Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 28, No. 1, pp. 36-43, March 2002.

도착시점방법에 의한 $M/G^b/1$ 대기행렬의 분석

채경철[1†] · 장석호[1] · 이호우[2]

[1]한국과학기술원 산업공학과/[2]성균관대학교 시스템경영공학부

Analysis of the $M/G^b/1$ Queue by the Arrival Time Approach

Kyung-Chul Chae[1] · Seok-Ho Chang[1] · Ho-Woo Lee[2]

[1]Department of Industrial Engineering, KAIST, Yousong-gu, Taejon, 305-701
[2]School of Systems Management Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon, 440-746

We analyze bulk service $M/G^b/1$ queues using the arrival time approach of Chae *et al.*(2001). As a result, the decomposition property of the $M/G/1$ queue with generalized vacations is extended to the $M/G^b/1$ queue in which the batch size is exactly a constant b. We also demonstrate that the arrival time approach is useful for relating the time-average queue length PGF to that of the departure time, both for the $M/G^b/1$ queue in which the batch size is as big as possible but up to the maximum of constant b. The case that the batch size is a random variable is also briefly mentioned.

Keywords: bulk service queue, vacation queue, decomposition property

1. 서 론

본 연구에서는 Chae *et al.*(2001)의 도착시점방법을 활용하여 집단서비스를 제공하는 $M/G^b/1$ 대기행렬 시스템을 분석한다(비고 : 'b'는 batch 또는 bulk를 의미함). 본 연구의 목적은 크게 두 가지인데, 첫째는 도착시점방법의 적용범위를 $M/G^b/1$ 시스템까지 확장하는 것이고, 둘째는 휴가형 $M/G/1$ 시스템에서 성립하는 분해속성이 휴가형 $M/G^b/1$ 시스템에서도 성립하는지 여부를 알아보는 것이다(비고: 도착시점방법, 휴가형 대기행렬, 분해속성 등은 2절에서 자세히 설명함).

[비고 1] 휴가형 $M/G^b/1$ 시스템에서 휴가기간을 0 으로 놓으면 휴가형이 아닌(또는 휴가가 없는) $M/G^b/1$ 시스템이 된다. 따라서, 일반적인 시스템인 휴가형 $M/G^b/1$에 유효한 결과는 특수한 시스템인 휴가가 없는 $M/G^b/1$에도 모두 성립한다.

지금까지 알려진 도착시점방법의 적용범위는 휴가형 우선순위(priority) $M/G/1$, 휴가형 $M^X/G/1$, 휴가형 $BMAP/G/1$ 등이다. 이들 휴가형 대기행렬의 공통점은 고객의 도착과정이 마코비안(Markovian)이고, 한 명인 서버(server)가 고객을 한 명씩 처리한다는 점이다. 도착시점방법의 장점은 복잡한 시스템을 비교적 간단하게 분석할 수 있게 해 주는 것인데, 특히 휴가형 대기행렬의 분해속성을 규명할 때에 편리하다.

집단서비스를 제공하는 $M/G^b/1$ 시스템은 고객이 집단으로 도착하는 $M^X/G/1$ 또는 $BMAP/G/1$ 시스템에 비해서 분석이 까다롭다고 알려져 있다. 예를 들어, 휴가형 $M/G^b/1$ 시스템의 분해속성에 대해서는 추측(conjecture)만 있을 뿐이다 (Lee *et al.*, 1992; Lee *et al.*, 1996; Lee *et al.*, 1997).

3절에서 얻을 주요결과는 다음과 같다. 첫째, b가 상수이고 반드시 b명씩(동시에) 서비스하는 경우에는 분해속성이 성립

본 연구는 서울대학교 복잡계통계연구센터를 통한 한국과학재단의 지원에 의하여 수행되었음.
† 연락저자 : 채경철 교수, 305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 산업공학과, Fax : 042-869-3110, e-mail : kcchae@kaist.ac.kr
2001년 7월 접수, 1회 수정(3주 소요) 후, 2001년 12월 게재 확정.

하는 데, 이는 '$b=1$'인 경우에 대해서 기존에 알려져 있는 분해속성을 포함하는 일반적인 형태이다. 둘째로, 다른 종류의 집단서비스 경우에 대해서는 분해속성이 성립하지 않는데, 예를 들면 b가 확률변수인 경우이거나 또는 b가 상수이되 b명 미만이 남았을 때에도 이들을 동시에 서비스할 수 있는 경우 등이 이에 해당된다(Chaudhry and Templeton, 1983; Lee, 1998). 이러한 경우에 분해속성은 성립하지 않더라도 여전히 도착시점방법은 유용한데, 그 이유는 다음과 같다. 이탈시점 고객수 분포는 상대적으로 구하기 쉬운 반면에 가장 중요한 임의시점 고객수분포는 상대적으로 구하기 어렵다. 그렇지만, 도착시점 방법을 사용하면 이들 두 가지 확률분포 간의 간단한 관계식을 얻으므로, 이탈시점 분포로부터 임의시점 분포를 쉽게 얻을 수 있게 되는 것이다.

2. 용어의 정의 및 가정

휴가형 대기행렬이란 고객이 존재함에도 불구하고 서버가 어떤 이유로(정해진 규칙에 따라) 서비스를 제공하지 않는 모든 대기행렬을 의미한다. 특히, $M/G/1$ 대기행렬에서 여러 가지 휴가 규칙에 대한 다양한 예제는 Takagi (1991) and Lee (1998)에 등장한다.

휴가형 대기행렬에서 주 관심사인 분해속성은 다음과 같다. 고객수의 확률생성함수(PGF)는 두 가지를 곱한 꼴인데, 하나는 휴가기간중의 고객수의 PGF이고, 다른 하나는 휴가규칙과 무관하게 일정한 것이다. 그런데, 휴가규칙과 무관한 PGF는 아예 휴가가 없는 대기행렬에서도 동일하며([비고 1] 참조), 이는 대체로 잘 알려져 있다. 따라서, 특정한 휴가규칙을 고려하는 경우에는 그 규칙에 따른 휴가기간중의 고객수 PGF만 구하면 되는 것이다.

특정한 휴가 규칙을 대상으로 하지 않고, 일반적인 가정하에 휴가형 $M/G/1$의 분해속성을 다룬 대표적인 문헌은 Fuhrmann and Cooper (1985)인데, 이들의 가정을 요약하면 다음과 같다.

가정 1. 고객은 도착률이 λ인 포아송 과정으로 도착하고, 서비스시간 S_1, S_2, $\cdots$는 $i.i.d.$(independent and identically distributed) 확률변수이다. 그리고 서비스시간은 도착과정 및 휴가의 길이와 독립이다.

가정 2. 도착한 고객은 반드시 서비스를 받고 이탈한다.

가정 3. 서버는 한 명이고 고객들이 한 명씩 서비스 받는 순서는 서비스시간과 독립이다.

가정 4. 서비스는 비축출형(non-preemptive)이다.

가정 5. 휴가가 시작되고 끝나는 것은 그 후의 도착과정과 독립이다.

휴가형 $M/G^b/1$을 다루기 위해서는 가정 3에서 '한 명씩'을 '여러 명씩'으로 고쳐야 되는데, 일단 'b 명씩'으로 고친다(단, b는 상수).

[비고 2] 집단서비스의 경우에는 가정 1의 S_1, S_2, $\cdots$가 집단 내의 모든 고객을(동시에) 서비스하는 시간을 의미함.

이제, 도착시점방법을 설명하기 위해서 다음과 같이 다섯 가지의 안정상태(steady-state) 고객수 PGF를 정의한다.

$\Pi^A(z)$: 안정상태에서 도착하는 임의고객이 보는 고객수 PGF

$P(z)$: 안정상태에서 임의시점에 관찰된 고객수 PGF

$\Pi^{SS}(z)$: 안정상태에서 서비스 시작(직후)시점의 고객수 PGF

$\Pi^{SC}(z)$: 안정상태에서 서비스 종료(직후)시점의 고객수 PGF

$\Pi^D(z)$: 안정상태에서 이탈하는 임의고객이 남기는 고객수 PGF

도착시점방법의 1단계는 다음과 같다.

$$\Pi^A(z) = P_I^A \Pi^A(z|I) + P_B^A \Pi^A(z|B) \tag{1}$$

식 (1)에서, P_I^A는 임의고객이 도착하는 시점이 서버의 유휴기간(idle period)일 확률이고 P_B^A는 도착시점이 서버의 바쁜기간(busy period)일 확률이며, 이에 따른 조건부 PGF들이 각각 $\Pi^A(z|I)$와 $\Pi^B(z|B)$이다.

[비고 3] 바쁜기간은 서비스가 진행중인 기간을 의미하며 나머지는 모두 유휴기간에 포함된다. 예를 들어, 복수(multiple) 또는 단수(single) 휴가, 준비기간(setup time), b명씩 집단서비스하는 경우에 b명이 찰 때까지 서버가 기다리는 기간 등은 모두 유휴기간에 포함된다(Lee, 1998).

도착시점방법의 2단계는 다음과 같다. 고객의 도착과정이 포아송 과정이므로, PASTA 속성(Wolff, 1982)에 의해서 식 (1)의 각 항은 아래의 식 (2)에서 대응되는 항과 일치한다.

$$P(z) = P_I P(z|I) + P_B P(z|B) \tag{2}$$

식 (2)에서, P_I와 P_B는 각각 임의 관찰시점이 유휴기간일 확률과 바쁜기간일 확률이고, 이에 따른 조건부 PGF들이 각각 $P(z|I)$와 $P(z|B)$이다.

식 (1)을 (2)로 고치는 이유는 $\Pi^A(z|B)$보다 $P(z|B)$의 분석이 용이하기 때문이다. 바쁜기간중에는 끊임없이 서비스가 진행중이다([비고 3] 참조). 그런데, Green의 정리(1982)에 의하면, 바쁜기간중의 임의시점에 진행중인 서비스의 경과된(elapsed) 시간이 평형(equilibrium) 분포를 따른다. 즉 서비스시간 S의 라플라스 변환을 $S^*(\theta)$라 하면, 경과된 서비스 S_E의 라플라스 변환은

$$S_E^*(\theta)=\{1-S^*(\theta)\}/\theta E(S) \tag{3}$$

인데, $E(S)$는 S의 기대치이다.

반면에, $\Pi^A(z|I)$와 $P(z|I)$는 고려 중인 특정 휴가규칙에 따라서 분석하기 쉬운 것을 택할 수 있는데, 예를 들어 복수휴가 경우에는 $\Pi^A(z|I)$가 쉽다. P_B^A와 P_B도 역시 쉬운 것을 택해서 구할 수 있겠으나, 반드시 b명씩(동시에) 서비스하는 경우에는 간단히

$$\rho=P_B=\lambda E(S)/b \tag{4}$$

가 된다(부록 A 참조). 식 (4)에서 ρ는 서버의 이용률(utilization)을 의미하는 데, $E(S)$는 b명을 서비스하는 데 걸리는 평균시간으로([비고 2] 참조), 그리고 b/λ는 b명이 도착하는 데 걸리는 평균시간으로 해석할 수 있다.

도착시점방법의 3단계는 다음과 같이 $P(z|B)$, $\Pi^{SS}(z)$, $\Pi^{SC}(z)$ 간의 관계를 얻는 것이다.

$$P(z|B)=\Pi^{SS}(z)\cdot S_E^*(\lambda-\lambda z) \tag{5}$$

$$\Pi^{SC}(z)=\Pi^{SS}(z)\cdot S^*(\lambda-\lambda z)\cdot z^{-b} \tag{6}$$

식 (5)와 (6)에서 $S_E^*(\lambda-\lambda z)$와 $S^*(\lambda-\lambda z)$는 각각 S_E와 S 동안 포아송 과정으로 도착한 고객수의 PGF이다.

[비고 4] 가정 1에 의해서 S와 S_E는 포아송 도착과정과 독립이므로, S와 S_E 동안 도착한 고객수의 PGF는 각각 $S^*(\theta)$와 $S_E^*(\theta)$에서 'θ'를 '$\lambda-\lambda z$'로 대체한 것이 된다(Lee, 1998).

따라서, 식 (5)의 우변은 "바쁜기간중의 임의시점에 관찰된 고객수는 진행중인 서비스가 시작되었을 때의 고객수와 시작 이후 경과된 시간 동안 추가로 도착한 고객수를 합친 것이다"를 의미한다. 이때 $\Pi^{SS}(z)$와 $S_E^*(\lambda-\lambda z)$를 곱하는 이유는 물론 포아송 과정의 독립증분(independent increments) 속성에 따른 것이다. 식 (6)의 우변에서도 역시 포아송 과정의 독립증분 속성에 따라 $\Pi^{SS}(z)$와 $S_E^*(\lambda-\lambda z)$를 곱했는데, $\Pi^{SS}(z)\ S^*(\lambda-\lambda z)$는 서비스가 끝나기 직전의 고객수를 의미하므로 여기에서 서비스를 마치고 이탈하는 b명을(z^{-b}를 곱함으로서) 빼면 서비스가 끝난 직후의 고객수가 된다.

식 (6)을 (5)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$P(z|B)=\Pi^{SC}(z)z^bS_E^*(\lambda-\lambda z)/S^*(\lambda-\lambda z) \tag{7}$$

[비고 5] 식 (7)에서 유의할 점은 식의 '형태'가 휴가규칙과 무관하다는 점이다. 즉 휴가규칙이 달라지면 $P(z|B)$와 $\Pi^{SC}(z)$는 달라지지만 이들의 비율인 '$P(z|B)/\Pi^{SC}(z)$'는 휴가규칙과 무관하다.

도착시점방법의 4단계는 다음과 같다. 고객이 한 명씩 도착하고 한 명씩 이탈하는 시스템에서는

$$\Pi^A(z)=\Pi^D(z) \tag{8}$$

가 성립하는 데, 이를 Burke의 정리라 부르자(Lee, 1998). 그런데, b명씩 이탈하는 시스템에서도 다음과 같이 Burke의 정리를 활용할 수 있다(비고: 집단도착의 경우에도 동일한 방법으로 Burke의 정리를 활용함). 사실상 b명이 동시에 이탈하지만 이를 가상적으로 한 명씩 이탈하는 것으로 간주하면 되는데, 이때 이탈간(interdeparture) 시간은 물론 0으로 간주한다. 그리하면, 동시에 서비스를 마친 b명 중에서 임의의 고객이 이탈시에 뒤에 남기는 고객수의 PGF인 $\Pi^D(z)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Pi^D(z)&=\Pi^{SC}(z)\cdot\left(\frac{z^0}{b}+\frac{z^1}{b}+\cdots+\frac{z^{b-1}}{b}\right)\\&=\Pi^{SC}(z)\cdot(1-z^b)/b(1-z)\end{aligned} \tag{9}$$

도착시점방법의 마지막 단계로서 식 (1)~(9)를 연립으로 풀면 다음을 얻는다(부록 B 참조).

$$P(z)=P(z|I)\cdot\frac{(1-\rho)(1-z^b)S^*(\lambda-\lambda z)}{S^*(\lambda-\lambda z)-z^b} \tag{10}$$

[비고 6] 바쁜기간중에는 집단서비스를 받고 있는 b명을 제외한 나머지가 대기중이지만 유휴기간중에는 시스템에 있는 모든 고객이 대기중이다. 이러한 사실을 이용하면 대기중인 고객수의 PGF가 식 (10)의 우변에서 $S^*(\lambda-\lambda z)$를 제거한 것임을 보일 수 있다(Chae *et al.*, 2001).

3. 휴가형 $M/G^b/1$의 분해속성

식 (10)의 형태는 다음과 같다.

$$P(z)=P(z|I)\cdot Q_b(z) \tag{11}$$

식 (11)에서 유의할 점은 $Q_b(z)$가 b에 의해서만 영향을 받고 휴가규칙과는 무관하다는 점이다. 반면에, $P(z|I)$는 b뿐만 아니라 휴가규칙에 따라서도 달라진다.

기존에 알려진 분해속성은 다음과 같다. '$b=1$'이고, 휴가가 없는 기본적인(standard) $M/G/1$ 시스템에서는 유휴기간중의 고객수가 0명이므로 $P(z|I)=z^0=1$이다([비고 1] 참조). 따라서, 휴가형 $M/G/1$ 시스템에서는 $Q_1(z)$가 기본적인 $M/G/1$의 $P(z)$와 동일하다.

반면에, '$b\geq 2$'인 경우에는 휴가가 없는 기본적인 $M/G^b/1$에서도 '$P(z|I)\neq 1$'이다. 따라서, $Q_b(z)$가 기본적인 $M/G^b/1$의 $P(z)$와 동일하지는 않다. Lee *et al.*(1996)은 복수휴가와 단

수휴가의 두 가지 특정 휴가규칙을 고려하여 $M/G^b/1$의 $P(z)$를 부가변수법으로 구한 다음 그 결과가 식 (11)의 형태임을 보였다. 그리고 특정 휴가규칙을 대상으로 하지 않는 일반휴가 (가정 1~5 참조) 하에서도 식 (11) 형태의 분해속성이 성립할 것이라고 추측하였다.

그렇다면, 식 (11)에서 $Q_b(z)$는 과연 무엇인가? 식 (11)의 양변을 $P(z|I)$로 나누면 좌우변이 모두 휴가규칙과 무관하게 되고, 이는 또한 휴가가 없는 $M/G^b/1$에서도 유효하다([비고 1] 참조). 따라서, $Q_b(z)$는 휴가가 없는 기본적인 $M/G^b/1$에서의 '$P(z)/P(z|I)$'라고 할 수 있다. 다만, 특수한 경우인 '$b=1$' 경우에서는 $Q_1(z)$가 기본 $M/G/1$의 $P(z)$와 '결과론적으로' 일치하게 되었을 뿐이다.

지금까지 반드시 b명씩 동시에 서비스하는 집단서비스를 다루었다. 다른 종류의 집단서비스경우에는 결과론적으로 분해속성이 성립하지 않는데, 그 이유는 오히려 반드시 b명씩 집단서비스하는 경우에 대한 과정을 자세히 살펴보면 쉽게 알 수 있다(부록 A 참조). 식 (8)과 (9), 그리고 PASTA 속성에 의한 '$\Pi^A(z)=P(z)$'를 식 (7)에 대입하면

$$P(z|B)=P(z)\cdot R(z) \tag{12}$$

가 되는데, $R(z)$의 구체적인 내용은 다음과 같다.

$$R(z)=\frac{bz^b}{1-z^b}\,\frac{1-S^*(\lambda-\lambda z)}{\lambda E(S)S^*(\lambda-\lambda z)} \tag{13}$$

다음, 식 (12)를 (2)에 대입하고 $P(z)$에 대해서 풀면

$$P(z)=P(z|I)\cdot P_I/\{1-P_BR(z)\} \tag{14}$$

를 얻는다. 따라서, 식 (11)의 $Q_b(z)$는 바로

$$Q_b(z)=(1-P_B)/\{1-P_BR(z)\} \tag{15}$$

이며, 식 (11)의 $P(z|I)$는 원래 식 (2)의 우변에 있던 것이 끝까지 우변에 남은 것임을 알 수 있다(부록 B 참조).

반드시 b명씩 집단서비스를 하는 경우에 식 (15)가 휴가규칙과 무관하게 된 이유를 살펴보자. 첫째, 식 (4)에 의해서 '$P_B=\lambda E(S)/b$'와 '$P_I=1-P_B$'가 휴가규칙과 무관한데, 그 의미는 다음과 같다. 휴가규칙에 따라서 유휴기간의 기대치 $E(I)$와 바쁜기간의 기대치 $E(B)$가 달라지지만 $E(I)$와 $E(B)$의 비율은 일정하며, 따라서 P_I와 P_B도 일정하다(부록 A 참조). 둘째로, 식 (13)의 $R(z)$가 휴가규칙과 무관한데, 그 이유는 식 (7)~(9) 및 PASTA 속성이 휴가규칙과 무관하기 때문이다([비고 4] 참조).

문헌에 등장하는 집단서비스의 종류는 크게 두 가지로 분류된다. 첫째는 $M/G^{a,b}/1$인데, a와 b는 자연수로서 각각 집단서비스의 최소와 최대규모를 의미한다. 물론, $a=b$이면 반드시 b명씩 집단서비스를 하는 경우가 된다. 가장 대표적인 경우는 $a=1$인 경우인데, 이를 'b명 이하' 집단서비스라 부르기도 한다. 또한, $a<b$인 경우를 다시 두 가지로 분류하기도 하는데, 이는 b명 미만으로 시작된 집단서비스에 새로 도착하는 고객을 포함시키느냐 마느냐에 따른 분류이다 (Lee, 1998).

휴가형 $M/G^{a,b}/1$에서 $a<b$인 경우에 분해속성이 성립하지 않는 이유는 식 (2)에서 P_B가 휴가규칙에 따라 달라지기 때문이다. 구체적으로, $a<b$이면 집단서비스 종료시에 이탈하는 고객수는 a 이상 b 이하의 값을 가지는 확률변수가 되는데, 기대치를 $E(BS)$라 하자(비고 : 'BS'는 batch size를 의미함). 그러면,

$$P_B=\lambda E(S)/E(BS) \tag{16}$$

이 되는데, 이는 식 (4)를 일반화한 것이다(부록 A 참조). 그런데, $E(BS)$는 휴가규칙에 따라서 달라지는 것이다. 예를 들어, 바쁜기간이 시작될 때의 첫 집단서비스의 규모가 b일 확률은 유휴기간(또는 휴가기간)이 길수록 커진다.

[비고 7] 분해속성이란 식 (11)에서 '$Q_b(z)$가 휴가규칙과 무관함'을 의미한다. 따라서, '반드시 b명씩'이 아닌 다른 집단서비스 방식에서 설령 $P(z)$가 식 (11)의 형태가 된다고 하더라도, 이때 $Q_b(z)$가 휴가규칙과 무관해야만 분해속성이 성립한다고 말할 수 있다. $P(z)$가 식 (11)의 형태가 되기 위해서는 $P(z|B)$가 식 (12)의 형태가 되어야 하며, 결과론적으로 $Q_b(z)$는 식 (15)의 형태가 된다. 물론 식 (15)의 P_B와 $R(z)$는 집단서비스 방식에 따라서 달라진다. 문제는 과연 휴가규칙에 따라서도 달라지는가 하는 점이다. 저자는 $Q_b(z)$가 휴가규칙과 무관하기 위한 필요조건으로 "P_B가 휴가규칙과 무관함"을 꼽고 있는데(이때 $R(z)$까지 휴가규칙과 무관하면 충분조건), 그 이유는 식 (15)에서 P_B와 $R(z)$가 모두 휴가규칙에 영향을 받으면서도 영향의 효과가 교묘하게 상쇄되어 $Q_b(z)$ 전체로는 휴가규칙과 무관하게 되기가 불가능하리라고 여기기 때문이다(부록 A 참조).

문헌에 등장하는 또 다른 종류의 집단서비스는 $M/G^b/1$에서 b가 확률변수인 경우이다(Brière and Chaudhry, 1989). 이 경우, 서버는 서비스를 시작할 때마다 집단서비스의 규모를 구현(realize)시킨다. 예를 들어, 확률변수 b가 자연수 n으로 구현되었다고 하자. 그러면, 'n명 이하' 집단서비스를 한다. 즉, 대기중인 고객이 n명 이상이면 그 중에서 n명을 집단서비스하고, n명 미만인 경우에는 이들을 모두 집단서비스 하는 것이다. 따라서, 식 (16)의 $E(BS)$는 $E(b)$와 다를 뿐만 아니라 휴가규칙에 따라서도 달라진다.

만약, 확률변수 b가 자연수 n으로 구현되었을 때 'n명 이하' 방식 대신에 '반드시 n명' 방식을 채택한다면 과연 분해속성

이 성립할 것인가? 이러한 종류의 집단서비스는 아직 문헌에 등장하지 않았지만, 만약에 등장한다면 분해속성이 성립할 가능성이 있다([비고 7] 참조). 이 경우, 식 (16)의 $E(BS)$는 $E(b)$와 같아지는데, $E(b)$는 휴가규칙과 무관하므로 최소한 분해속성의 필요조건은 충족된다. 문제는 식 (15)의 $R(z)$에 해당되는 것이 과연 휴가규칙과 무관할 것인가 하는 점인데 이는 추후 연구과제로 남긴다(비고 : 이 경우, 휴가규칙에 대해서 더욱 명확한 정의가 필요할 것으로 사료됨).

4. $P(Z)$와 $\Pi^{SC}(z)$의 관계 : 'b명 이하' 경우

분해속성이 성립하지 않는 경우에도 도착시점방법은 여전히 유용한데, 그 이유는 상대적으로 구하기 어려운 $P(z)$를 상대적으로 구하기 쉬운 $\Pi^{SC}(z)$와 관계를 맺어주기 때문이다.

간단한 예시로서, 휴가가 없는 $M/G^b/1$에서 'b명 이하' 집단서비스를 채택하되(단, b는 상수), b명 미만으로 시작된 집단서비스에 새로 도착하는 고객을 포함시키지 않는 시스템을 고려한다(비고: 이 시스템은 Lee(1998)에 부가변수법으로 상세히 분석이 되어있음).

이 시스템의 $\Pi^{SC}(z)$는 이탈시점(departure time)에 내재된 (imbedded) 마코프 체인(Markov chain)으로 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다. A_n을 n번째 집단서비스 동안에 도착하는 고객수라고 하고, N_n^{SC}를 n번째 집단서비스가 끝난 직후에 시스템에 남아 있는 고객수라 하면

$$N_{n+1}^{SC} = \begin{cases} N_n^{SC} + A_{n+1} - b & , \text{ if } N_n^{SC} \ge b \\ A_{n+1} & , \text{ if } N_n^{SC} < b \end{cases} \tag{17}$$

의 관계가 성립한다. 안정상태에서(즉, $n \to \infty$일때), N^{SC}와 A의 PGF는 각각 $\Pi^{SC}(z)$와 $S^*(\lambda - \lambda z)$인데([비고 4] 참조), 추가로 $P(N^{SC} = k)$를 Π_k^{SC}로 표기하자. 그러면, 식 (17)의 좌우변은 다음과 같이 안정상태 PGF로 표현된다.

$$\Pi^{SC}(z) = \left\{\Pi^{SC}(z) - \sum_{k=0}^{b-1} \Pi_k^{SC} z^k\right\} S^*(\lambda - \lambda z) z^{-b} + \sum_{k=0}^{b-1} \Pi_k^{SC} S^*(\lambda - \lambda z) \tag{18}$$

그리고 식 (18)을 $\Pi^{SC}(z)$에 대해서 풀면 다음을 얻는다.

$$\Pi^{SC}(z) = S^*(\lambda - \lambda z) \sum_{k=0}^{b-1} (z^b - z^k) \Pi_k^{SC} / \{z^b - S^*(\lambda - \lambda z)\} \tag{19}$$

식 (18)을 조금 더 자세히 설명하면 다음과 같다. 첫 번째 조 조건인 '$N^{SC} \ge b$'의 확률 '$\sum_{k=b}^{\infty} \Pi_k^{SC}$'는 N_n^{SC}의 조건부 PGF의 분모와 같다. 그래서 상쇄되고 남은 것이 바로 $\{\Pi^{SC}(z) - \sum_{k=0}^{b-1} \Pi_k^{SC} z^k\}$인 것이다. 그리고 여기에 A_{n+1}의 PGF인 $S^*(\lambda - \lambda z)$를 곱한 이유는 포아송 과정의 독립증분 속성에 따라 A_{n+1}이 N_n^{SC}과 독립이기 때문이다. 식 (18) 우변의 두 번째 항은 두 번째 조건인 '$N^{SC} < b$'의 확률 '$\sum_{k=0}^{b-1} \Pi_k^{SC}$'에 A_{n+1}의 PGF를 곱한 것이다.

$\Pi^{SC}(z)$로부터 $P(z)$를 얻는 방법은 다음과 같다. 첫째, 식 (2)에 '$P(z|I) = z^0 = 1$'과 식 (5)를 대입하면

$$P(z) = P_I + P_B S_E^*(\lambda - \lambda z) \Pi^{SS}(z) \tag{20}$$

을 얻는다. 식 (20)에서 P_B는 식 (16)에

$$E(BS) = \Pi_0^{SC} + \lambda E(S) \tag{21}$$

를 대입하여 얻을 수 있는데, 이에 대한 근거는 다음과 같다. 유휴기간과 바쁜기간을 합친 재생주기(regeneration cycle)를 C라 하면

$$\begin{aligned} E(C) &= E(I) + E(B) \\ &= \lambda^{-1} + E(S) E(C \text{ 동안의 서비스 횟수}) \end{aligned} \tag{22}$$

이다. 그리고 C 동안 도착하는 고객수의 기대치는 $\lambda E(C)$이므로

$$E(BS) = \lambda E(C) / E(C \text{ 동안의 서비스 횟수}) \tag{23}$$

이다. 그런데, 서비스 종료후 0명이 남는 사건은 주기당 한번씩 발생하므로,

$$\Pi_0^{SC} = 1/E\,(C \text{ 동안의 서비스 횟수}) \tag{24}$$

가 성립한다. 따라서, 식 (22)와 (24)를 (23)에 대입하여 (21)을 얻는다.

[비고 8] 휴가가 있는 경우에는 식 (20)의 P_I를 '$P_I P(z|I)$'로 대체하고, 식 (22)의 λ^{-1}을 '고려중인 휴가규칙에 따른 $E(I)$'로 대체한다.

둘째로, 식 (20)의 $\Pi^{SS}(z)$를 식 (19)의 $\Pi^{SC}(z)$와 연결하는 관계식은 다음과 같다(비고: 식 (6)은 '반드시 b명' 경우에만 유효함).

$$\Pi^{SS}(z) = \{\Pi^{SC}(z) - \Pi_0^{SC}\} + \Pi_0^{SC} z \tag{25}$$

식 (25)의 근거는 다음과 같다. 편의상, N^{SS}를 서비스 시작 직후의 고객수라 하자. 서비스가 끝났을 때 남아 있는 고객이 있으면 바로 다음 서비스가 시작되는데, 이 경우에는 N^{SS}는 N^{SC}와 같고 또한 하나씩 대응된다. 반면에 서비스가 끝났을 때 남아 있은 고객이 없으면 '$N^{SC}=0$'인데, 이에 대응하는 것

은(유휴기간을 거치고 나서) 다음 바쁜기간의 첫 번 서비스에서의 '$N^{SS}=1$'이다. 따라서, $\Pi^{SS}(z)$는 $\Pi^{SC}(z)$에서 '$N^{SC}=0$'에 해당하는 Π_0^{SC}를 빼고 대신 '$N^{SC}=1$'에 해당하는 $\Pi_0^{SC}z$를 더한 것과 같다.

마지막으로, 식 (19)를 (25)에 대입한 다음 이를 다시 식 (20)에 대입하면 $\Pi^{SC}(z)$로부터 $P(z)$를 얻는 관계식으로 다음을 얻는다.

$$\{\Pi_0^{SC}+\lambda E(S)\}P(z)=\Pi_0^{SC}+\lambda E(S)S_E^*(\lambda-\lambda z)\{\Pi^{SC}(z)-(1-z)\Pi_0^{SC}\} \tag{26}$$

5. 결론 및 추후 연구방향

본 연구에서는 도착시점방법을 활용하여, 휴가형 $M/G^b/1$ 시스템의 분해속성을 규명하였으며 아울러 $M/G^b/1$ 시스템에서 임의시점 고객수의 PGF를 이탈시점 고객수의 PGF로부터 얻는 방법을 제시하였다. 구체적으로, '반드시 b 명씩' 집단서비스를 하는 경우에는 분해속성이 성립하며 이는 기존의 분해속성을 포함하는 일반적인 형태이다. 또한, 'b 명 이하'를 집단서비스하는 경우에 대해서, 도착시점방법이 임의시점 고객수와 이탈시점 고객수 간의 간단한 관계식을 제공함을 예시로 보였다.

b가 확률변수인 경우에 '반드시 b 명씩' 집단서비스를 하는 휴가형 $M/G^b/1$ 시스템의 분해속성 성립여부는 추후 연구과제로 남겼는데, 이외에도 $MAP/G^b/1$, $DMAP/G^b/1$, $Geo/G^b/1$ 등의 다양한 집단서비스 시스템에 도착시점방법이 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

부록 A : P_B의 유도과정 및 분해속성의 내막

식 (16)을 증명하면 특수한 경우인 식 (4)도 해결된다. 식 (16)의 증명은 4절의 식 (22)~(24)에서와 같이 재생주기분석으로 한다. 그런데, 4절에서 다룬 'b 명 이하'인 경우는 바쁜기간 종료시의 고객수가 항상 0명이기 때문에 주기분석이 간단한 반면에, 식 (16)이 성립하는 '$a<b$'인 경우는 바쁜기간 종료시의 고객수가 a 명 미만이기 때문에 주기분석이 까다로운 편인데, 구체적인 내용은 다음과 같다.

i번째 유휴기간과 바쁜기간을 각각 I_i와 B_i 라 하고 이들의 합을 C_i 라 하자. 집단서비스 방식이 'b명 이하'인 경우에는 C_1, C_2, … 가 $i.i.d.$ 확률변수이고 B_1, B_2, … 또한 $i.i.d.$ 확률변수이다. 따라서, 재생보상정리(renewal reward theorem)에 의해서 간단히 '$P_B=E(B)/E(C)$'를 얻는다. 반면에, '$a<b$'인 경우에는 C_1, C_2, … 가 독립도 아니고 동일한 분포를 따르지도 않는데, 이는 $B_1, B_2, \cdots$도 마찬가지이다. 그렇지만, 주기를 충분히 크게 잡으면 $i.i.d.$ 속성이 성립하게 할 수 있다. 예를 들어, 바쁜기간 종료시에 고객수가 0인 시점으로부터 다시 바쁜기간 종료시에 고객수가 0 이 되는 시점까지를 재생주기로 잡는 것이다. 이러한 재생주기를 C^*라 하면

$$C^*=C_1+C_2+\cdots+C_K \tag{A.1}$$

로 표현할 수 있는데, 이때 K는 확률변수이다. 또한,

$$B^*=B_1+B_2+\cdots+B_K \tag{A.2}$$

라 하면, 재생보상정리에 의해서 다음이 성립한다.

$$P_B=E(B^*)/E(C^*) \tag{A.3}$$

도착률이 λ인 포아송 과정에서 도착간(interarrival) 시간 $A_1, A_2, \cdots$는 $i.i.d.$ 지수분포를 따르고 평균은 λ^{-1}이다. 편의상, C_i 동안에 도착하는 고객수를 N_i 라 하고, B_i 동안에 집단서비스를 받는 집단의 수를 Γ_i 라 하면,

$$C_i=A_1+A_2+\cdots+A_{N_i} \tag{A.4}$$

$$B_i=S_1+S_2+\cdots+S_{\Gamma_i} \tag{A.5}$$

가 성립한다. 또한, N^*와 Γ^*를 다음과 같이 정의한다.

$$N^*=N_1+N_2+\cdots+N_K$$

$$\Gamma^*=\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_K$$

식 (A.4)와 (A.5)를 각각 (A.1)과 (A.2)에 대입하고, 이들을, N^*와 Γ^*로 표현하면,

$$C^*=A_1+A_2+\cdots+A_{N^*} \tag{A.6}$$

$$B^*=S_1+S_2+\cdots+S_{\Gamma^*} \tag{A.7}$$

가 되는데, 식 (A.6)과 (A.7)에서 N^*와 Γ^*는 정지시간(stopping time)이므로 Wald의 공식에 의해서

$$E(C^*)=E(N^*)E(A)=E(N^*)/\lambda \tag{A.8}$$

$$E(B^*)=E(\Gamma^*)E(S) \tag{A.9}$$

가 성립한다. 따라서, 식 (A.3)에 (A.8)과 (A.9)를 대입하면

$$P_B=\lambda E(S)E(\Gamma^*)/E(N^*) \tag{A.10}$$

가 되는데, 재생보상정리에 의하면 식 (A.10)의 '$E(N^*)=E(\Gamma^*)$'는 바로 식 (16)의 $E(BS)$를 의미한다.

'반드시 b 명씩' 집단서비스를 하는 $M/G^b/1$의 경우에는 '$N_i=b\Gamma_i$'이고 '$N^*=b\Gamma^*$' 이므로, 식 (A,10)에 '$E(N^*)=bE(\Gamma^*)$'를 대입하면 식 (4)를 얻는다. 그런데, '반드시 b 명씩'인 경우에 대해서 한 가지 짚고 넘어갈 것은 다음과 같다. 3절에서 분

해속성의 의미를 언급할 때에 "$E(I)$와 $E(B)$의 비율이 일정하다"고 했는데, 이때 I와 B는(엄격히 따지자면) $I^*(=C^*-B^*)$와 B^*를 의미한다(식 (A.1)과 (A.2) 참조).

사실, 분해속성의 핵심적 내막은 결과론적으로 다음과 같다([비고 7] 참조). 휴가규칙이 달라져도 $E(I^*)$와 $E(B^*)$의 비율이 일정할 뿐만 아니라, 휴가규칙에 따라서 I^* 동안의 고객수가 변화하는 양이 B^* 동안의 고객수가 변화하는 양과 동일하다는 점이다. 이를 수식으로 설명하면 다음과 같다. 휴가가 없는 대기행렬에서 식 (2)에 대응하는 식을

$$P_0(z)=P_IP_0(z|I)+P_BP_0(z|B) \tag{A.11}$$

라 하자. 휴가형 대기행렬에서의 I^*와 B^* 동안의 고객수가 휴가가 없는 대기행렬에서의 I^*와 B^* 동안의 고객수에 비해서 각각 일정량이 증가한다는 점을 PGF로 표현하면 다음과 같다.

$$P(z|I)/P_0(z|I)=P(z|B)/P_0(z|B) \tag{A.12}$$

반드시 b명씩 집단서비스를 하는 $M/G^b/1$의 경우에도 식 (A.12)가 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다. 3절에서 휴가형 $M/G/1$의 분해속성을 휴가형 $M/G^b/1$의 분해속성으로 확장할 때에 얻은 결론인 '$Q_b(z)=P_0(z)/P_0(z|I)$'를 식 (11)에 대입한 다음 식 (2)와 연립으로 풀면

$$\frac{P(z|B)}{P(z|I)}=\frac{1}{P_B}\left\{\frac{P_0(z)}{P_0(z|I)}-P_I\right\} \tag{A.13}$$

를 얻는다. 반면에, 식 (A.11)로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{P_B}\left\{\frac{P_0(z)}{P_0(z|I)}-P_I\right\}=\frac{P_0(z|B)}{P_0(z|I)} \tag{A.14}$$

식 (A.13)의 우변과 (A.14)의 좌변이 일치하므로, 식 (A.13)의 좌변은 (A.14)의 우변과 동일하다. 따라서, 식 (A.12)가 성립한다.

이상 식 (16)을 증명하고 더불어 분해속성의 내막을 짚고 넘어갔는데, 이는 [비고 7]에서 "P_B가 휴가규칙과 무관함"이 분해속성의 필요조건이라고 주장한 데 대한 보충설명을 하기 위함이다. 만약, 식 (16)의 증명만 필요했다면 다음과 같이 Little의 공식으로 간단히 처리할 수도 있다. 고객들이 서비스를 받는 장소를(좁은 의미의) 시스템으로 간주하고, N_S를 서비스를 받고 있는 고객수라 하자. 고객은 시스템에 단위시간당 평균 λ명이 도착하고(가정 2 참조), 체류시간은 평균 $E(S)$이므로([비고 2] 참조), Little의 공식에 의해서

$$E(N_S)=\lambda E(S) \tag{A.15}$$

가 성립한다. 반면에 $E(N_S)$를 서버의 상태에 조건을 걸어서 표현하면

$$E(N_S)=P_IE(N_S|I)+P_BE(N_S|B) \tag{A.16}$$

인데, '$E(NS|I)=0$'이고([비고 3] 참조), '$E(N_S|B)=E(BS)$'이므로, 식 (A.15)와 (A.16)으로부터 식 (16)을 얻는다.

부록 B: 식 (10)의 유도과정

첫째로, 식 (4)와 (7)을 (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$P(z)=(1-\rho)P(z|I)+\lambda E(S)\Pi^{SC}(z)$$
$$z^bS_E^*(\lambda-\lambda z)/bS^*(\lambda-\lambda z) \tag{B.1}$$

둘째로, 식 (B.1)의 $S_E^*(\lambda-\lambda z)$는 식 (3)에 의해서 다음과 같다([비고 4] 참조).

$$S_E^*(\lambda-\lambda z)=\{1-S^*(\lambda-\lambda z)\}/(\lambda-\lambda z)E(S) \tag{B.2}$$

셋째로, PASTA 속성에 의해서 '$\Pi^A(z)=P(z)$'이고, 식 (8)에 의해서 '$\Pi^A(z)=\Pi^D(z)$'이므로, 식 (9)의 $\Pi^D(z)$를 $P(z)$로 대체하면 다음과 같다.

$$\Pi^{SC}(z)=P(z)b(1-z)/(1-z^b) \tag{B.3}$$

마지막으로, 식 (B.2)와 (B.3)을 (B.1)에 대입하고 간단히 하면

$$P(z)=(1-\rho)P(z|I)+P(z)z^b\{1-S^*(\lambda-\lambda z)\}$$
$$/(1-z^b)S^*(\lambda-\lambda z)$$

가 되는데, 이를 $P(z)$에 대해서 풀면 식 (10)을 얻는다.

감사의 글

초고에서 불분명하고 미진했던 부분들을 꼼꼼하게 지적해주신 심사위원께 감사드립니다.

참고문헌

Brière, G. and Chaudhry, M. L. (1989), Computational Analysis of Single-Server Bulk-Service Queues, M/G^Y/1, *Advances in Applied Probability*, **21**, 207-225.

Chae, K. C., Lee, H. W. and Ahn, C. W. (2001), An Arrival Time Approach to M/G/1-type Queues with Generalized Vacations, *Queueing Systems*, **38**, 91-100.

Chaudhry, M. L. and Templeton, J. G. C. (1983), A First Course in Bulk Queues, Wiley, New York.

Fuhrmann, S. W. and Cooper, R. B. (1985), Stochastic Decompositions in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations, *Operations Research*, **33**, 1117-1129.

Green, L. (1982), A Limit Theorem on Subintervals of Interrenewal Times, Operations Research, **30**, 210-216.

Lee, H. W. (1998), Queueing Theory, Sigma Press, Seoul, Korea.
Lee, H. W., Lee, S. S., Chae, K. C. and Nadarajan, R. (1992), On a Batch Service Queue with Single Vacation, *Appl. Math. Modelling*, **16**, 36-42.
Lee, H. W., Lee, S. S. and Chae, K. C. (1996), A Fixed-Size Batch Service Queue with Vacations, *J. of Appl. Math. and Stochastic Analysis*, **9**, 205-219.
Lee, H. W., Chung, D. I., Lee, S. S. and Chae, K. C. (1997), Server Unavailability Reduces Mean Waiting Time in Some Batch Service Queueing Systems, *Computers and OR*, **24**, 559-567.
Takagi, H. (1991), *Queueing Analysis, Vol. I : Vacation and Priority Systems*, North-Holland, Amsterdam.
Wolff, R. W. (1982), Poisson Arrivals See Time Averages, *Operations Research*, **30**, 223-231.