비대칭 단면을 갖는 박벽곡선보의 자유진동에 관한 수치적 및 해석적 연구

Analytical and Numerical Study on Spatially Coupled Free Vibration of Nonsymmetric Thin-Walled Curved Girders

김 남 일[1] · 김 문 영[2]
Kim, Nam Il Kim, Moon Young

요 약 : 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행할 수 있는 엄밀해 및 유한요소 이론를 제시한다. 단순지지된 일축대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 면내 자유진동 모드에 대응하는 엄밀해를 산정하였으며, 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소의 변위벡터에 대하여 축방향 신장조건에서는 3차 그리고 비신장조건에서는 5차의 Hermitian 다항식으로 나타내고, 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강성행렬과 질량행렬을 유도한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 곡선보요소를 이용한 유한요소 해석결과를 ABAQUS 쉘요소를 이용하여 얻어진 결과와 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다. 특히 곡선보의 축방향 비신장조건과 두께-곡률효과가 동적거동에 미치는 영향을 조사한다.

ABSTRACT : This study presented analytical and numerical solutions for spatial free vibration of nonsymmetric thin-walled circular curved beams. The closed-form solutions were obtained for in-plane free vibration analysis of monosymmetric curved beams. Likewise, two types of thin-walled curved beam elements were developed using the third and the fifth order Hermitian polynomials. In order to illustrate the accuracy and usefulness of the present method, this study presented analytical and numerical solutions and compared these with the results using the ABAQUS's shell elements. In particular, effects of the thickness-curvature as well as the inextensional condition were investigated on the free vibration of curved beams with nonsymmetric sections.

핵 심 용 어 : 비대칭 박벽단면, 곡선보, 자유진동
KEYWORDS : nonsymmetric thin-walled, curved beam, free vibration

1. 서 론

I형 단면, 앵글 또는 channel 단면과 같은 박벽단면을 갖는 구조부재는 외력에 대하여 최소의 자중을 갖는 경제적인 구조이다. 일반적으로 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틂모멘트를 항상 받기 때문에 휨과 비틂의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽단면을 갖는 부재를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 동적 거동특성을 정확히 파악할 수 있어야 하며 현재까지 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다.

곡선보요소에 관한 지금까지의 연구로서는 장승필 등[1]은 일축대칭 박벽단면을 갖는 경우에 대하여 곡선보의 면외 자유진동에 대한 엄밀해를 제시하고 곡선보요소와 직선보요소를 이용하여 자유진동해석을 수행한 바 있으며, 민병철 등[2]은 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 해석을 수행하기 위한 유한요소법을 개발하였다.

또한 오상진 등[3]은 전단변형 및 회전관성 그리고 축방향 신장조건등을 고려한 변곡률 아치의 면내 자유진동해석을 수행하였으며, 이외에도 최근까지 곡선보의 면내 자유진동해석에 관한 상당수의 연구결과[4],[5]들이 보고되고 있다.

한편으로 곡선보의 면외 자유진동에 관한 연구[6],[7]들이 수행되어 왔으며, 면내 및 면외 자유진동을 함께 연구한 경우

1) 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정
2) 성균관대학교 토목환경공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2002년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

[8],[9]도 있다. 그러나 이들 대부분의 연구들은 박벽보의 면내 및 면외 진동해석을 대칭단면에 제한을 두고 있다.

Gendy 와 Saleeb[10]는 전단변형 및 회전관성효과를 고려하여 비대칭 단면을 갖는 곡선보의 3차원 자유진동해석을 위한 유한요소모델을 개발하였으나, 자유진동해석시 곡선보의 두께-곡률효과(thickness-curvature effect)를 정확히 고려하지 못한 단점을 가지고 있다. 결과적으로 아직까지 곡선보의 자유진동해석에 대하여 두께-곡률효과를 정확히 고려한 박벽 곡선보요소의 개발 및 두께-곡률효과의 동적거동에 대한 영향에 관한 연구는 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다.

본 연구에서는 이전의 연구[11],[12]를 확장하여 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 3차원 동적 거동특성을 파악할 수 있는 정확한 해석이론을 전개하기 위하여 일축대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 면내 자유진동에 대한 엄밀해를 정확히 유도하고, 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소의 변위벡터에 대하여 축방향 신장조건에서는 3차 그리고 축방향 비신장조건에서는 5차의 Hermitian 다항식으로 나타내고, 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강성행렬과 질량행렬을 유도한다. 마지막으로 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 곡선보요소를 이용한 유한요소결과를 ABAQUS 의 쉘요소[13]를 사용한 결과와 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다. 특히 비신장조건과 두께-곡률효과가 곡선보의 동적거동에 미치는 영향을 조사한다.

2. 비대칭 박벽단면을 갖는 원형곡선보의 총포텐셜에너지

그림 1은 부재좌표계 (x_1 , x_2 , x_3)에 대하여 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대요소의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것으로 U_x, U_y, U_z 와 ω_1, ω_2, ω_3는 각각 x_1, x_2 및 x_3축에 대한 강체 이동변위와 강체 회전변위이며, f는 x_1축에 대한 비틂각의 변화를 나타내는 뒴 파라미터이다.

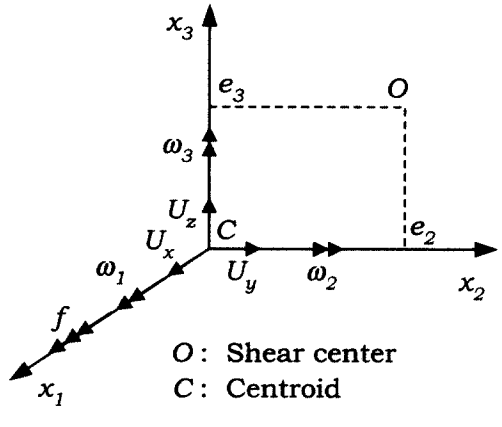


그림 1. 박벽 공간뼈대요소의 변위장

비대칭 박벽 곡선보의 자유진동 해석방법을 제시하기 위해서, 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = U - T \tag{1}$$

여기서

$$U = \frac{1}{2}\int_L\int_A\left[Ee_{11}^2 + 4Ge_{12}^2 + 4Ge_{13}^2\right]\frac{R+x_3}{R}\,dA\,dx_1 \tag{2a}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_L\int_A\left[U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2\right]\frac{R+x_3}{R}\,dA\,dx_1 \tag{2b}$$

본 연구에서는 곡선보 요소의 3차원 자유진동거동에 대하여 요소 축방향 비신장조건과 두께-곡률효과(thickness-curvature effect)의 영향을 조사하기 위하여 다음과 같은 세가지 경우를 생각한다.

i) *CASE1*: 축방향 신장과 두께-곡률효과를 고려할 경우

곡선보 요소의 동적거동에서 두께-곡률효과를 정확히 고려하기 위하여 식(2)에 다음과 같은 근사식을 도입한다.

$$\frac{R}{R+x_3} \cong 1 - \frac{x_3}{R} + \frac{x_3^2}{R^2} \tag{3}$$

변형도식을 탄성변형에너지 식(2a)에 대입하고 식(3)의 관계를 적용하여 단면적에 대하여 적분하면 다음과 같은 비대칭단면을 갖는 박벽곡선보의 탄성변형에너지 및 운동에너지를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}U^{case1} = \frac{1}{2}\int_0^L\Bigg[&EA\left(U_x' + \frac{U_z}{R}\right)^2 + E\hat{I}_2\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right)^2 \\ &+ E\hat{I}_3\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)^2 + E\hat{I}_\phi\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right)^2 \\ &+ GJ\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)^2 + 2E\hat{I}_{\phi 2}\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right)\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right) \\ &+ 2E\hat{I}_{\phi 3}\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right) \\ &+ 2E\hat{I}_{23}\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right)\Bigg]dx_1\end{aligned} \tag{4}$$

그리고

$$T^{case1} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_0^L [A(U_x^2+U_y^2+U_z^2)+\tilde{I}_o\theta^2 + \underline{\tilde{I}_2\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2} - 2\frac{I_2}{R}U_y\theta - 2\frac{I_2}{R}U_x\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right) + \underline{\tilde{I}_3U_y'^2+\tilde{I}_\phi\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2} + 2\tilde{I}_{\phi 3}U_y'\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) + 2\tilde{I}_{\phi 2}\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) - 2\frac{I_{\phi 2}}{R}U_x\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) + 2\frac{I_{223}}{R}U_y'\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right) + 2I_{23}\left(U_y'U_z' - \frac{2}{R}U_xU_y' + \frac{1}{R}U_z\theta\right)]dx_1 \quad (5)$$

여기서

$$\hat{I}_2 = I_2 - \frac{I_{222}}{R},\ \hat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R},\ \hat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R},$$
$$\hat{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} - \frac{I_{\phi 22}}{R},\ \hat{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R},\ \hat{I}_{23} = I_{23} - \frac{I_{223}}{R},$$
$$\tilde{I}_2 = I_2 + \frac{I_{222}}{R},\ \tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R},\ \tilde{I}_\phi = I_\phi + \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}, \quad (6)$$
$$I_o = I_2 + I_3,\ \tilde{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} + \frac{I_{\phi 22}}{R},\ \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 23}}{R},$$
$$\tilde{I}_o = I_o + \frac{I_{222}+I_{233}}{R}$$

식(5), (9), (12) 그리고 (13)에서 밑줄친 항은 회전관성항을 나타내며 식(6)의 단면상수의 구체적인 계산과정은 문헌[2]에 제시되어 있다.

ii) *CASE2*: 축방향 비신장과 두께-곡률효과를 고려할 경우

곡선보의 동적거동에 축방향 비신장조건을 고려하기 위하여 다음과 같은 운동학적 구속조건을 생각한다.

$$U_x' + \frac{U_z}{R} = 0 \quad (7)$$

$$U^{case2} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[E\hat{I}_2\left(RU_x''' + \frac{U_x'}{R}\right)^2 + E\hat{I}_3\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)^2 + E\hat{I}_\phi\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right)^2 + GJ\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)^2 - 2E\hat{I}_{\phi 2}\left(RU_x''' + \frac{U_x'}{R}\right)\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right) + 2E\hat{I}_{\phi 3}\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\right) - 2E\hat{I}_{23}\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(RU_x''' + \frac{U_x'}{R}\right)\right]dx_1 \quad (8)$$

그리고

$$T^{case2} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_0^L [A(U_x^2+U_y^2+R^2U_x'^2)+\tilde{I}_o\theta^2 + \underline{\tilde{I}_2\left(RU_x''+\frac{U_x}{R}\right)^2} - 2\frac{I_2}{R}U_y\theta + 2\frac{I_2}{R}U_x\cdot\left(RU_x''+\frac{U_x}{R}\right) + \underline{\tilde{I}_3U_y'^2+\tilde{I}_\phi\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2} + 2\tilde{I}_{\phi 3}U_y'\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) - 2\tilde{I}_{\phi 2}\left(RU_x''+\frac{U_x}{R}\right)\cdot\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) - 2\frac{I_{\phi 2}}{R}U_x\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) - 2\frac{I_{223}}{R}U_y'\cdot\left(RU_x''+\frac{U_x}{R}\right) - 2I_{23}\left(RU_x''U_y' + \frac{2}{R}U_xU_y' + U_x'\theta\right)]dx_1 \quad (9)$$

식(7)을 이용하여 곡선보의 탄성에너지식(4)과 운동에너지식(5)에서 U_z을 소거하면 식(8)과 (9)와 같다.

iii) *CASE3*: 축방향 신장을 고려하고 두께-곡률효과를 무시할 경우

본 경우에는 두께-곡률효과를 무시할 경우에 대하여 식(2)에 다음과 같은 근사식이 적용된다.

$$\frac{R}{R+x_3} \cong 1 \quad (10)$$

결과적으로 식(10)을 적용하여 식(2)를 단면적에 대하여 적분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$U^{case3} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EA\left(U_x' + \frac{U_z}{R}\right)^2 + EI_2\left(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\right)^2 + EI_3\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)^2 + EI_\phi\left(\theta' + \frac{U_y''}{R}\right)^2 + GJ\cdot\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)^2 + 2EI_{\phi 2}\left(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\right)\left(\theta' + \frac{U_y''}{R}\right) + 2EI_{\phi 3}\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(\theta' + \frac{U_y''}{R}\right) + 2EI_{23}\cdot\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right)\left(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\right)\right]dx_1 \quad (11)$$

그리고

$$T^{case3} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\int_0^L [A(U_x^2+U_y^2+U_z^2)+I_o\theta^2 + \underline{I_2\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2 + I_3U_y'^2 + I_\phi\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2} + 2I_{\phi 3}U_y'\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) + 2I_{\phi 2}\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\cdot\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right) + 2I_{23}U_y'\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)]dx_1 \quad (12)$$

3. 일축대칭단면을 박벽 곡선보의 자유진동해석에 대한 엄밀해

3.1 면내 자유진동해석

단순지지되고 x_3 축에 대하여 대칭단면을 갖는 박벽곡선보의 자유진동모드는 면내와 면외거동이 서로 연계되지 않는다. 본 장에서는 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동에 대하여 2장에 제시한 세가지 경우에 대하여 엄밀해를 유도한다.

일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 자유진동해석을 위하여 2장에서 제시한 총포텐셜에너지식은 *CASE1*, *CASE2*, *CASE3*에 대하여 각각 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\Pi_{in}^{case1} = \frac{1}{2}\int_o^L \left[EA\left(U_x' + \frac{U_z}{R}\right)^2 + E\hat{I}_2\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right)^2 - \rho\omega^2\left\{A(U_x^2+U_z^2) + \underline{\tilde{I}_2\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)^2} - 2\frac{I_2}{R}U_x\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)\right\}\right] dx \tag{13a}$$

$$\Pi_{in}^{case2} = \frac{1}{2}\int_o^L \left[E\hat{I}_2\left(RU_x''' + \frac{U_x'}{R}\right)^2 - \rho\omega^2\{A(U_x^2 + R^2U_x'^2) + \underline{\tilde{I}_2\left(RU_x'' + \frac{U_x}{R}\right)^2} + 2\frac{I_2}{R}U_x\left(RU_x'' + \frac{U_x}{R}\right)\right\}\right] dx \tag{13b}$$

$$\Pi_{in}^{case3} = \frac{1}{2}\int_o^L \left[EA\left(U_x' + \frac{U_z}{R}\right)^2 + EI_2\left(U_z'' - \frac{U_x'}{R^2}\right)^2 - \rho\omega^2\left\{A(U_x^2+U_z^2) + \underline{I_2\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)^2}\right\}\right] dx \tag{13c}$$

이제, 면내 자유진동해석을 위한 엄밀해 유도과정을 설명하기로 한다. 축방향 신장과 두께-곡률효과를 고려한 경우(*CASE1*)의 포텐셜에너지식(13a)에 대하여 변분을 취하면, 다음과 같은 두 개의 상미분방정식과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$EAU_x'' + \rho\omega^2\left(A + \frac{\tilde{I}_2}{R^2} + 2\frac{I_2}{R^2}\right)U_x + \left(\frac{EA}{R} - \rho\omega^2\frac{\tilde{I}_2}{R} - \rho\omega^2\frac{I_2}{R}\right)U_z' = 0 \tag{14}$$

$$E\hat{I}_2 U_z^{IV} + \left(2\frac{E\hat{I}_2}{R^2} + \rho\omega^2\tilde{I}_2\right)U_z'' + \left(\frac{EA}{R^2} + \frac{E\hat{I}_2}{R^4} - \rho\omega^2 A\right)U_z + \left(\frac{EA}{R} - \rho\omega^2\frac{\tilde{I}_2}{R} - \rho\omega^2\frac{I_2}{R}\right)U_x' = 0 \tag{15}$$

그리고

$$EA\left(U_x' + \frac{U_z}{R}\right) + \frac{E\hat{I}_2}{R}\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right) = 0 \text{ or } \delta U_x = 0 \text{ at } x_1 = 0, L \tag{16a}$$

$$E\hat{I}_2\left(U_z''' + \frac{U_z'}{R^2}\right) + \rho\omega^2\tilde{I}_2\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) - \rho\omega^2 I_2\frac{U_x}{R} = 0 \text{ or } \delta U_z = 0 \text{ at } x_1 = 0, L \tag{16b}$$

$$-E\hat{I}_2\left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2}\right) = 0 \text{ or } \delta\left(-U_z' + \frac{U_x}{R}\right) = 0 \text{ at } x_1 = 0, L \tag{16c}$$

식(14), (15)에서 U_z 를 소거하면 다음과 같은 6차의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$U_x^{VI} + a_1 U_x^{IV} + a_2 U_x'' + a_3 U_x = 0 \tag{17}$$

여기서

$$a_1 = \frac{1}{EA\hat{I}_2}\left\{\rho\omega^2\hat{I}_2\left(A + \frac{\tilde{I}_2}{R^2} + 2\frac{I_2}{R^2}\right) + A\left(2\frac{E\hat{I}_2}{R^2} + \rho\omega^2\tilde{I}_2\right)\right\} \tag{18a}$$

$$a_2 = \frac{1}{E^2A\hat{I}_2}\left\{\rho\omega^2\hat{I}_2\left(A + \frac{\tilde{I}_2}{R^2} + 2\frac{I_2}{R^2}\right)\cdot\left(2\frac{E\hat{I}_2}{R^2} + \rho\omega^2\tilde{I}_2\right) - \frac{\{EA - \rho\omega^2(\tilde{I}_2 + I_2)\}^2}{R^2} + \frac{EA(EAR^2 + E\hat{I}_2 - \rho\omega^2AR^4)}{R^4}\right\} \tag{18b}$$

$$a_3 = \frac{\rho\omega^2(EAR^2 + E\hat{I}_2 - \rho\omega^2A)}{R^4E^2A\hat{I}_2}\cdot\left(A + \frac{\tilde{I}_2}{R^2} + 2\frac{I_2}{R^2}\right) \tag{18c}$$

미분방정식(17)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$U_x = \sum_{i=1}^{6} b_i e^{\psi_i x_1} \tag{19}$$

여기서 ψ_i 는 특성방정식(20)의 근이다.

$$\psi^6 + a_1 \psi^4 + a_2 \psi^2 + a_3 = 0 \tag{20}$$

특성방정식(20)의 해를 구하기 위하여 $\psi^2 = S$ 로 치환하면 식(20)은 S에 대한 3차 방정식으로 표시되며 결과적으로 미분방정식(20)의 해를 쉽게 구할 수 있다.

추가적으로 x_3축 변위 U_z 는 U_x의 값을 식(14), (15)에 대입하고 적분하면 쉽게 구할 수 있다. 한편 양단이 단순지지된 곡선보인 경우, 경계조건은 다음과 같다.

$$U_x = U_z = U_z'' = 0 \quad \text{at } x_1 = 0,\ L \tag{21}$$

이제 6개의 단순지지된 보의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 제차방정식을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{K(\omega)\, c} = \boldsymbol{0} \tag{22a}$$

여기서

$$\boldsymbol{c} = \langle c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6 \rangle^T \tag{22b}$$

마지막으로 단순지지된 박벽 곡선보의 고유진동수는 강성행렬의 행렬식이 영이 되는 조건으로 산정할 수 있다.

$$det\,|\,\boldsymbol{K(\omega)}\,| = 0 \tag{23}$$

또한 *CASE2* 와 *CASE3* 를 고려한 면내 자유진동에서의 고유진동수는 위와 유사한 과정을 통하여 산정할 수 있다.

3.2 면외 자유진동해석

단순지지된 일축대칭단면을 갖는 박벽곡선보의 면외 자유진동에 대한 엄밀해를 산정하기 위하여 식(4)와 (5)에서 횡방향 변위 U_y와 회전각 θ에 대한 항에 대하여 포텐셜에너지를 산정하며 구체적인 계산과정은 문헌[1]을 참조한다.

4. 유한요소 정식화

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 3차원 자유진동해석을 수행하기 위하여 본 연구에서는 축방향 신장을 고려한 곡선보 요소에는 3차의 Hermitian 다항식을 사용하고 축방향 비신장을 고려한 요소에서는 5차의 Hermitian 다항식을 사용한 3차원 곡선보 요소를 제시한다.

4.1 축방향 신장을 고려한 곡선보 요소

요소의 축방향 신장을 고려한 박벽 곡선보의 자유진동해석을 위한 유한요소해를 구하기 위해서는 일반화된 좌표들을 재단변위벡터로 나타내기 위하여 요소의 거동을 정확히 나타낼 수 있는 형상함수를 선택하여야 한다. 본 논문에서는 요소당 2절점을 갖는 3차의 Hermitian 다항식을 사용하며 구체적인 계산과정에 대하여는 문헌[2]에 나와있다.

4.2 축방향 비신장을 고려한 곡선보 요소

본 절에서는 요소의 축방향 비신장을 고려한 곡선보 요소를 새로이 제시한다. 그림 2는 축방향 비신장을 고려한 박벽곡선보 요소의 재단변위벡터를 나타낸다. 비신장조건을 고려한 곡선보의 3차원 자유진동해석을 위한 포텐셜에너지식(8)을 보면, 축방향 변위성분 U_x이 3계 도함수형태로 표시되므로 요소의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 5차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여야 한다. 결과적으로 그림 2를 참조하여 위의 사항을 고려하면 축방향 비신장을 고려한 박벽곡선보 요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다.

$$U_x = H_1 u^p + H_2\left(-\frac{w^p}{R}\right) + H_3\left(-\frac{\omega_2^p}{R}\right) + H_4 u^q + H_5\left(-\frac{w^q}{R}\right) + H_6\left(-\frac{\omega_2^q}{R}\right) \tag{24a}$$

$$U_y = h_1 v^p + h_2 \omega_3^p + h_3 v^q + h_4 \omega_3^q \tag{24b}$$

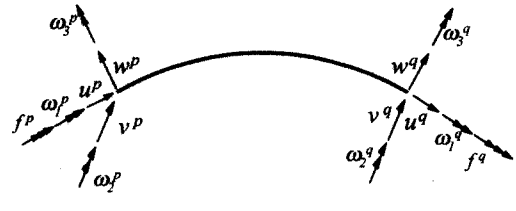


그림 2. 축방향 비신장을 고려한 박벽 곡선보 요소의 재단변위벡터

$$U_z = -RU_x' \tag{24c}$$

$$\theta = h_1\omega_1^p - h_2 f^p + h_3\omega_1^q - h_4 f^q \tag{24d}$$

여기서

$$u^p = U_x(0),\ v^p = U_y(0),\ w^p = -RU_x'(0),$$
$$\omega_1^p = \theta(0),\ \omega_2^p = RU_x''(0),\ \omega_3^p = U_y'(0),$$
$$f^p = -\theta'(0) \tag{25}$$

H_i , h_i는 5차 및 3차 Hermitian 다항식을 나타내며 다음과 같다.

$$H_1 = -6\xi^5 + 15\xi^4 - 10\xi^3 + 1,$$
$$H_2 = (-3\xi^5 + 8\xi^4 - 6\xi^3 + \xi)L$$
$$H_3 = (-0.5\xi^5 + 1.5\xi^4 - 1.5\xi^3 + 0.5\xi^2)L^2$$
$$H_4 = 6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3$$
$$H_5 = (-3\xi^5 + 7\xi^4 - 4\xi^3)L$$
$$H_6 = (0.5\xi^5 - \xi^4 + 0.5\xi^3)L^2$$
$$h_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1,\ h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L$$
$$h_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2,\ h_4 = (\xi^3 - \xi^2)L$$
여기서, $\xi = x_1/L$ (26)

현재까지의 이론을 고려하여 식(24)를 식(8)과 (9)에 대입하여 적분을 행하면 행렬식으로 표현된 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 얻을 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}_e^T(\boldsymbol{K}_e - \omega^2\boldsymbol{M}_e)\boldsymbol{U}_e \tag{27}$$

여기서

$$\boldsymbol{U}_e = \langle\ u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p,\ u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q\ \rangle \tag{28}$$

식(27)에서 $\boldsymbol{K}_e$ 와 $\boldsymbol{M}_e$는 14×14 요소 강성행렬 및 질량행렬을 나타내며, $\boldsymbol{U}_e$는 요소 절점변위벡터를 나타낸다. 본 연구에서 요소 강성행렬과 질량행렬은 가우스적분을 사용하여 산정한다. 또한 곡률효과를 포함한 회전변위성분은 다음과 같이 정의된다.

$$\widehat{\omega_2^p} = RU_x''(0) + \frac{U_x(0)}{R} = Rx_2^p + \frac{u^p}{R} \tag{29}$$

전체강성행렬에 대응하는 요소강성행렬을 산정하기 위하여 곡률효과가 고려된 변환행렬이 필요하며, 전체 변위파라미터와 요소 변위파라미터에 대한 변환관계는 변환행렬을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{U}_a = \boldsymbol{T}_1\widehat{\boldsymbol{U}}_a \quad ,\ a = p, q \tag{30}$$

여기서

$$\boldsymbol{U}_a{}^T = \{u^a\ v^a\ w^a\ \omega_1^a\ \omega_2^a\ \omega_3^a\ f^a\}$$
$$\widehat{\boldsymbol{U}}_a{}^T = \{u^a\ v^a\ w^a\ \omega_1^a\ \widehat{\omega_2^a}\ \omega_3^a\ \widehat{f^a}\} \tag{31}$$

그리고

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1/R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/R^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/R & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/R & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

변환행렬(32)를 이용하여 박벽 곡선보 요소의 총포텐셜에너지식(27)을 다음과 같은 고유치 문제로 변환시킬 수 있다.

$$\widehat{\boldsymbol{K}_e}\,\widehat{\boldsymbol{U}_e} = \omega^2\,\widehat{\boldsymbol{M}_e}\,\widehat{\boldsymbol{U}_e} \tag{33}$$

여기서

$$\widehat{\boldsymbol{U}_e} = \langle\ u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \widehat{\omega_2^p}, \omega_3^p, \widehat{f^p},\ u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \widehat{\omega_2^q}, \omega_3^q, \widehat{f^q}\ \rangle \tag{34}$$

그리고 식(33)의 강성행렬과 변위벡터는 다음과 같이 계산되어진다.

$$\widehat{\boldsymbol{K}_e} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}\ ,\quad \boldsymbol{U}_e = \boldsymbol{T}\,\widehat{\boldsymbol{U}_e} \tag{35}$$

여기서

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & \cdot \\ \cdot & T_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

결과적으로, 직접강성도법에 의하여 자유진동해석을 위한 전체 구조물에 대한 평형방정식은 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{K_E}\,\boldsymbol{U} = \omega^2\,\boldsymbol{M_E}\,\boldsymbol{U} \tag{37}$$

여기서 $\boldsymbol{K_E}$, $\boldsymbol{M_E}$ 는 전체 구조물에 대응하는 탄성강성 및 질량행렬을 나타내며 이 식으로부터 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 고유진동수를 계산할 수 있다.

5. 수치해석

본 장에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 자유진동거동에 대하여 곡선보의 두께-곡률효과(thickness-curvature effect) 와 축방향 비신장효과가 어떠한 영향을 끼치는지 분석하기 위하여, 2가지의 수치해석 예제를 선택하였다. 각각의 예제에 대하여 2장에서 기술한 세 가지 경우 즉, *CASE1*, *CASE2* 및 *CASE3* 의 각각의 경우에 대하여 자유진동해석을 수행하고, 계산된 결과를 ABAQUS 쉘요소와 비교, 검토하므로써 본 연구에서 제시한 이론 및 개발된 프로그램의 타당성을 입증한다.

5.1 일축대칭 단면을 갖는 곡선보

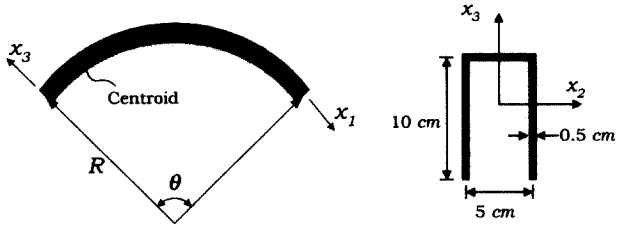
그림 3은 x_3 축에 대하여 일축대칭 단면을 갖는 단순지지된 곡선보의 형상과 단면을 보여주고 있다. 도심에서 정의된 단면상수와 재료특성은 다음과 같다.

$A = 12.5\ cm^2$, $E = 73000\ kg/cm^2$, $G = 28000\ kg/cm^2$

$J = 1.0417\ cm^4$, $\rho = 0.00785\ kg/cm^3$, $I_2 = 133.3854\ cm^4$

$I_3 = 67.9167\ cm^4$, $I_{222} = -100.0\ cm^5$, $I_{233} = -41.6667\ cm^5$

$I_\phi = 5682.1302\ cm^6$, $I_{\phi 3} = -585.1282\ cm^5$



(a) 단순지지된 곡선보의 형상 (b) 일축대칭 채널 단면

그림 3. 일축대칭 단면을 갖는 곡선보의 형상

$I_{\phi 23} = -282.0513\ cm^6$, $I_{\phi\phi 2} = 7465.7298\ cm^7$

$L = 100\ cm$ and $400\ cm$

본 예제에서 보부재는 20개의 곡선보 요소로 모델링되었으며, 해석시 보의 길이는 일정하게 유지시키고 내각을 증가시켜 가면서 고유진동수를 산정한다. 이 경우 내각이 증가함에 따라 곡선보의 곡률반경은 감소한다.

표 1에서는 곡선보의 길이 $L = 100\ cm$ 그리고 $400\ cm$ 에 대하여 내각의 크기를 변화시켜가면서 면내자유진동해석을 수행한 결과, 본 연구에서 유도한 엄밀해와 유한요소해를 다섯 개의 모드(N)까지 제시하였다.

표에서도 볼수 있듯이 본 연구에서 유도한 곡선보의 면내자유진동해석에 대한 엄밀해가 유한요소해와 일치함을 알 수 있다. 또한 내각의 크기가 증가함에 따라 두께-곡률효과를 고려한 *CASE1* 과 이를 무시한 *CASE3*의 고유진동수값의 차이가 증가한다. 그리고 내각의 크기가 동일할 때, 곡선보의 두께-곡률효과의 영향은 곡선보의 길이가 증가함에 따라 감소한다. 면내 자유진동해석시 곡선보의 길이가 작을 경우 요소의 축방향 비신장을 고려한 *CASE2*의 결과에서는 상당한 오차가 발생함을 알 수 있다.

결과적으로 곡선보의 면내자유진동해석에서 두께-곡률효과를 고려하고, 요소의 축방향 신장을 고려한 곡선보이론 (*CASE1*)이 보다 정확한 결과를 나타내는 것으로 사료된다.

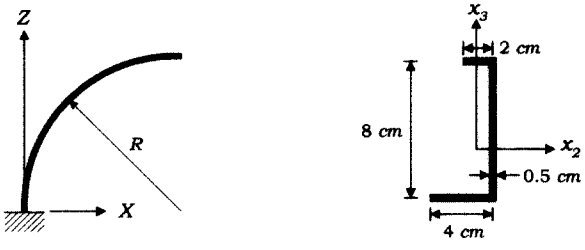
표 1. 일축대칭 단면을 갖는 보요소의 면내 고유진동수 ω^2

L	Θ	N	Analytic solution			Finite Element Method		
			CASE			*CASE*		
			1	2	3	1	2	3
100	30	1	294.30	1442.2	297.96	294.30	1442.2	297.96
		2	1437.4	6452.5	1427.5	1437.4	6452.5	1427.5
		3	7131.4	21126.	7092.9	7131.9	21126.	7093.4
		4	9350.1	46576.	9370.1	9350.1	46576.	9370.1
		5	21217.	91074.	21108.	21221.	91074.	21112.
	90	1	1105.1	1127.0	1071.3	1105.1	1127.0	1071.3
		2	1800.3	5989.3	1810.2	1800.4	5989.3	1810.2
		3	6890.8	20218.	6770.0	6891.3	20218.	6770.0
		4	10586.	45950.	10691.	10586.	45950.	10691.
		5	21038.	90352.	20705.	21043.	90353.	20709.
400	30	1	5.8260	5.8272	5.8194	5.8261	5.8272	5.8195
		2	12.256	27.107	12.257	12.256	27.107	12.258
		3	32.501	94.938	32.498	32.503	94.938	32.500
		4	94.879	223.60	94.768	94.899	223.60	94.788
		5	232.02	476.73	231.78	232.14	476.73	231.90
	90	1	4.4706	4.4759	4.4522	4.4707	4.4759	4.4523
		2	24.049	24.740	23.927	24.050	24.740	23.929
		3	88.832	89.180	88.447	88.852	89.180	88.467
		4	126.16	216.91	126.17	126.17	216.91	126.18
		5	235.29	464.50	234.79	235.40	464.50	234.90

5.2 비대칭 단면을 갖는 캔틸레버보와 양단 고정보

본 예제에서는 양단 경계조건이 고정-자유, 고정-고정된 비대칭 단면을 갖는 곡선보의 3차원 자유진동해석을 수행한다.

$L=200\,cm$, $E=30000\,kg/cm^2$, $G=11500\,kg/cm^2$, $\rho=0.00785\,kg/cm^3$ 인 단면에 대하여 그림 4는 비대칭 단면 곡선 캔틸레버보의 형상을 보여주고 있다. 이 경우 곡선보는 20개의 곡선보요소로 모델링되었다.



(a) 곡선 캔틸레버보의 형상 (b) 비대칭 채널 단면

그림 4. 비대칭 단면을 갖는 곡선 캔틸레버보의 형상

표 3에서는 길이 $L=200\,cm$ 캔틸레버보에 대하여 내각의 크기를 10° 에서 90° 까지 증가시켜 가면서 자유진동해석을 수행한 결과 10개 모드까지의 고유진동수를 산정하였으며, 곡선보를 300개의 ABAQUS 쉘요소로 모델링하여 얻어진 결과와 함께 제시하였다.

표 3에서도 볼 수 있듯이 *CASE1*에 의한 결과가 ABAQUS 쉘요소를 이용한 결과와 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 특히 곡선보의 두께-곡률효과는 내각의 크기가 증가할수록 커지며, 내각 $\Theta=90°$ 의 7번째 모드에서 최대 40.9% 의 차이를 나타내었다. 그러나 내각의 변화에 따라 요소의 축방향 비신장효과는 무시할 정도로 작았다.

반면, 표 4에서 볼 수 있듯이 양단이 고정된 곡선보에 대하여 자유진동해석을 수행한 결과 두께-곡률효과는 내각 $\Theta=90°$ 의 10번째 모드에서 최대 2.0% 의 차이를 나타내었으며, 캔틸레버보에 비하여 그리 크지 않았다. 그러나 요소의 축방향 신장을 고려한 *CASE1*과 이를 무시한 *CASE2* 에 의한 해석결과의 차이는 곡선보의 내각의 크기가 작을 경우 심하게 나타났으며, 내각의 크기가 증가할수록 감소하는 경향을 나타내었다.

6. 결 론

본 연구에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 원형 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 곡선보에 대한 엄밀해를 유도하였으며, 박벽곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관하여 요소의 축방향 신장을 고려한 곡선보에서는 3차 그리고 축방향 비신장조건에서는 5차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 이를 운동방정식에 대입하여 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성강성행렬 및 질량행렬을 산정하였으며 변환행렬을 이용하여 곡률변화를 고려하였다. 또한 자유진동거동

표 2. 비대칭단면을 갖는 곡선 캔틸레버보의 고유진동수 ω^2

		Vibration mode									
Θ	CASE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1373	7.7438	17.386	20.623	27.159	52.344
	2	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1376	7.7440	17.387	20.625	27.161	52.346
	3	0.0290	0.2726	0.6417	1.6072	5.1856	7.7975	17.396	20.679	27.288	52.499
	ABAQUS	0.0299	0.2670	0.5887	1.5265	5.0520	7.7433	16.925	20.575	26.645	52.892
30	1	0.0212	0.2815	0.3747	2.2666	5.0554	7.4328	19.493	20.511	28.177	49.067
	2	0.0212	0.2815	0.3747	2.2666	5.0576	7.4356	19.499	20.520	28.206	49.081
	3	0.0225	0.2825	0.5146	3.2566	5.0755	8.3196	19.695	20.662	29.243	49.820
	ABAQUS	0.0213	0.2791	0.3724	2.2487	5.0275	7.3378	19.518	19.935	27.449	49.227
60	1	0.0107	0.2480	0.3084	2.3788	5.8332	7.1242	18.221	28.219	31.322	44.828
	2	0.0107	0.2480	0.3084	2.3788	5.8502	7.1246	18.228	28.222	31.439	44.879
	3	0.0128	0.2666	0.4267	3.6090	5.8462	11.810	21.142	28.050	33.768	49.133
90	1	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2139	7.3646	17.473	32.844	37.949	47.721
	2	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2345	7.3687	17.476	33.022	37.951	47.823
	3	0.0072	0.2554	0.3499	3.0204	5.3567	11.999	29.567	32.644	40.216	59.173
	ABAQUS	0.0060	0.2043	0.2779	1.9714	5.0293	7.1815	17.079	32.233	36.624	43.574

표 3. 비대칭단면을 갖는 양단고정 곡선보의 고유진동수 ω^2

		Vibration mode									
Θ	CASE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	0.9488	4.4120	6.3262	17.732	18.778	21.295	49.634	59.534	99.775	119.58
	2	0.9493	6.3262	9.2795	18.779	20.772	49.633	56.592	99.571	119.60	147.68
	3	0.9499	4.4051	6.3430	17.747	18.732	21.362	49.847	59.341	100.24	119.61
	ABAQUS	0.9679	4.3543	6.4045	16.946	18.565	21.369	50.231	58.585	100.44	105.01
30	1	0.8338	5.3737	10.799	18.125	22.087	31.469	45.206	68.388	93.079	123.91
	2	0.8338	5.3737	13.512	18.437	22.090	45.206	62.435	92.940	124.05	158.82
	3	0.8359	5.4161	10.723	18.322	21.931	31.500	45.787	67.772	94.364	123.88
	ABAQUS	0.8479	5.4097	10.605	18.235	21.878	30.386	45.524	67.401	93.276	107.62
60	1	0.7753	4.4992	15.392	24.041	27.515	39.667	60.538	84.626	104.35	131.16
	2	0.7762	4.4992	15.398	25.143	27.539	39.667	71.000	84.752	131.60	155.73
	3	0.7759	4.5586	15.721	23.694	27.207	40.663	60.169	86.752	103.51	130.79
90	1	0.7223	3.9916	13.570	31.829	35.223	41.852	71.047	80.658	138.20	148.88
	2	0.7235	3.9916	13.584	31.917	35.222	42.313	73.552	83.604	138.38	149.59
	3	0.7216	4.0530	13.962	31.475	36.513	41.029	71.677	81.803	139.78	151.96
	ABAQUS	0.7020	3.9088	13.388	30.838	34.855	37.792	69.831	78.659	115.15	140.53

에서 곡선보의 두께-곡률효과(thickness-curvature effect) 및 요소의 축방향 비신장조건이 어떠한 영향을 끼치는지를 파악하였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 해석방법의 타당성을 증명하기 위하여 ABAQUS 쉘요소를 이용한 해석결과와 비교하였으며 결과적으로 3차원 자유진동해석결과 곡선보의 두께-곡률효과를 정확히 고려하고 축방향 신장을 고려한 곡선보 요소가 정확한 결과를 나타내는 것으로 판명되었다.

감사의 글

본 논문은 한국학술진흥재단 98년도 공모과제(과제번호: 1998-001-E01894)의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 장승필, 김문영, 민병철 1998 한국지진공학회 논문집, 제2 권 제2호, 57-68. 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형 곡선보 의 자유진동 해석.
2. 민병철, 김문영, 장승필 1999 한국지진공학회 논문집, 제3 권 제1호, 41-54. 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유 진동해석
3. S. J. Oh, B. K. Lee and I. W. Lee 1999 *Journal of Sound and Vibration* 219(1), 23-33. Natural frequencies of non-circular arches with rotatory inertia and shear deformation.
4. P. Raveendranath, Gajbir Singh and B. Pradhan 2000 *Computers & Structures* 78, 583-590. Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement field.
5. T. Tarnopolskaya and F. R. de Hoog 1999 *Journal of Sound and Vibration* 228(1), 69-90. Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams.
6. Marcelo T. Piovan, Victor H. Cortinez and Raul E. Rossi 2000 *Journal of Sound and Vibration* 237(1), 101-118. Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally curved thin-walled beams.
7. W. P. Howson and A. K. Jemah 1999 *Journal of Engineering Mechanics* 125(1), 19-25. Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams.
8. M. Kawakami, T. Sakiyama, H. Matsuda and C. Morita 1995 *Journal of Sound and Vibration* 187(3), 381-401. In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable sections.
9. K. Kang, C. W. Bert and A. G. Striz 1995 *Journal of Sound and Vibration* 181(2),353-360. Vibraion analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method.
10. A. S. Gendy and A. F. Saleeb 1994 *Journal of Sound and Vibration* 174(2), 261-274. Vibration analysis of coupled extensional/flexural/torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections.

11. M. Y. Kim, B. C. Min and M. W. Suh 2000 *Journal of Engineering Mechanics* 126(5), 497-505. Spatial stability of nonsymmetric thin-walled curved beams. I : Analytic approach.
12. M. Y. Kim, B. C. Min and M. W. Suh 2000 *Journal of Engineering Mechanics* 126(5), 506-514. Spatial stability of nonsymmetric thin-walled curved beams. I : Numerical approach.
13. *ABAQUS 1992 User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
14. S. B. Kim and M. Y. Kim 2000 *Engineering Structures* 22(5), 446-458. Improved Formulation for Spatial Stability and Free Vibration of Thin-Walled Tapered Beam and Space Frames.

(접수일자 : 2002년 3월 18일)