Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 28, No. 3, pp. 247-255, September 2002.

일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 분해속성에 대한 소고

채경철[1†] · 최대원[1] · 이호우[2]

[1]한국과학기술원 산업공학과/[2]성균관대학교 시스템경영공학부

A Note on the Decomposition Property for $M^X/G/1$ Queues with Generalized Vacations

Kyung-Chul Chae[1] · Dae-Won Choi[1] · Ho-Woo Lee[2]

[1] Department of Industrial Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, 305-701
[2] School of Systems Management Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon, 440-746

The objective of this paper is to clarify the decomposition property for $M^X/G/1$ queues with generalized vacations so that the decomposition property is better understood and becomes more applicable. As an example model, we use the $M^X/G/1$ queue with setup time. For this queue, we correct Choudhry's (2000) steady-state queue size PGF and derive the steady-state waiting time LST. We also present a meaningful interpretation for the decomposed steady-state waiting time LST.

Keywords: decomposition property, generalized vacation, bulk arrival queue, setup time

1. 서론

본 논문의 목적은 일반휴가(generalized vacation)형 $M^X/G/1$ 대기행렬에서 성립하는 분해속성(decomposition property)을 규명하는 것이다. 분해속성은 일반휴가형 $M/G/1$ 대기행렬에 대해서는 잘 알려져 있고(Fuhrmann & Cooper, 1985), 또한 널리 활용되고 있다(Lee, 1998). 반면에, 고객이 집단으로 도착하는 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬에 대한 분해속성(Shanthikumar, 1988)을 제대로 활용하는 문헌은 드물다. 또한 고객수 PGF(probability generating function)의 분해속성에 대한 해석은 명확한 반면에, 대기시간 LST(Laplace-Stieltjes transform)의 분해속성에 대한 명확한 해석은 (저자가 알기로는) 찾아보기 어렵다.

일반휴가형 대기행렬이란 고객이 존재함에도 불구하고 서버(server)가 어떤 이유로(정해진 규칙에 따라) 서비스를 제공하지 않는 기간이 존재하는 모든 대기행렬을 의미한다. 일반휴가형 $M/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF에 대한 분해속성은 다음과 같다. 안정상태(steady-state) 고객수의 PGF는 두 가지를 곱한 꼴인데, 하나는 휴가기간 중의 안정상태 고객수 PGF이고, 다른 하나는 휴가가 없는 $M/G/1$ 대기행렬의 안정상태 고객수 PGF이다. 후자는 이미 알려져 있으므로 전자만 구하면 되는데, 전자는 물론 특정 휴가규칙에 따라 달라진다.

일반휴가형 $M/G/1$ 대기행렬의 대기시간 LST의 분해속성에 대한 저자의 해석은 다음과 같다. 안정상태 대기시간의 LST는 두 가지를 곱한 꼴인데, 하나는 안정상태에서 휴가기간 중에 도착하는 고객이 보는 잔여 휴가기간의 LST이고, 다른 하나는 휴가가 없는 $M/G/1$ 대기행렬의 안정상태 대기시간 LST이다(이러한 해석에 대한 약식 증명은 부록 B에 있음). 그리고 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF와 대기시간 LST에 대한 분해속성은 일반휴가형 $M/G/1$ 대기행렬에 대한 분해속성을 근간으로 하고 이에 고객이 집단으로 도착한다는 점을 적절히 반영해서 얻는다(이후, '안정상태'라는 수식어를 생략함).

본 논문에서 예제로 사용하는 특정 휴가규칙은 준비기간(setup time)인데, 이는 바쁜기간(busy period)이 시작되기 전에

본 연구는 서울대학교 복잡계통계연구센터를 통한 한국과학재단의 지원에 의하여 수행되었음.
† 연락저자 : 채경철 교수, 305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 산업공학과, Fax : 042-869-3110, e-mail : kcchae@kaist.ac.kr
2001년 12월 접수, 1회 수정(1주 소요) 후, 2002년 6월 게재 확정.

준비작업을 하는 데 소요되는 시간이다. 본 논문을 발표하게 된 발단은 다음과 같다. 최근에 Choudhry (2000)가 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF를 발표했으나, 그 결과에 오류가 있으므로 이를 수정한다. 고객수 PGF에 대한 오류는 간단한 실수일 수도 있다. 그러나 오류가 있는 결과를 가지고서 분해속성이 성립함을 확인했다고 주장하는 것과 분해속성에 대해서 해석을 붙이는 것은 더욱 심각한 오류로 사료된다. 아울러, 본 논문에서는 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬의 대기시간 LST를 구하고, 이에 대한 분해속성을 논한다.

2절에서는 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬에 대한 정의와 가정을 설명하고, 3절과 4절에서는 각각 고객수 PGF와 대기시간 LST를 구한 다음, 이들 PGF와 LST에 대한 분해속성은 5절에서 다룬다. 그리고 6절에서는 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF와 대기시간 LST에 대한 분해속성을 논한다. 마지막으로, 7장에서는 결론 및 추후 연구과제를 논한다.

본 논문에서 5절까지 사용하는 예제는 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬이다. 그러나 6절에서 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬을 논할 때에는 복수휴가 또는 단수휴가와 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬 (Hur *et al*., 2002)을 예제로 활용한다.

2. 모형 설명 : 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$

준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 모형에 대한 정의 및 가정은 다음과 같다. 서버가 한 명인 시스템에 고객은 복합포아송과정 (compound Poisson process)으로 도착한다. 즉, 고객은 집단으로 도착하는데, 집단들의 도착과정은 도착률이 λ인 포아송과정이고, 집단들의 크기 X_1, X_2, $\cdots$ 는 $i.\ i.\ d.$ 확률변수이다. 그리고 도착한 고객은 한 명씩 서비스를 받는데, 서비스시간 S_1, S_2, $\cdots$는 $i.\ i.\ d.$ 확률변수이고 도착과정과 독립이다.

〈가정 1〉 어느 고객이든지 일단 서비스가 시작되면 끝날 때까지 도중에 중단하지 않는다 (non-preemptive). 그리고 고객들이 서비스받을 순서를 정하는 규칙은 고객들이 받아야 될 서비스시간의 크기와 무관하다.

서비스가 하나 끝났을 때 차례를 기다리고 있는 고객이 없으면 바쁜기간이 종료된다. 이후, 다시 바쁜기간이 시작될 때까지를 편의상 유휴기간(idle period)이라 부르자. 유휴기간은 서버가 서비스를 하지 않고 있는 기간으로서, 이는 집단이 하나 도착할 때까지의 기간과 집단이 하나 도착하는 즉시 시행하는 준비기간으로 구성된다.

유휴기간과 후속 바쁜기간을 합치면 하나의 재생주기 (regeneration cycle)가 된다. 그리고 재생주기마다 한 번씩 발생하는 준비기간들 Y_1, Y_2, $\cdots$ 는 $i.\ i.\ d.$ 확률변수이고, 이는 도착과정 및 서비스과정과 독립이다.

3. 고객수 PGF : 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$

준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 모형의 고객수 PGF를 구하는 가장 간단한 방법은 이탈 (departure)시점 EMC (embedded Markov chain)이다. N_n^d를 n번째 이탈 직후에서의 고객수라 하면 다음이 성립한다.

$$N_{n+1}^d=\begin{cases} N_n^d+A(S_{n+1})-1 & (N_n^d\geq 1 \text{ 경우}) \\ X+A(Y)+A(S_{n+1})-1 & (N_n^d=0 \text{ 경우}) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $A(S_{n+1})$은 'n+1' 번째로 이탈하는 고객의 서비스시간인 S_{n+1} 동안에 도착한 고객수이고, $A(Y)$는 준비기간 동안에 도착한 고객수이다. 식 (1)의 우변에서 '-1'은 이탈하는 고객 한 명을 빼는 것이고, 'X'는 재생주기 동안 처음으로 도착하는 집단의 크기이다. 그리고 안정상태에서의 이탈시점 고객수 PGF를 다음과 같이 정의하자.

$$\pi^d(z)=\lim_{n\to\infty}E\left(z^{N_n^d}\right) \tag{2}$$

식 (1)의 우변에서 유의할 점은 N_n^d, $A(S_{n+1})$, X, $A(Y)$가 모두 독립이라는 점인데, 이는 모형에 대한 가정과 포아송과정의 독립증분(independent increments) 속성에 기인한 것이다. 이점을 고려하여 식 (1)을 식 (2) 및 기타 PGF로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\pi^d(z) &= \{\pi^d(z)-\pi_0^d\}S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}z^{-1} \\ &\quad +\pi_0^d X(z)\,Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}z^{-1}\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 π_0^d는 안정상태에서 이탈시점 고객수가 0일 확률이고, $X(z)$는 집단 크기 X의 PGF이며, $S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$와 $Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$는 각각 S와 Y의 LST인 $S^*(\theta)$와 $Y^*(\theta)$에 'θ'대신 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 대입한 것으로서 각각 S와 Y 동안 도착한 고객수의 PGF가 된다.

식 (3)을 $\pi^d(z)$에 대해서 풀면 다음을 얻는다.

$$\pi^d(z)=\pi_0^d S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}\frac{1-X(z)\,Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}}{S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}-z} \tag{4}$$

그리고 확률의 합이 1이라는 관계식 '$\lim_{z\to 1}\pi^d(z)=1$'로부터 다음을 얻는다.

$$\pi_0^d=\frac{1-\lambda E(X)E(S)}{E(X)\{1+\lambda E(Y)\}} \tag{5}$$

[비고 1] 안정상태 확률의 존재조건은 '$\lambda E(X)E(S)<1$'이다(식 (20) 참조).

[비고 2] Choudhry (2000)의 틀린 결과는 식 (4)에서 '$X(z)Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$'를 '$zY^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$'로 표현한

것인데, 이는 식 (1)에서 'X' 대신 '1'을 사용한 결과와 같다. 참고로, Choudhry가 사용한 방법은 이탈시점 EMC가 아니라 부가변수법(supplementary variable technique) 이다(Hur *et al.*(2002)도 부가변수법을 사용했음).

[비고 3] 고객이 한 명씩 도착하는 $M/G/1$에 대한 결과는 식 (4)와 (5)에 '$X(z)=z$'와 '$E(X)=1$'을 대입하여 얻는다.

[비고 4] 준비기간이 없는 $M^X/G/1$의 경우에는 '$Y=0$'이므로 식 (4)와 (5)에 '$Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}=z^0=1$'과 '$E(Y)=0$'을 대입하여 얻는다.

이제, 이탈(직후)시점 고객수 PGF인 $\pi^d(z)$로부터 도착(직전)시점 고객수 PGF와 임의시점 고객수 PGF를 구하겠는데, 이때 유의할 점은 '이탈은 한 명씩 하지만 도착은 집단으로 한다'는 점이다. 집단의 도착시점 고객수 PGF를 $\pi_g^a(z)$라 하고 (비고 : a와 g는 각각 arrival 시점과 group을 의미함), 임의시점의 고객수 PGF를 $\pi(z)$라 하면, 집단들의 도착과정이 포아송과정이므로 PASTA 속성 (Wolff, 1982)에 의해서 다음이 성립한다.

$$\pi(z)=\pi_g^a(z) \tag{6}$$

다음, 집단 내의 임의고객의 관점에서 도착시점 고객수를 편의상 다음과 같이 정의한다. 예를 들어, 한 집단이 택시를 타고 도착하는 경우에, 택시에서 나중에 내리는 고객은 먼저 내린 고객을 이미 시스템에 도착해 있는 것으로 간주하기로 하자. 이렇게 정의하는 이유는 임의고객의 도착시점 고객수 PGF를 $\pi^a(z)$라 할 때 다음이 성립하기 때문이다.

$$\pi^a(z)=\pi^d(z) \tag{7}$$

마지막으로, $\pi^a(z)$와 $\pi_g^a(z)$의 관계는 다음과 같다.

$$\pi^a(z)=\pi_g^a(z)\,X_E(z) \tag{8}$$

여기서 $X_E(z)$는 임의고객과 같은 집단에 속하되 임의고객보다 먼저 도착한 (것으로 간주하는) 고객수의 PGF를 의미하며, $X(z)$와의 관계는 다음과 같다 (Lee 1998, p. 433).

$$X_E(z)=\{1-X(z)\}/E(X)(1-z) \tag{9}$$

식 (6), (7), (8)을 하나로 묶으면 다음과 같다.

$$\pi(z)=\pi_g^a(z)=\pi^a(z)/X_E(z)=\pi^d(z)/X_E(z) \tag{10}$$

안정상태의 평균고객수를 $E(N)$이라 하면, 이는 시간평균(time average)이므로 $\pi(z)$로부터 다음과 같이 얻는다.

$$E(N)=\lim_{z\to 1} d\pi(z)/dz$$

$$=\rho+\frac{\lambda E(X)\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)}+\frac{\lambda E(S)E(X^2-X)}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda E(X)\{2E(Y)+\lambda E(Y^2)\}}{2\{1+\lambda E(Y)\}} \tag{11}$$

여기서 ρ는 '$\lambda E(X)E(S)$'를 간단히 표현한 기호로서, 임의시점에 서버가 바쁠 확률을 의미한다(식 (20)과 [비고 1] 참조).

4. 선입선출 대기시간 LST : 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$

고객수 PGF는 <가정 1>에 속하는 모든 서비스 규칙에 대해서 동일하지만 대기시간 LST는 서비스 규칙에 따라서 달라진다. 대표적인 규칙인 선입선출 방법에 대해서 임의고객이 도착한 시점으로부터 서비스받을 차례가 될 때까지 기다리는 시간을 대기시간 W_q라 하고, 이의 LST를 $W_q^*(\theta)$라 하자. 반면에, 임의고객이 시스템에 체류하는 시간을 W라 하고, LST를 $W^*(\theta)$라 하면

$$W^*(\theta)=W_q^*(\theta)S^*(\theta) \tag{12}$$

가 성립하는데, 여기서 $S^*(\theta)$는 임의고객이 서비스받는 시간 S의 LST이며, 이때 S는 W_q와 독립임을 알 수 있다.

W_q는 서로 독립인 두 개의 확률변수의 합인데, 첫째는 임의고객이 속한 집단이 함께 차례를 기다리는 공통적인 대기시간이고, 둘째는 임의고객과 같은 집단에 속했으되 임의고객보다 먼저 서비스를 받을 고객수들의 총 서비스시간이다. 후자의 LST는 식 (9)의 $X_E(z)$에 z 대신 $S^*(\theta)$를 대입하면 바로 얻는다. 그리고 전자는 준비기간을 갖는 $M/G/1$ 모형에 대하여 알려진 결과에서(Lee, 1998, p. 457) $S^*(\theta)$를 $X\{S^*(\theta)\}$로 대체한 것인데, $X\{S^*(\theta)\}$는 X명분의 서비스시간의 LST를 의미한다.

[비고 5] 크기가 X인 집단을 한 명의 고객으로 간주하면, 이 고객의 서비스시간 LST는 X의 PGF인 $X(z)$에 z 대신 $S^*(\theta)$를 대입한 것이 된다. 이러한 고객을 슈퍼고객(super customer)이라 부른다.

따라서, $W_q^*(\theta)$는 다음과 같다.

$$W_q^*(\theta)=\left[\frac{1-\rho}{1+\lambda E(Y)}\,\frac{\lambda-(\lambda-\theta)Y^*(\theta)}{\theta-\lambda+\lambda X\{S^*(\theta)\}}\right]X_E\{S^*(\theta)\} \tag{13}$$

[비고 6] 슈퍼고객 ([비고 5] 참조)의 대기시간 LST는 $W_q^*(\theta)/X_E\{S^*(\theta)\}$이다.

<Little의 법칙>에 의하면 $E(N)=\lambda E(X)E(W)$이고, 식

(12)에 의하면 $E(W)=E(W_q)+E(S)$이므로, 이에 식 (11)을 대입하면

$$E(W_q)=\frac{\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)}+\frac{E(S)E(X^2-X)}{2(1-\rho)E(X)}+\frac{2E(Y)+\lambda E(Y^2)}{2\{1+\lambda E(Y)\}} \quad (14)$$

을 얻는데, 이는 식 (13)을 θ에 대해서 미분해서 얻은 결과와 일치한다.

5. 분해속성 : 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$

준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 모형의 고객수 PGF와 대기시간 LST의 분해속성을 알아본다.

식 (4)에 (5)를 대입하면 식이 길어지므로, 편의상 $\pi^d(z)$대신에 $\pi_q^d(z)$를 다음과 같이 정의해서 활용하자. $\pi^d(z)$는 임의고객이 서비스를 받고 나서 이탈할 때에 시스템에 남기는 고객수의 PGF인 반면에, $\pi_q^d(z)$는 임의고객의 차례가 되어 서비스를 받으러 가면서 대기장소에 남기는 고객수의 PGF라 하자. 그러면, $\pi^d(z)$와 $\pi_q^d(z)$의 관계는 다음과 같다.

$$\pi^d(z)=\pi_q^d(z)S^*\{\lambda-\lambda X(z)\} \quad (15)$$

식 (15)는 (12)에 대응하는 식으로서, 우변의 $S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$는 임의고객의 서비스시간 동안에 도착한 고객수의 PGF를 의미한다.

이와 같은 맥락으로, $\pi_q(z)$를 임의시점에 대기 중인 고객수의 PGF라 하고, $\pi_{g,q}^a(z)$와 $\pi_q^a(z)$를 각각 임의집단과 임의고객이 도착시에 관찰하는 대기 중인 고객수의 PGF라 하면, 식 (10)에 대응하는 관계로 다음을 얻는다.

$$\pi_q(z)=\pi_{g,q}^a(z)=\pi_q^a(z)/X_E(z)=\pi_q^d(z)/X_E(z) \quad (16)$$

[비고 7] $\pi_{g,q}^a(z)$는 슈퍼고객([비고 5, 6] 참조)의 도착시점에 대기 중인 고객수의 PGF이다.

슈퍼고객의 관점으로 결과를 표현하면 분해속성을 이해하기 쉬우므로, 식 (4), (5), (15), (16)으로부터 다음을 얻는다.

$$\pi_{g,q}^a(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}-z}\cdot\frac{1-X(z)Y^*\{\lambda-\lambda X(z)\}}{(1-z)E(X)\{1+\lambda E(Y)\}X_E(z)} \quad (17)$$

[비고 8] 준비기간을 갖지 않는(즉, $Y=0$인) $M^X/G/1$에서는 식 (17)의 우변 둘째항이 1이 된다. 따라서 우변의 첫째항은 ($Y=0$인) $M^X/G/1$에서 슈퍼고객의 도착시점에 대기 중인 고객수의 PGF이다.

식 (17)의 우변의 둘째항을 해석하기 위해서 슈퍼고객이 도착할 때 0명을 볼 확률 $P(0)$, 슈퍼고객이 준비기간 중에 도착할 확률 $P(Y)$, 그리고 슈퍼고객이 바쁜기간 중에 도착할 확률 $P(B)$를 구하면 다음과 같다(부록 A 참조).

$$P(0)=(1-\rho)/\{1+\lambda E(Y)\} \quad (18)$$

$$P(Y)=(1-\rho)\lambda E(Y)/\{1+\lambda E(Y)\} \quad (19)$$

$$P(B)=\rho=\lambda E(X)E(S) \quad (20)$$

식 (18)과 (19)로부터 다음과 같이 조건부 확률을 정의하자.

$$P(0|0 \text{ or } Y)=P(0)/\{P(0)+P(Y)\}=1/\{1+\lambda E(Y)\} \quad (21)$$

$$P(Y|0 \text{ or } Y)=P(Y)/\{P(0)+P(Y)\}=\lambda E(Y)/\{1+\lambda E(Y)\} \quad (22)$$

그러면, 식 (17) 우변의 둘째항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(0|0 \text{ or } Y)z^0+P(Y|0 \text{ or } Y)X(z)Y_E^*\{\lambda-\lambda X(z)\} \quad (23)$$

여기서 $Y_E^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$는 경과된(elapsed) 준비기간 Y_E의 LST인 $Y_E^*(\theta)$에 θ 대신 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 대입한 것으로서, 경과된 준비기간 동안 도착한 고객수의 PGF를 의미하는데, $Y_E^*(\theta)$와 $Y^*(\theta)$의 관계는 다음과 같다.

$$Y_E^*(\theta)=\{1-Y^*(\theta)\}/\theta E(Y) \quad (24)$$

식 (23)의 해석은 다음과 같다. 슈퍼고객이 도착하는 시점이 서버의 유휴기간(2절 참조)이라 하자. 그러면, 식 (23)의 첫째항의 z^0는 고객이 아무도 없을 때 도착하는 슈퍼고객이 보는 고객수가 0명임을 의미한다. 반면에, 준비작업이 진행 중일 때 슈퍼고객이 도착하는 경우에는 준비작업을 야기시킨 X명과 이미 경과된 준비기간 Y_E 동안에 도착한 고객을 보게 되는데, 이들 두 가지는 서로 독립이므로 식 (23)의 둘째항은 $X(z)$와 $Y_E^*\{\lambda-\lambda X(z)\}$를 곱한 형태로 표현되었다. 이상을 요약하면 [비고 9]를 얻는다.

[비고 9] 식 (17) 우변의 둘째항은 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객이 보는 고객수의 PGF이다([비고 10] 참조).

[비고 10] 유휴기간 중에는 서비스를 받고 있는 고객이 없으므로, 대기 중인 고객수와 체류 중인 고객수는 같다.

다음으로, 슈퍼고객의 대기시간 LST를 $W_{g,q}^*(\theta)$라 하면 ([비고 6] 참조), 식 (13)으로부터 다음을 얻는다.

$$W^*_{g,q}(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda X\{S^*(\theta)\}} \frac{\lambda-(\lambda-\theta)Y^*(\theta)}{\{1+\lambda E(Y)\}\theta} \quad (25)$$

[비고 11] 준비기간을 갖지 않는($Y=0$인) $M^X/G/1$에서는 식 (25)의 우변 둘째항이 1이 된다. 따라서, 우변의 첫째항은 ($Y=0$인) $M^X/G/1$에서의 슈퍼고객의 대기시간 LST를 의미한다 ([비고 8] 참조).

그리고 식 (25) 우변의 둘째항을 식 (21)과 (22)로 표현하면 다음과 같다.

$$P(0|0 \text{ or } Y)Y^*(\theta)+P(Y|0 \text{ or } Y)Y^*_R(\theta) \quad (26)$$

여기서 $Y^*_R(\theta)$는 준비기간의 잔여(residual)기간인 Y_R의 LST로서 $Y^*(\theta)$와의 관계는 식 (24)와 같은 형태이다(즉, Y_R의 분포는 Y_E의 분포와 같다).

식 (26)의 해석은 다음과 같다. 슈퍼고객이 도착하는 시점이 서어버의 유휴기간이라 하자. 그러면, 슈퍼고객이 도착한 시점으로부터 유휴기간이 끝날 때까지 걸리는 시간은 슈퍼고객이 도착한 시점이 0명 있을 때인가 아니면 준비작업이 진행 중일 때인가에 따라서 각각 준비기간 Y와 잔여 준비기간 Y_R이 된다. 이를 요약하면 다음과 같다.

[비고 12] 식 (25) 우변의 둘째항은 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객이 보는 잔여 유휴기간이다.

[비고 8]로부터 [비고 12]까지를 [비고 13]과 [비고 14]로 묶으면 다음과 같다.

[비고 13] $Y\neq0$인 $M^X/G/1$에서 슈퍼고객의 도착시점에 대기 중인 고객수의 PGF는 두 가지의 곱인데, 첫째는 $Y=0$인 $M^X/G/1$에서 슈퍼고객의 도착시점에 대기 중인 고객수의 PGF이고, 둘째는 $Y\neq0$인 $M^X/G/1$에서 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객이 보는 고객수의 PGF이다.

[비고 14] $Y\neq0$인 $M^X/G/1$에서의 슈퍼고객의 대기시간 LST는 두 가지의 곱인데, 첫째는 $Y=0$인 $M^X/G/1$에서의 슈퍼고객의 대기시간 LST이고, 둘째는 $Y\neq0$인 $M^X/G/1$에서 유휴기간에 도착하는 슈퍼고객이 보는 잔여 유휴기간이다.

6. 일반휴가형 $M^X/G/1$의 분해속성

지금까지 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF와 대기시간 LST를 구했다. <가정 1>하에서 구한 고객수 PGF들은 첫째로 대기 중인 고객수의 PGF와 체류 중인 고객수의 PGF로 분류되고, 둘째로 도착시점, 이탈시점, 임의시점 PGF들로 분류되며, 도착시점 고객수 PGF는 다시 슈퍼고객의 도착시점 PGF와 임의고객의 도착시점 PGF로 분류된다. 반면에, 대기시간 LST와 체류시간 LST는 선입선출 가정하에 구했는데, 이들 역시 슈퍼고객의 LST와 임의고객의 LST로 분류된다.

이상의 결과에 대한 분해속성은 슈퍼고객의 관점에서 가장 이해하기 쉬운데, [비고 13]에서는 슈퍼고객의 도착시점에 대기 중인 고객수의 PGF에 대한 분해속성을 요약했고, [비고 14]에서는 슈퍼고객의 대기시간 LST에 대한 분해속성을 요약했다.

서론에서 언급했듯이, 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$은 일반휴가형 $M^X/G/1$의 특수한 경우이다. 이제, 일반휴가형 $M^X/G/1$에 대해서 [비고 13]과 [비고 14]에 대응하는 분해속성을 알아보기로 하자. 일반휴가형 대기행렬이란 서비스를 받기 위해서 기다리는 고객이 있음에도 불구하고 서버가 어떤 이유로 (미리 정해진 규칙에 따라) 서비스를 제공하지 않는 기간이 존재하는 모형을 의미한다. 물론, 준비작업도 이러한 종류의 기간이다.

[비고 13]에 대응하는 분해속성을 규명하는 간단한 방법은 Chae *et al.* (2001)이 제안한 ATA(arrival time approach)이다. ATA의 1단계는 $\pi^a_{g,q}(z)$를 도착시점에 조건을 취해서 다음과 같이 표현하는 것이다.

$$\pi^a_{g,q}(z)=P(I)\pi^a_{g,q}(z|I)+P(B)\pi^a_{g,q}(z|B) \quad (27)$$

여기서 $P(I)$와 $P(B)$는 슈퍼고객(또는 임의집단)의 도착시점이 각각 유휴기간과 바쁜기간일 확률이고, 각각에 따른 조건부 PGF들이 바로 $\pi^a_{g,q}(z|I)$와 $\pi^a_{g,q}(z|B)$이다. 식 (27)의 $P(B)$는 식 (20)과 같고, '$P(I)=1-P(B)$'이다.

ATA의 2단계는 식 (27) 우변의 $\pi^a_{g,q}(z|B)$를 $\pi^a_{g,q}(z)$로 표현하는 것이다. 슈퍼고객이 바쁜기간 중에 도착했을 때 대기 중인 고객수는 서로 독립인 두 가지의 합인데, 첫째는 서비스를 받고 있는 고객이 대기장소를 이탈할 때에 남긴 고객수로서 PGF는 바로 $\pi^d_q(z)$이고, 둘째는 진행 중인 서비스의 경과된 시간 S_E에 도착한 고객수로서 이의 PGF는 S_E의 LST인 $S^*_E(\theta)$에 θ 대신 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 대입한 $S^*_E\{(\lambda-\lambda X(z)\}$이다(비고: 식 (24)에서 모든 Y를 S로 바꾸면 $S^*_E(\theta)$와 $S^*(\theta)$간의 관계식을 얻음). 그리고 식 (16)에 의해서 $\pi^d_q(z)$는 $\pi^a_{g,q}(z)X_E(z)$와 같다.

ATA의 3단계는 2단계에서 얻은 결과를 식 (27)에 대입한 다음 $\pi^a_{g,q}(z)$에 대해서 푸는 것인데, 그 결과는 다음과 같다.

$$\pi^a_{g,q}(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}-z}\pi^a_{g,q}(z|I) \quad (28)$$

[비고 15] 식 (28) 우변의 첫째항은 일반휴가가 없는 $M^X/G/1$에서 슈퍼고객의 도착시점에 대기 중인 고객수의

PGF이고, 둘째항은 일반휴가형 $M^X/G/1$에서 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객이 보는 고객수의 PGF이다([비고 13] 참조).

식 (28) 형태의 분해속성이 성립하는 필요충분조건에 대해서 명확하게 선을 긋기는 쉽지 않다. 그렇기 때문에 Choudhry (2000)도 분해속성을 이용해서 고객수 PGF를 얻으려 하지 않고, 대신 고객수 PGF를 먼저 구한 다음 분해속성의 성립 여부를 확인하려고 했던 것이다. 반대로, 분해속성이 성립하지 않는 모형에 대해서 억지로 분해속성을 활용하려다가 오류를 범한 경우도 있다. 총 일량(unfinished work)이 D를 초과하는 순간 바쁜기간이 시작되는 $M/G/1/D-Policy$ 모형의 고객수 PGF를 Dshalalow (1998)가 분해속성으로 구했으나, 틀린 결과는 Chae and Park (2001)에 의해 수정되었다.

[비고 16] $M/G/1/D-Policy$의 경우에는 일량에 대한 분해속성이 성립한다 (Park and Chae, 1999).

식 (28)을 얻은 과정을 살펴보면 분해속성이 성립하기 위한 (충분)조건으로 다음을 꼽을 수 있다. 첫째, 식 (27)에서 $P(I)$와 $P(B)$가 일반휴가가 있든 없든 일정해야 된다(Chae *et al.*, 2002, 부록 A). 이는 일반휴가로 인해서 유휴기간의 기대치가 커지면 바쁜기간의 기대치 역시 같은 비율로 커짐을 의미하는데, 이에 대한 자세한 설명은 Lee(1998, p. 512)에 있다. 둘째로, 슈퍼고객이 바쁜기간에 도착했을 때 진행 중인 서비스의 경과된 시간이 S_E가 되기 위해서는 바쁜기간을 구성하는 서비스 시간들이 $i.i.d.$ 확률변수이어야 한다. 이는 <가정 1>과 일맥상통하는 것인데, 예를 들어 $M/G/1/D-Policy$에서는 유휴기간에 도착한 고객들의 서비스시간들이 $i.i.d.$가 아니다. 셋째로, 바쁜기간에 서비스받고 있는 고객이 대기장소를 이탈하면서 남긴 고객수 PGF가 임의고객이 대기장소를 이탈하면서 남기는 고객수 PGF인 $\pi_q^d(z)$와 같아야 되는데, 이는 (집단 또는 개별) 도착과정이 포아송과정이면 충족된다.

[비고 14]에 대응하는 일반휴가형 $M^X/G/1$에서 대기시간에 대한 분해속성은 다음과 같이 얻는다. 추가로 필요한 가정은 두 가지인데, 첫째로 서비스 규칙이 선입선출이고, 둘째로 슈퍼고객보다 나중에 도착하는 고객(집단)들이 언제 도착하든지 슈퍼고객의 대기시간에는 영향을 미치지 않아야 된다. 예를 들어, 총 고객수가 N명 이상이 되는 순간 바쁜기간이 시작되는 $M^X/G/1/N-Policy$ 모형에서는 고객수에 대한 분해속성은 성립하지만 (Lee *et al.*, 1994), 대기시간에 대해서는 분해속성이 성립하지 않는데, 그 이유는 슈퍼고객이 유휴기간 중에 도착하고도 총 고객수가 N명 미만인 경우 나중에 도착하는 고객(집단)의 도착시점에 의해서 슈퍼고객의 대기시간이 영향을 받기 때문이다(이는 대기시간 과정에 관한 한 PASTA의 기본 가정인 LAA(Lack of Anticipation Assumption)가 성립되지 않음을 의미한다). 이러한 가정하에 다음이 성립한다.

$$\pi_q^d(z) = W_{g,q}^*(\lambda - \lambda X(z)) \frac{X[S^*\{\lambda - \lambda X(z)\}] - X(z)}{E(X)[S^*\{\lambda - \lambda X(z)\} - z]} \tag{29}$$

식 (29)에 대한 설명에 앞서서, 특수한 경우인 일반휴가형 $M/G/1$에서의 관계식인

$$\pi_q^d(z) = W_q^*(\lambda - \lambda z) \tag{30}$$

를 먼저 설명한다. 식 (30)의 의미는 "임의고객이 대기장소를 이탈하면서 뒤에 남기는 고객수는 임의고객의 대기시간 동안에 도착률이 λ인 포아송과정으로 도착한 고객수와 같다"이다. 이러한 관계가 일반휴가형 $M^X/G/1$에서는 식 (29)와 같이 복잡해지는데, 그 이유는 다음과 같다. 첫째로, $W_{g,q}^*\{\lambda - \lambda X(z)\}$는 슈퍼고객의 대기시간 동안 복합포아송과정으로 도착한 고객수의 PGF이다. 만약에 슈퍼고객을 구성하는 집단의 구성원들이 모두 한꺼번에 대기장소를 이탈한다면 이때 대기장소에 남은 고객수는 슈퍼고객의 대기시간 동안 도착한 고객수와 같을 것이다. 그러나 실제로는 구성원들이 차례로 (서비스가 하나 끝날 때마다) 한 명씩 대기장소를 이탈한다. 따라서, 슈퍼고객의 구성원 중에서 임의로 뽑힌 고객이 대기장소를 이탈할 때 남기는 고객수는 슈퍼고객의 대기시간 동안 도착한 고객수에 (독립적으로) 두 가지를 더한 것인데, 첫째는 슈퍼고객의 구성원 중에서 임의고객보다 나중에 서비스받을 고객수이고, 둘째는 슈퍼고객의 구성원 중에서 임의고객보다 먼저 서비스받은 고객들의 서비스시간 동안에 추가로 도착한 고객수이다. 그런데 임의고객이 속한 집단에서 먼저 서비스받는 고객수와 나중에 서비스받는 고객수는 독립이 아니므로, 이들 두 가지의 결합(joint) PGF인

$$\frac{X(z_1) - X(z_2)}{E(X)(z_1 - z_2)} \tag{31}$$

를 사용한 것이다. 식 (31)로부터 식 (29) 우변의 둘째항을 얻는 과정은 구체적으로 다음과 같다. 식 (31)에서 z_1은 임의고객보다 먼저 서비스받는 고객을 의미하고, z_2는 나중에 서비스받을 고객을 의미한다. 1단계로 식 (31)의 z_1 대신에 $S^*(\theta)$를 대입하면 먼저 서비스받는 고객의 서비스시간을 의미하게 되고, 2단계로 $S^*(\theta)$의 θ 대신 '$\lambda - \lambda X(z_3)$'를 대입하면 이때 z_3는 임의고객보다 먼저 서비스받을 고객의 서비스시간 동안 추가로 도착한 고객을 의미하게 된다. 즉,

$$\frac{X[S^*\{\lambda - \lambda X(z_3)\}] - X(z_2)}{E(X)[S^*\{\lambda - \lambda X(z_3)\} - z_2]}$$

는 임의고객보다 먼저 서비스받는 고객들의 서비스시간 동안에 추가로 도착하는 고객수와 임의고객보다 나중에 서비스받을 고객수의 결합 PGF가 된다(비고 : $S^*\{\lambda - \lambda X(z_3)\}$는 먼저 서비스받는 고객 한 명의 서비스시간 동안에 추가로 도착하는

고객수의 PGF임). 마지막으로, 이들 두 가지 고객수의 결합 PGF에서 z_3와 z_2를 모두 z로 통일하면 이들 두 가지 고객수의 합의 PGF를 얻게 된다(보다 상세한 설명은 Lee(1998)의 60쪽, 104쪽, 260쪽에 있음).

[비고 17] 식 (31)뿐만 아니라 식 (9)의 X_E, 식 (24)의 Y_E, 그리고 식 (28)을 얻는 과정에서 등장한 S_E에 소위 길이편향(length biasing 또는 inspection paradox)이 적용된다.

식 (29)를 활용하는 방법은 식 (30)의 활용법과 유사하다. 식 (30)의 경우에는 z 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입하면 우변이 $W_q^*(\theta)$가 되므로, 이미 구해 놓은 (좌변의) $\pi_q^d(z)$에 z 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입하면 $W_q^*(\theta)$를 얻는다(Lee, 1998, p. 514). 식 (29)에서는 $X(z)$ 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입하는데, 그 과정은 다음과 같다. 식 (16)에 의해서 $\pi_q^d(z)$는 $\pi_{g,q}^a(z)X_E(z)$와 같으므로, 이에 식 (9)와 (28)을 대입하고 간단히 하면 다음과 같다.

$$\pi_q^d(z) = \frac{(1-\rho)\{1-X(z)\}}{E(X)[S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}-z]}\,\pi_{g,q}^a(z|I) \quad (32)$$

다음, 식 (29)와 (32)를 연립으로 풀면 다음을 얻는다.

$$W_{g,q}^*\{\lambda-\lambda X(z)\} = \frac{(1-\rho)\{1-X(z)\}}{X[S^*\{\lambda-\lambda X(z)\}]-X(z)}\,\pi_{g,q}^a(z|I) \quad (33)$$

마지막으로, 식 (33)에 $X(z)$ 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입하면

$$W_{g,q}^*(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda X\{S^*(\theta)\}}\,\pi_{g,q}^a(z|I)\Big|_{X(z)=1-\theta\lambda^{-1}} \quad (34)$$

을 얻는데, 식 (34) 우변의 둘째항은 $\pi_{g,q}^a(z|I)$에 $X(z)$ 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입한 것을 의미한다.

[비고 18] 식 (34) 우변의 첫째항은 일반휴가가 없는 $M^X/G/1$에서의 슈퍼고객의 대기시간 LST이다 ([비고 11] 참조).

[비고 19] 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$에서는 식 (34) 우변의 둘째항이 '유휴기간에 도착하는 슈퍼고객이 보는 잔여 유휴기간'이 된다 ([비고 12] 참조). 이와 같은 현상은 복수휴가(multiple vacation)형 $M/G/1$과 단수휴가(single vacation)형 $M/G/1$에서도 확인되었다(Lee, 1998, 8장 2,3절). 즉, 복수휴가 또는 단수휴가형 $M/G/1$에서도 임의고객의 대기시간 LST가 휴가가 없는 $M/G/1$에서의 대기시간 LST와 유휴기간에 도착하는 고객이 보는 '잔여 유휴기간' LST의 곱으로 표현된다. 저자는 식 (34) 우변의 둘째항이 모든 일반휴가형 $M^X/G/1$에 대해서 유휴기간에 도착하는 슈퍼고객이 보는 '잔여 유휴기간'이 될 것으로 추측(conjecture)한다(부록 B에 약식 증명을 수록함).

[비고 19]의 추측을 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬보다 더 복잡한 대기행렬로 확인해 본다. 최근에 Hur *et al.* (2002)은 복수휴가, 단수휴가, N-정책의 세 가지 기능 중에서 한 가지씩을 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$에 추가한 연구결과를 발표했다. 식 (29)에 대한 설명에서 언급했듯이, 위의 세 가지 기능 중에서 N-정책을 추가하는 경우에는 식 (34)가 성립하지 않는다. 그러나 복수휴가 또는 단수휴가 기능을 추가하는 경우에는 식 (34)가 성립한다.

구체적으로, 복수휴가와 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬에 대한 Hur *et al.*(2002)의 결과에서 식 (34) 우변의 둘째항에 해당되는 것을 본 논문의 기호 (notation)로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1-V^*(\lambda)-Y^*(\theta)\{V^*(\theta)-V^*(\lambda)\}}{\theta[E(Y)\{1-V^*(\lambda)\}+E(V)]} \quad (35)$$

식 (35)를 식 (26)의 형태로 표현하기 위해서 필요한 것은 식 (21)과 (22)에 해당하는

$$P(V|V\text{or }Y) = E(V)/[E(V)+E(Y)\{1-V^*(\lambda)\}] \quad (36)$$

$$P(Y|V\text{or }Y) = 1-P(V|V\text{or }Y) \quad (37)$$

인데, 이들은 슈퍼고객이 유휴기간에 도착했다는 조건하에 각각 복수휴가 기간과 준비기간에 도착할 조건부 확률들이다(이들은 부록 A에서 사용한 재생주기 분석으로 구할 수 있으나 생략함). 그러면, 식 (35)는

$$P(V|V\text{ or }Y)V_R^*(\theta)Y^*(\theta)+P(Y|V\text{ or }Y)Y_R^*(\theta) \quad (38)$$

가 되는데, 이에 대한 해석은 다음과 같다. 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객의 관점에서 잔여 유휴기간이란, 복수휴가 기간 중에 도착하는 경우에는 도착하는 휴가 V의 잔여기간인 V_R과(V에 대한 설명은 부록 B 참조) 준비기간 Y를 (독립적으로) 합친 것이고, 준비기간 중에 도착하는 경우에는 준비기간의 잔여기간인 Y_R이다($V_R^*(\theta)$와 $Y_R^*(\theta)$는 모두 식 (24)의 형태임([비고 17] 참조)).

다음, 단수휴가와 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬에 대한 Hur *et al.* (2002)의 결과에서 식 (34) 우변의 둘째항에 해당되는 것은 다음과 같다.

$$\frac{\lambda-\lambda V^*(\theta)Y^*(\theta)+V^*(\lambda)\theta Y^*(\theta)}{\theta\{V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(Y)\}} \quad (39)$$

식 (39)를 식 (26)의 형태로 표현하기 위해서 필요한 것은

$$P(V|0,\ V\text{or}\ Y)=\lambda E(V)/\{V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(Y)\} \quad (40)$$
$$P(0|0,\ V\text{or}\ Y)=V^*(\lambda)/\{V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(Y)\} \quad (41)$$
$$P(Y|0,\ V\text{or}\ Y)=\lambda E(Y)/\{V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(Y)\} \quad (42)$$

인데, 이들은 슈퍼고객이 유휴기간에 도착했다는 조건하에 각각 단수휴가 기간, 단수휴가 기간에 0명 도착해서 서버가 고객을 기다리고 있는 기간, 그리고 준비기간에 도착할 조건부 확률들이다(유도과정은 생략함). 그러면, 식 (39)는

$$P(V|0,\ V\text{or}\ Y)V_R^*(\theta)Y^*(\theta)+P(0|0,\ V\text{or}\ Y)Y^*(\theta) + P(Y|0,\ V\text{or}\ Y)Y_R^*(\theta) \quad (43)$$

가 되는데, 이에 대한 해석은 다음과 같다. 유휴기간 중에 도착하는 슈퍼고객의 관점에서 잔여 유휴기간이란, 단수휴가 기간 중에 도착하는 경우에는 단수휴가 V의 잔여기간인 V_R과 준비기간 Y를 (독립적으로) 합친 것이고, 서버가 고객을 기다리고 있을 때 도착하는 경우에는 준비기간 Y이며, 준비기간 중에 도착하는 경우에는 준비기간의 잔여기간인 Y_R이다.

7. 결론

본 논문에서는 준비기간을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬을 예제로 사용해서 고객수의 PGF와 대기시간의 LST에 대한 분해속성을 규명한 다음, 이를 확장해서 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬에 대한 분해속성을 분석하고 해석하였다.

본 논문의 기여를 요약하면 다음과 같다. 특정한 휴가규칙을 대상으로 하지 않은 일반휴가형 $M/G/1$ 대기행렬의 고객수 PGF에 대해서 Fuhrmann and Cooper (1985)가 제시한 분해속성은 잘 활용되고 있는 반면에, 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬을 포함한 더욱 일반적인 틀 안에서 고객수 PGF에 대해서 Shanthikumar (1988)가 제시한 분해속성은 잘 활용되고 있다고 보기 어려웠다(Shanthikumar의 결과에 대한 해석 및 확장은 Chang *et al.* (2000) 참조). 이에, 본 논문에서는 슈퍼고객의 관점으로 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 분해속성을 해석함으로서, 고객수 PGF뿐만 아니라 대기시간 LST에 대한 해석까지 비교적 이해하기 쉽고 활용하기 쉬운 형태로 제시할 수 있었다.

저자는 추후 연구과제로 세 가지를 제시한다. 첫째는, [비고 19]의 추측에 대한 정식 증명이다. 둘째는, 일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 분해속성을 불완전서비스(non-exhaustive) 경우로 확장하는 것인데, 불완전서비스란 차례를 기다리는 고객이 남아 있는데도 불구하고 (미리 정해진 규칙에 따라) 바쁜기간이 끝날 수 있는 경우이다($M/G/1$ 대기행렬에 관련된 이 경우의 연구는 주로 Takagi (1991)에서 찾을 수 있다). 셋째는, 일반휴가형 $M^X/G^b/1$ 대기행렬의 분해속성을 규명하는 것이다. 즉, 고객만 집단으로 도착하는 것이 아니라 서비스도 집단으로 b명씩 처리하는 큰 틀에서 (Chae *et al.*, 2002) [비고 13, 14]에 대응하는 속성을 확인하는 것이다.

부록 A : 재생주기 분석

i번째 재생주기 C_i는 유휴기간 I_i와 바쁜기간 B_i로 구성되고, 다시 I_i는 집단이 하나 도착할 때까지의 기간 A_i와 준비기간 Y_i로 구성된다. 즉,

$$C_i=I_i+B_i=A_i+Y_i+B_i \quad (A.1)$$

인데, Y_i와 B_i는 서로 종속이지만 A_i는 Y_i와 B_i에 독립이며, $C_1, C_2, \cdots$는 $i.i.d.$ 확률변수이다.

PASTA 속성(Wolff, 1982)과 재생보상정리에 의하면, 식 (18), (19), (20)의 $P(0)$, $P(Y)$, $P(B)$는 다음과 같다.

$$P(0)=\frac{E(A)}{E(C)},\ P(Y)=\frac{E(Y)}{E(C)},\ P(B)=\frac{E(B)}{E(C)} \quad (A.2)$$

여기서 $E(A)$는 λ^{-1}이고 $E(Y)$는 알려진 값이므로 $E(B)$만 구하면 되는데, 편의상 다음과 같이 구한다.

$$E(B)=E(Y+B)-E(Y) \quad (A.3)$$

지체사이클(delay cycle) 이론에 의하면,

$$E(Y+B)=\{E(Y)+E(X)E(S)\}/\{1-\lambda E(X)E(S)\} \quad (A.4)$$

이므로, 이를 식 (A.3)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$E(B)=E(X)E(S)\{1+\lambda E(Y)\}/\{1-\lambda E(X)E(S)\} \quad (A.5)$$

또한 $E(A)$와 $E(Y+B)$의 합인 $E(C)$는 다음과 같다.

$$E(C)=\lambda^{-1}\{1+\lambda E(Y)\}/\{1-\lambda E(X)E(S)\} \quad (A.6)$$

마지막으로, 이들을 모두 식 (A.2)에 대입하면 식 (18), (19), (20)을 얻는다.

부록 B : [비고 19]의 추측에 대한 약식 증명

아래의 증명을 약식이라 칭하는 이유는 수학적으로 엄격하지 않을뿐더러 직관에 근거한 일종의 휴리스틱 방법이기 때문이다.

유휴기간에 도착하는 임의 슈퍼고객의 관점에서 잔여 유휴기간과 경과된 유휴기간은 독립이 아닐 뿐더러 확률분포도 다르다. 예를 들어, 복수휴가형 $M^X/G/1$의 경우에는 유휴기간을 구성하는 하나 이상의 휴가들 중에서 마지막 휴가만이 슈퍼고객들이 도착한 휴가이므로, 임의 슈퍼고객의 관점에서 잔여 유휴기간은 마지막 휴가의 잔여 부분만을 의미하는 반면에, 경과된 유휴기간에는 마지막 휴가의 경과된 부분뿐만 아

니라 마지막을 제외한 나머지 휴가들도 포함된다. 그러나 유휴기간에 도착하는 임의 슈퍼고객이 보는 고객수 N_E와 잔여 유휴기간에 추가로 도착할 고객수 N_R은 (독립은 아니지만) 동일한 확률분포를 따른다고 저자는 주장한다. 이는 대칭성에 근거한 주장으로서 임의 슈퍼고객이란 유휴기간에 도착하는 여러 슈퍼고객들 중에서 임의로 뽑힌 슈퍼고객을 의미하기 때문이다(이는 물론 PASTA가 성립하기 위한 기본 가정인 LAA가 충족된다는 기본 가정을 전제로 한다). 예를 들어, 복수휴가형 $M^X/G/1$에서 하나의 휴가 V의 LST를 $V^*(\theta)$라 하면 PASTA 속성 (Wolff, 1982)과 [비고 17]에 의해서 N_E와 N_R의 결합 PGF는

$$\left.\frac{V^*(\theta_1)-V^*(\theta_2)}{E(V)(\theta_2-\theta_1)}\right|_{\theta_1=\lambda-\lambda X(z_1),\,\theta_2=\lambda-\lambda X(z_2)} \tag{B.1}$$

이고, N_E와 N_R의 PGF는 모두 다음과 같다.

$$\left.\frac{1-V^*(\theta)}{E(V)\theta}\right|_{\theta=\lambda-\lambda X(z)} \tag{B.2}$$

식 (29)가 성립하는 조건으로 꼽은 두 가지 중 첫째는 선입선출이고, 둘째는 임의 슈퍼고객의 관점에서의 잔여 유휴기간이 N_R명의 도착시점과 무관하다는 점이다. 즉, N_R명이 언제 도착하는가에 따라서 잔여 유휴기간이 결정되는 것은 아니고, 다만 잔여 유휴기간 동안에 복합포아송과정으로 도착하는 고객수가 N_R명일 따름이다. 그러나 N_E에 대해서는 상황이 다르다. N_E는 슈퍼고객이 도착시에 보는 고객수일 뿐 임의 슈퍼고객 관점의 경과된 유휴기간 동안 복합포아송과정으로 도착한 고객수는 아니다.

이상을 종합하면 다음과 같은 결론을 얻는다. 식 (34) 우변의 둘째항은 N_E의 PGF인 $\pi^a_{g,q}(z|I)$에 $X(z)$ 대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입한 것이다. 그런데 N_E의 PGF는 N_R의 PGF와 같다. 그리고 N_R의 PGF란 슈퍼고객 관점의 잔여 유휴기간 LST에 θ 대신 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 대입한 것이다. 따라서, N_R의 PGF에 $X(z)$대신 '$1-\theta\lambda^{-1}$'을 대입하면 슈퍼고객 관점의 잔여 유휴기간 LST가 된다.

참고문헌

Chae, K. C. and Park, Y. I. (2001), The Queue Length Distribution for the $M/G/1$ Queue under the D-Policy, *Journal of Applied Probability*, **38**(1), 278-279.

Chae, K. C., Chang, S. H. and Lee, H. W. (2002), Analysis of the $M/G^b/1$ Queue by the Arrival Time Approach, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **28**(2), 36-43.

Chae, K. C., Lee, H. W. and Ahn, C. W. (2001), An Arrival Time Approach to M/G/1-type Queues with Generalized Vacations, *Queueing Systems*, **38**(1), 91-100.

Chang, S. H., Chae, K. C. and Lee, H. W. (2000), Alternative Expressions for the Decomposition Property in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **26**(3), 283-288.

Choudhry, G. (2000), An $M^X/G/1$ Queueing System with a Setup Period and a Vacation Period, *Queueing Systems*, **36**(1/3), 23-38.

Dshalalow, J. H. (1998), Queueing Processes in Bulk Systems under the D-Policy, *Journal of Applied Probability*, **35**(4), 976-989.

Fuhrmann, S. W. and Cooper, R. B. (1985), Stochastic Decompositions in the $M/G/1$ Queue with Generalized Vacations, *Operations Research*, **33**(5), 1117-1129.

Hur, S., Yoon, Y. H. and Ahn, S. (2002), An Analysis of the $M^X/G/1$ System with Various Vacations and Setup Time, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, **27**(2), 111-121.

Lee, H. W. (1998), Queueing Theory, Sigma Press, Seoul, Korea.

Lee, H. W., Lee, S. S. and Chae, K. C. (1994), Operating Characteristics of $M^X/G/1$ Queue with N-Policy, *Queueing Systems*, **15**(1/4), 387-389.

Park, Y. I. and Chae, K. C. (1999), Analysis of the Unfinished Work and Queue Waiting Time for the $M/G/1$ Queue with D-Policy, *Journal of the Korean Statistical Society*, **28**(4), 523-533.

Shanthikumar, J. G. (1988), On Stochastic Decomposition in $M/G/1$ Type Queues with Generalized Server Vacations, *Operations Research*, **36**(4), 566-569.

Takagi, H. (1991), Queueing Anslysis, Vol I : Vacation and Priority Systems, part 1, North-Holland, Amsterdam

Wolff, R. W. (1982), Poisson Arrivals See Time Averages, *Operations Research*, **30**(2), 223-231.