 있다(박순달, 1992).

그러나 내부점 선형계획법에서는 매 회마다 기저정보를 유지하지 않으면서 해를 개선한다. 그러므로 단체법에서의 감도분석 이론이 그대로 적용될 수 없다. 이러한 이유로 내부점 선형계획법에서의 감도분석에 대한 연구는 단체법에 비해 상대적으로 미진하였다. Adler와 Monterio는 최적분할(Optimal partition) 개념을 도입하여 내부점 선형계획법에서 우변상수

† 연락저자: 김우제 교수, 487-711 경기도 포천군 포천읍 선단리 산11-1 대진대학교 산업시스템공학과, Fax : 031-539-2000, e-mail : wjkim@road.daejin.ac.kr
2001년 9월 접수, 2회 수정(5주 소요) 후, 2001년 12월 게재 확정.

에 대한 감도분석 방법을 개발하였다(Adler and Monterio, 1992). 그런데 최적분할을 구하려면 선형방정식을 풀어야 하는데 이 자체가 많은 시간을 필요로 한다. 또한 Mehrotra와 Ye에 따르면 최적분할은 한번에 구해질 수 없다. 그러므로 최적분할을 구하는 문제는 선형계획법 문제를 새로 푸는 것과 비슷한 양의 계산량을 필요로 한다(Mehrotra and Ye, 1993). 양병학과 박순달은 카마카(Karmarkar) 알고리듬에 대한 목적함수계수에 대한 실용적인 감도분석 방법을 개발하였는데 이 방법에서 요구하는 추가적인 계산량은 단체법의 감도분석과 비슷한 수준이다(Yang and Park, 1994). 김우제 등은 $\varepsilon$-감도분석을 정의하면서 우변상수와 목적함수계수에 대한 실용적인 감도분석 방법을 개발하였다(Kim 외 2인, 1999). 그러나 변수나 제약식 추가시의 내부점 선형계획법에 대한 감도분석 방법은 소개되어 있지 않은 실정이다.

내부점 선형계획법 중 비가능 내부점기법은 초기가능해를 요구하지 않고 실용적인 면에서 대형선형계획법 문제를 빨리 풀 수 있으며, 이론적으로 알고리듬의 수렴성도 보장되어 있으므로 널리 활용되고 있는 기법 중에 하나이다(Kojima 외 2인, 1993).

따라서 본 논문의 목적은 하나의 변수가 추가되었을 때 비가능 내부점기법에 대한 실용적인 감도분석기법을 개발하는 것이다. 이러한 감도분석기법이 개발되면 쌍대이론에 의해 제약식 추가시의 감도분석도 쉽게 응용할 수 있을 것으로 기대된다.

## 2. 비가능 내부점기법

비가능 내부점기법에 관한 연구는 많이 이루어져 왔다. 비가능 내부점기법에 대한 알고리듬의 수렴성에 관한 연구는 Kojima 등(Kojima 외 2인, 1993)에 의해 이루어졌으며, 비가능 내부점기법의 다항 복잡성(Complexity)에 관한 연구는 Zhang(Zhang, 1994)에 의해 연구되었다. Mehrotra(Mehrotra, 1992)는 비가능 내부점기법의 효율을 향상시키기 위하여 초기해를 찾는 휴리스틱 기법을 제안하였다. 또한 Mehrotra는 개선방향을 구하는 방법으로 second-order predictor-corrector 기법을 제안하였는데, 이 기법은 상업용 내부점 선형계획법 패키지로 널리 활용되고 있다(Mehrotra and Ye, 1993). 또한 Andersen 등(Anderson 외 3인, 1996)과 박순달 등(Park 외 4인, 2000)은 여러 가지 비가능 내부점기법에서의 구현상의 문제들을 연구하였다.

비가능 내부점기법은 원가능이나 쌍대가능이 아니더라도 강상보조건만을 만족하는 초기해를 가지면 시작 가능하다. 그런 다음 비가능 내부점기법은 비가능성과 쌍대간격(duality gap)을 동시에 줄이는 방향으로 매회 해를 개선해 나간다. 비가능 내부점기법의 계산과정은 다음과 같다.

일반적인 선형계획법 문제를 고려하자.

$$P:\ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad D:\ \begin{array}{ll} \max & b_y^T \\ \text{s.t.} & A^T + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

단, 행렬 $A$는 rank $m$의 $m \times n$행렬이고, $c$와 $x$는 $n$-벡터이고, $b$는 $m$-벡터이다.

먼저 $\gamma \in (0, 1)$, $0 < \sigma_{\min} < \sigma_{\max} \leq 0.5$, $k = 0$ 으로 두자.

단계 1. 초기해

$x^0 > 0$과 $s^0 > 0$를 만족하는 초기해 $\{(x^0)^T, (y^0)^T, (z^0)^T\}$ 를 설정한다.

$\mu^0 = \gamma(x_\cdot^0)^T s^0 / n$ 으로 둔다.

단계 2. 개선방향

$\sigma_k \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ 을 선택하고 다음 선형방정식을 풀어 개선방향을 구한다.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ dy^k \\ ds^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax^k \\ c - A^T y^k - s^k \\ -X^k S^k e + \sigma_k \mu^k e \end{pmatrix}$$

단, $X^k = Diag(x^k)$, $S^k = Diag(s^k)$.

단계 3. 개선폭

$\alpha_x$와 $\alpha_s$를 다음과 같이 구한다.

$\alpha_x = r \min\{x_j^k / (-dx^k)_j : (d_x)_j < 0, \forall j\}$

$\alpha_s = r \min\{s_j^k / (-ds^k)_j : (d_s)_j < 0, \forall j\}$

단, $r = 0.95$

단계 4. 해의 개선

$x^{k+1} = x^k + \alpha_x dx^k$

$y^{k+1} = y^k + \alpha_s dy^k$

$s^{k+1} = A^T y^{k+1} + \alpha_s dy^k$

$\mu^{k+1} = \gamma (x^{k+1})^T s^{k+1} / n$

단계 5. 종료조건

$e^T X^k S^k e < \varepsilon$ 이면 종료. 단, $\varepsilon$는 작은 수.

그렇지 않으면, $k = k+1$ 로 두고 단계 2로 간다.

## 3. 변수 추가시의 감도분석

원문제 P에 새로이 도입된 변수를 $x_{n+1}$이라 하자. 그리고 $A_{.n+1}$과 $c_{n+1}$을 각각 새로이 도입된 변수와 관련된 행렬계수벡터와 목적함수계수로 두자. 그러면 변수가 추가된 원문제와 쌍대문제는 다음과 같이 표현된다.

$$P_v:\ \begin{array}{ll} \min & c^T x + c_{n+1} x_{n+1} \\ s.t. & Ax + A_{.n+1} x_{n+1} = b \\ & x \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

$$D_v: \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T + s = c \\ & A^T_{.n+1} y + s_{n+1} = c_{n+1} \\ & s \geq 0, \ s_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

그리고 원문제의 강상보조건을 만족하는 최적해를 $\{(x^*)^T, (y^*)^T, (s^*)^T\}$라 두자. 이 최적해는 비가능 내부점으로 구해진 최종해를 가지고 Mehrotra와 Ye(Mehrotra and Ye, 1993)가 제안한 방법에 의해 쉽게 구해질 수 있다.

$B$를 $x_i^* > 0$을 만족하는 변수들의 집합이라 정의하고, $N$을 $s_i^* > 0$을 만족하는 변수의 집합이라고 하자. 그러면 $B \cup N = \{1, 2, \cdots, n\}$이고, $B \cap N = \phi$의 조건을 만족한다. $A_B$와 $A_N$을 각각 집합 $B$와 $N$과 관련된 열들로 구성된 행렬 $A$의 부분행렬로 정의하자. 그리고 $x_B$와 $x_N$을 집합 $B$와 $N$과 관련된 요소들로 구성된 해집합 $x$의 부분벡터로 정의하자.

새로운 변수가 추가되었을 때 내부점기법의 감도분석의 기본방향은 다음과 같다. 먼저 확장된 원가능해가 쌍대가능성을 만족하면 변수가 추가된 문제의 최적해는 쉽게 구할 수 있다. 그러나 확장된 원가능해가 쌍대가능성을 만족하지 않는 경우에는 부분행렬 $A_B$의 rank가 $m$보다 작으면 원가능성은 그대로 유지하면서 쌍대해를 간단히 수정해 볼 수 있다. 만약 간단한 수정에 의해서 쌍대가능성을 만족하면 변수가 추가된 문제의 최적해는 쉽게 구할 수 있다. 그러나 부분행렬 $A_B$의 rank가 $m$이거나 부분행렬 $A_B$의 rank가 $m$보다 작더라도 간단한 쌍대해의 수정으로 쌍대가능성을 만족하지 않으면, 원문제의 해를 초기해로 하여 변수가 추가된 문제의 새로운 최적해를 구한다. 이 경우에는 비가능 내부점기법의 수행시간을 단축하기 위해 초기해를 효율적으로 가지는 방법이 필요하다. 내부점기법에서의 변수추가시 감도분석 방법의 전반적인 흐름은 <그림 1>과 같다.

먼저 확장된 원가능해가 쌍대가능성을 만족하는 경우의 감도분석을 살펴보자. 변수가 추가된 문제의 원가능성을 만족하는 하나의 해는 $\hat{x} = \{(x^*)^T, 0\}^T$, $\hat{y} = y^*$, $\hat{s} = \{(s^*)^T, c_{n+1} - A^T_{.n+1} y^*\}^T$가 된다. 만약 이 해가 쌍대가능성인 $c_{n+1} - A^T_{.n+1} y^* \geq 0$을 만족하는 경우에는 변수가 추가된 문제의 최적해 ( $\hat{x}^T$, $\hat{y}^T$, $\hat{s}^T$ )는 다음과 같다.

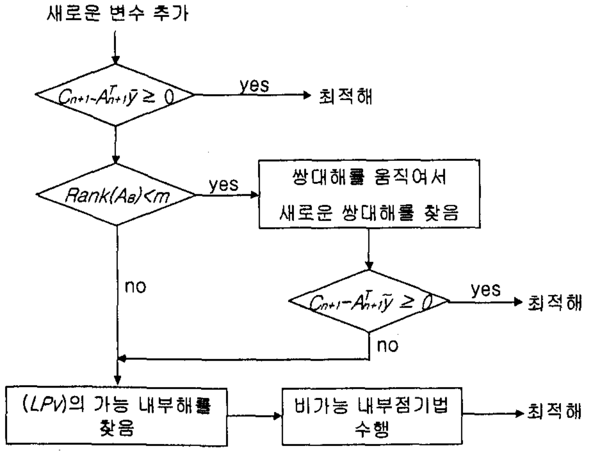


**그림 1.** 비가능 내부점기법의 감도분석 과정.

$$\hat{x} = \{(x^*)^T, 0\}^T, \quad \hat{y} = y^*,$$
$$\hat{s} = \{(s^*)^T, c_{n+1} - A^T_{.n+1} y^*\}^T$$

다음으로 쌍대가능성을 만족하지 않는 경우, 즉 $c_{n+1} - A^T_{.n+1} y^* < 0$인 경우에는 $Rank(A_B) < m$을 조사한다. 만약 $Rank(A_B) < m$이면 원가능해인 $\hat{x} = \{(x^*)^T, 0\}^T$는 그대로 두고 쌍대해의 비가능성을 줄이는 방향으로 쌍대해를 이동시켜 쌍대가능성을 확인한다. 쌍대해의 비가능성을 줄이는 방향을 구하기 위해 다음과 같은 문제 P1을 고려하자. 문제 P1의 목적함수는 최적분할이 유지되는 범위 내에서의 쌍대 비가능성을 최소화하는 방향이다.

$$P1: \quad \begin{array}{ll} \min & A^T_{.n+1} y \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \\ & s_B = 0, \ s_N \geq 0 \end{array}$$

만약 문제 P1의 목적함수의 값이 $c_{n+1}$보다 작거나 같으면 변수가 추가된 문제의 원최적해는 $\{(x^*)^T, 0\}^T$이고, 쌍대최적해는 $(\bar{\bar{s}}^T, c_{n+1} - A^T_{.n+1} \bar{\bar{y}})^T$가 된다. 단, ( $\bar{\bar{y}}^T$, $\bar{\bar{s}}^T$ )는 문제 P1 의 최적해이다.

그러나 감도분석만을 위하여 문제 P1을 푸는 것은 비실용적이다. 여기서는 단지 문제 P1 의 목적함수 값이 $c_{n+1}$보다 작은 하나의 해만을 필요로 하기 때문에 원문제의 쌍대해 $\{(y^*)^T, (s^*)^T\}$를 문제 P1의 목적함수를 개선할 수 있는 방향으로 움직여 보는 방안을 고려한다. 그러면 원문제의 쌍대해 $\{(y^*)^T, (s^*)^T\}$가 문제 P1의 목적함수를 개선할 수 있는 방향은 다음 조건을 만족해야 한다.

$$A_B^T(y^* + \Delta y) = c_B \quad \Leftrightarrow \quad A_B^T \Delta y = 0$$
$$A_N^T(y^* + \Delta y) + (s_N^* + \Delta s_N) = c_N$$
$$\Leftrightarrow \ A_N^T \Delta y + \Delta s_N = 0$$
$$A^T_{.n+1} \Delta y < 0$$
$$\Delta s_B = 0$$
$$(x_N^*)^T \Delta s_N \leq 0$$

이를 만족하는 하나의 방향은 다음과 같다.

$$\Delta y = -\{I - A_B(A_B^T A_B)^{-1} A_B^T\} A_{.n+1}$$
$$\Delta s_B = 0$$
$$\Delta s_N = -A_N^T \Delta y$$

그러면 원문제의 쌍대해 $\{(y^*)^T, (s^*)^T\}$를 문제 P1의 목적함수를 개선할 수 있는 방향으로 움직인 해는 다음과 같다.

$$\bar{y} = y^* + \alpha\Delta y,\ \bar{s} = s^* + \alpha\Delta s$$
$$단,\ \alpha = \min\{-s_i^* / (\Delta s)_i : (\Delta s)_i < 0\}$$

만약, $c_{n+1} - A_{.n+1}^T\bar{y} \geq 0$ 이면 쌍대가능성을 만족하므로, 변수가 추가된 문제의 최적해는 다음과 같다.

$$\hat{x} = \{(x^*)^T, 0\}^T,\ \hat{y} = \bar{y},$$
$$\hat{s} = \{(\bar{s})^T,\ c_{n+1} - A_{.n+1}\bar{y}\}^T$$

다음으로 $c_{n+1} - A_{.n+1}^T\bar{y} < 0$ 이거나 $c_{n+1} - A_{.n+1}^T y^* \geq 0$ 이고 $Rank(A_B) = m$인 경우에는 원문제의 해를 이용하여 초기해를 구하고 이를 비가능 내부점기법으로 풀어야 하는데 이 방법에 대해 언급하자.

이 경우에는 효율적인 초기해를 구하는 것이 변수 추가시의 감도분석시 비가능 내부점기법의 수행횟수를 줄일 수 있는 방법이다. 그런데 일반적으로 비가능 내부점기법에서는 비가능 초기해로 알고리듬을 시작하는 것보다는 가능초기해로 시작하는 것이 더 효과적이다(박순달외 5인, 2001). 따라서 원문제의 최적해를 이용한 변수가 추가된 문제의 초기가능해를 구하는 방법을 알아보자.

먼저 원가능해이지만 내부가능해가 아닌 $\{(x^*)^T, 0\}^T$를 원가능 내부해로 바꾸는 방법을 알아보자.

변수가 추가된 문제 $P_v$의 내부가능해를 구하기 위해 $\{(x^*)^T, 0\}^T$를 방향 $\{(\Delta x)^T, \Delta x_{n+1}\}^T$ 따라 이동시킨다고 하면, 방향 $\{(\Delta x)^T, \Delta x_{n+1}\}^T$는 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다.

$$A\Delta x + A_{.n+1}\Delta x_{n+1} = 0$$
$$\Delta x_{n+1} > 0$$

여기서 $e_{n+1}$을 $n+1$번째 요소만 1이고 나머지 요소는 0인 벡터라고 정의하고, $\tilde{A} = [A, A_{.n+1}]$이라 정의하자. 그러면 위의 두 가지 조건을 만족하는 하나의 개선방향은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x_{n+1} \end{bmatrix} = (I - \tilde{A}^T(\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}\tilde{A})e_{n+1}$$
$$= \begin{bmatrix} -A^T(AA^T + A_{.n+1}A_{.n+1})^{-1}A_{.n+1} \\ 1 - A_{.n+1}^T(AA^T + A_{.n+1}A_{.n+1}^T)^{-1}A_{.n+1} \end{bmatrix}$$

확장된 문제의 원가능해 $\{(x^*)^T, 0\}^T$를 방향 $\{(\Delta x)^T, \Delta x_{n+1}\}^T$를 따라 이동시키면 변수가 추가된 문제 $P_v$의 원내부초기가능해 $\tilde{x}$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{x} = \{(x^* + \beta\Delta x)^T,\ \beta\Delta x_{n+1}\}^T$$
$$단,\ 0 < \beta < \min\{-x_i^* / \Delta x_i : \Delta x_i < 0\}$$

다음으로 변수가 추가된 문제의 쌍대가능 내부해를 구하는 방법을 알아보자. 먼저 쌍대 비가능성을 줄여 쌍대가능해를 구하여야 하는데 이를 위한 개선방향은 다음 두 가지 조건을 만족하여야 한다.

$$A^T\Delta y + \Delta s = 0$$
$$A_{.n+1}^T\Delta y < 0$$

위의 두 가지 조건을 만족하는 개선방향은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta y = -(A\theta^2A^T)^{-1}A_{.n+1},$$
$$\Delta s = -A^T\Delta y,$$
$$\Delta s_{n+1} = c_{n+1} - A^Ty^* - A_{.n+1}^T\Delta y$$
$$단,\ \theta^2 = Diag(x^*)Diag^{-1}(s^*).$$
$$Diag(x^*)는\ x^*의\ 대각행렬임$$

이러한 개선방향에 따라 해를 이동시키면 새로운 쌍대해를 다음과 같이 얻는다.

$$\tilde{y} = y^* + \gamma\Delta y,\ \tilde{s} = s^* + \gamma\Delta s,\ \tilde{s}_{n+1} = c_{n+1} - A^T\tilde{y}$$
$$단,\ \gamma = \min\{-s_i^* / (\Delta s)_i : (\Delta s)_i < 0\}$$

여기서 $c_{n+1} - A_{.n+1}^T\tilde{y} \geq 0$ 이면, $(\tilde{y}^T, \tilde{s}^T)$는 변수가 추가된 쌍대문제 $D_v$의 쌍대가능 내부해가 되므로 비가능 내부점기법에서 초기해로 활용할 수 있다.

한편, $c_{n+1} - A_{.n+1}^T\tilde{y} < 0$ 이면, $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T, \tilde{s}^T)$는 비가능해이므로 쌍대비가능해를 가지고 비가능 내부점기법을 수행한다. 단, $\gamma \leq 1$인 경우에 $(\tilde{y}^T, \tilde{s}^T)$는 해집합의 면에 너무 붙어 있으므로 이를 초기해로 활용할 경우 비가능 내부점기법이 비효율적으로 작동할 수가 있다. 따라서 이 경우에는 쌍대초기해 $\tilde{s}$는 다음과 같이 설정하는 것이 유리하다.

$$\tilde{s}_i = \begin{cases} \delta, & \text{if } \tilde{s}_i < \delta,\ \text{for } 1 \leq i \leq n \\ \tilde{s}_i, & \text{if } \tilde{s}_i \geq \delta,\ \text{for } 1 \leq i \leq n \\ \delta, & i = n+1 \end{cases}$$

단, $\delta$는 작은 양의 수

## 4. 실험결과

본 논문에서 제안한 비가능 내부점기법에 대한 감도분석 방법의 효율을 검증하기 위해 NETLIB에 있는 문제들에 대해서 새로운 변수를 추가하여 실험하였다. 새로운 변수의 열벡터는 임의로 생성되었지만 새로운 변수에 의해 유발되는 쌍대비가능성(dual infeasibility)은 다음과 같이 조정되었다.

표 1. 쌍대해 이동과 초기가능해

| 감도분석유형 \ 비가능성 | $\xi$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 1 | 5 | 10 |
| 쌍대해 이동에 의한 감도분석 | 22/81 | 13/81 | 10/65 | 7/75 |
| 초기가능해 | 20/81 | 17/81 | 12/65 | 12/75 |

$$c_{n+1} - A_{.n+1}^T y^* = -\xi \| A_{n+1.} \|_2$$

단, $\| \cdot \|_2$는 벡터의 2차 노옴(norm)을 의미한다.

실험을 위해 $\xi$는 각각 0.1, 1, 5, 10에 대해 실험하였다. 즉, $\xi$의 값이 커질수록 비가능성이 큰 문제가 된다. 다음 <표 1>은 각 $\xi$에 대한 비가능 내부점기법의 감도분석에 대한 실험결과를 보여준다. <표 1>은 $Rank(A_B) < m$일 때 쌍대해의 간단한 이동에 의해 변수가 추가된 문제의 최적해를 구한 경우에 대한 결과와 이 방법에 의해 새로운 최적해를 구하지 못하였을 경우 비가능 내부점기법을 수행할 때 초기해로 가능해를 구할 수 있는 문제들의 개수를 보여준다. <표 1>에서와 같이 $\xi$가 0.1일 때 81개의 문제 중에 22개의 문제가 간단한 쌍대해 이동으로도 변수가 추가된 문제의 최적해를 구할 수 있었으며, $\xi$가 10일 때에는 75개의 문제 중에 7개만이 쌍대해 이동으로 최적해를 구할 수 있었다. 즉 본 연구에서 제시한 감도분석 방법이 비가능성이 작은 문제일수록 간단한 쌍대해 이동으로도 변수가 추가된 문제의 최적해를 구할 수 있다는 것을 암시한다.

쌍대해 이동으로 변수가 추가된 문제의 최적해를 구할 수 없는 경우에는 비가능 내부점을 위하여 초기가능해를 구하는데 $\xi$가 0.1일 때에는 81개의 문제 중에 20개의 문제가 초기가능해를 구할 수 있었으며, $\xi$가 10일 때에는 75개의 문제 중에 12개만이 초기가능해를 구할 수 있었다.

원문제의 최적해를 이용한 초기가능해를 가지고 비가능 내부점기법의 감도분석을 실시하는 것은 문제를 새로 푸는 것보다 효과적이다. 이에 대한 실험결과가 <표 2>에 나타나 있다.

<표 2>에서 $LP_\nu$는 원문제의 최적해 정보를 이용하지 않고 변수가 추가된 문제를 처음부터 비가능 내부점기법을 푼 경우의 평균 수행횟수이다. <표 2>의 3-6행은 원문제의 최적해를 이용하여 초기해를 구한 후에 비가능 내부점기법을 수행하여 감도분석을 실시한 경우의 평균 수행횟수를 나타낸다. 여기서 $\delta$의 값의 변화에 따라 실험을 하였는데 $\delta = 0.01$의 경우가 평균 수행횟수가 가장 작은 것으로 나타났다. 즉, $\delta$는 초기해가 해집합의 경계에 너무 가까이 붙지 않게 하기 위해 도입된 파라미터인데, $10^{-2}$ 이하로 설정하는 것이 수행결과 좋은 것으로 나타났다. 따라서 <표 2>에 의하면 원문제를 이용하여 초기해를 구한 후 감도분석을 실시하는 것이 변수가 추가된 문제를 처음부터 푸는 것보다 전체적으로 약 60 % 정도 수행횟수가 감소된 것으로 분석되었다.

표 2. 평균 수행횟수

| 문제유형 \ 비가능성 | $\xi$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 1 | 5 | 10 |
| $LP_\nu$ | 21.9 | 20.6 | 21.3 | 17.5 |
| $\delta = 0.01$ | 7.1 | 9.7 | 11.7 | 13.9 |
| $\delta = 0.05$ | 7.9 | 9.9 | 12.2 | 14.0 |
| $\delta = 0.1$ | 9.7 | 9.7 | 12.4 | 14.3 |
| $\delta = 0.5$ | 8.8 | 10.6 | 13.2 | 14.2 |

## 5. 결론

본 논문에서는 새로운 변수가 추가되었을 경우 비가능 내부점기법에 대한 새로운 감도분석 방법을 제안하였다. 감도분석 방법에서는 먼저 원문제의 최적해를 확장한 해가 쌍대가능성을 만족하면 쉽게 변수가 추가된 문제의 최적해를 구할 수 있다. 그렇지 않으면, 쌍대해를 조금 움직여서 쌍대 비가능성을 흡수할 수 있는가를 조사한다. 만약 가능하면 구해진 쌍대가능해를 변수가 추가된 문제의 최적해로 사용한다. 아니면 원문제의 최적해를 이용한 초기해를 가지고 비가능 내부점기법을 수행하여야 하는데 이때 비가능 내부점기법의 수행횟수를 줄이기 위해 효율적인 초기해 선정 방안을 제시하였다.

NETLIB 문제를 대상으로 실험한 결과 쌍대해를 조금 움직여서 변수가 추가된 문제의 최적해를 구할 수 있는 경우가 10~25%까지 있었으며, 제안된 초기해를 가지고 감도분석을 할 경우에는 해를 새로 구하는 경우보다 60% 정도의 수행횟수 개선이 있었다.

본 논문은 변수가 추가된 경우의 비가능 내부점기법의 감도분석 방법을 제안하였으나 쌍대성을 이용하면 제약식이 추가된 경우의 비가능 내부점기법에 대한 감도분석도 쉽게 확장할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고문헌

Adler, I. and Monteiro, D. D .C. (1992), A geometric view of parametric linear programming, *Algorithmica*, **8**, 161-176.

Andersen, E.D., Gondzio, J., Meszaros, C. and Xu, Xiaojie (1996), Implementation of interior point methods for large scale linear programming, Technical Report, Logilab, HEC Geneva, Section of Management Studies, University of Geneva.

Kim, W-J., Park, C-K., and Park, S. (1999), An $\varepsilon$-sensitivity analysis in the primal-dual interior point method," *European Journal of Operational Research*, **116**, 629-639.

Kojima, M., Megiddo, N. and Mizuno, S. (1993), A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming, *Mathematical Programming*, **61**, 261-280.

Mehrotra, S. (1992), On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization*, **2**, 575-601.

Mehrotra, S. and Ye, Y. (1993), Finding an interior point in the optimal face of linear programs, *Mathematical Programming*, **62**, 497-515.

Park, S. (1992), *Linear Programming* 3rd Ed., Minyoungsa, Seoul, Korea.

Park, S., Kim, W-J., Seol, T., Park, C., Seong, M. and Lim, S. (2001), *Advanced Linear Programming*, Kyowoosa, Seoul, Korea.

Park, S., Kim, W-J., Seol, T., Seong, M. and Park, C. (2000), LPABO: a program for interior point methods for linear programming, *Asis-Pacific Journal of Operational Research*, **17**, 81-100.

Yang, B. H. and Park, S. (1994), Sensitivity analysis on the cost coefficients for the Karmarkar's algorithm in linear programming, Proceedings of APORS 94, Hukuoka, Japan.

Zhang, Y. (1994), On the convergence of a class of infeasible-interior-point methods for the horizontal linear complementarity problem, *SIAM Journal on Optimization*, **4**, 208-227.