

매끈한 관내 공기유동에서 유량과 속도분포에 관한 실험적 연구

박상언*

An Experimental Study on the Flow-rate and Velocity Profile of Air Flow in the Smooth Pipe

Sang-Eun Park*

Key Words: Flow-rate (유량), Velocity Profile (속도분포), Reynolds Number (레이놀즈 수), Blower (송풍기) Laminar Flow (층류), Turblent Flow (난류), Power-law (멱승법칙), Maximum Velocity (최대속도)

ABSTRACT

Experimental study was conducted to obtain the air velocity profiles in turbulent pipe flow. The acrylic smooth pipe ($\phi=80$ mm) was used for the test section of the flow loop. It was known that the velocity profiles of turbulent flow were different with Reynolds numbers and the viscous sublayer was usually quite thin. The following conclusions were drawn from the experimental investigations. Maximum velocity of the pipe center and flow-rate are useful for the duct design on the spot. The velocity profiles of high Reynolds number was flatter than those of low Reynolds number. It was known that the exponent, n , for power-law velocity profiles was 6~9 depending on Reynolds number ranging from 10^4 to 10^5 in the turbulent flow, However, in this experiment study, it was 9~14 depending on Reynolds number ranging from 17,000 to 123,727 in the turbulent flow, and 1.7~3.5 depending on Reynolds number ranging from 2,442 to 4,564 in the transition region.

1. 서 론

원관내 유체유동에서 층류와 난류의 속도분포는 서로 다름을 많은 연구^(1~4)에서 밝혀진 바 있다. 그러나 원관내 공기유동에서 유량과 속도분포의 관계에 대한 연구는 많지 않다. 원관내 피토투브를 사용하여 한 점에 대한 속도와 유량의 측정은 가능하지만 관의 전단면에 대한 속도분포와 유량의 측정은 실제 현장에서

시간적으로나 경제적으로 쉽지 않다. 층류는 관중심에서 최대속도를 나타내면서 관벽에서는 상대적으로 속도가 없는 일반적으로 매끈한 포물선 분포를 유지하다가 점차 유속이 빠른 난류영역으로 가면서 관중심의 속도와 관벽 쪽으로의 속도와의 차이가 매우 작은 속도분포를 보여주고 있다. 층류와 난류의 속도분포는 정상유동일 때 임의의 한 단면에서 관중심을 기준하여 같은 반경상에 있는 한점들의 속도는 같은 속도분포를 나타내고 있다. 또한 레이놀즈수 및 관조도에 의해 각기 다른 속도분포상태를 보여주며, 레이놀즈수가 커지면 속도분포곡선은 점점 평탄하게 되고, 관벽의 상대

* 인천시립전문대학 기계과
E-mail : leesepark@hanmir.com

조도 (e/R)가 큰 거친 관에서는 벽면에 미치는 마찰력이 크게 됨을 발표되고 있다⁽⁵⁾. 층류유동은 Reynolds 수의 값이 약 2300보다 작아야 하고, 난류유동이 되려면 약 4000보다 커야 한다. 난류에서는 유체입자가 심한 운동량의 변화와 유체점성에 따른 관벽의 마찰손실, 경계층의 두께의 변화 등에 의하여 속도분포가 결정되고 있다. 따라서 관내 속도분포의 실험분석은 매우 중요하며 최근 속도분포를 해석적으로 나타내는 power-law 식의 속도에 따른 n 값의 변화에 대하여 실험적으로 많이 발표하고 있다⁽⁶⁾. 그러나 층류, 천이구역, 난류를 비교한 실험 자료와 그 해석은 많지 않다.

선행연구⁽¹⁾에서는 난류유동에 대한 속도분포를 구하였지만 본 논문에서는 층류, 천이구역을 포함하여 각 점에서 시간에 대한 평균속도와 유량을 구하여 관중심 최대속도에 대한 전체유량을 산출함으로써 산업현장에서 관중심 속도에 따른 유량 예측이 가능하고자 한다. 또한 층류, 천이구역, 난류에 대한 속도분포를 레이놀즈수 $10^3 \sim 10^5$ 에 따른 power-law 속도분포식의 n 값의 변화에 대하여 기존의 data와 비교 고찰하였다.

2. 원관내 유량과 속도분포

2.1 공기의 상태식

공기의 게이지 압력 P_g , 표준대기압 P_{atm} , 절대온도 T , 포화증기압 P_s , 상대습도 ϕ 일 때 공기의 절대압 P 는 식(1), 공기의 밀도 ρ 는 기체의 상태방정식인 식(2), 공기의 가스상수 R 는 식(3)으로 정의된다.

$$P = P_{atm} + P_g \quad (1)$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (2)$$

$$R = \frac{287}{1 - 0.378\phi \frac{P_s}{P}} \quad (3)$$

2.2 피토크에 의한 공기의 속도

원관내 공기의 속도는 Fig. 1과 같이 시간에 따라 변하는 비정상류의 불규칙 변화를 가지므로 속도는 시간 평균속도 \bar{u}_d 으로 구한다. 피토크를 사용하여 한 점에서 전압 P_t 및 정압 P_1 의 차인 동압(속도수두) h_t 를 에너지방정식에 의해 식(4)로 표시하고, 관로의 동

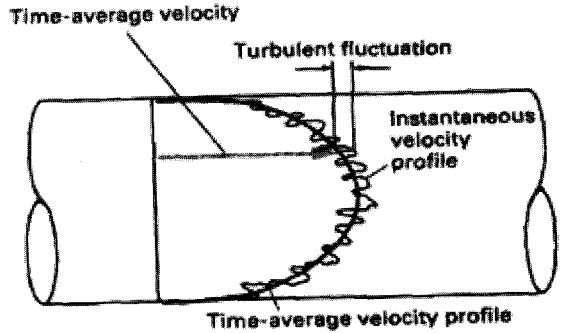


Fig. 1 Instantaneous and time-averaged velocity profiles in pipe flow

압의 평균값 h_d 는 식(5), 관로의 시간평균속도 \bar{u}_d 는 식(6), 이론적 단면 평균속도 \bar{V} 는 식(7)로 정의한다.

$$h_t = \rho \frac{\bar{u}_1^2}{2} = \frac{P_t - P_1}{\gamma} \quad (4)$$

$$h_d = \frac{1}{n} (h_1 + h_2 + h_3 \dots h_n) \quad (5)$$

$$\bar{u}_d = \sqrt{\frac{2}{\rho n} (h_1 + h_2 + h_3 \dots h_n)} \quad (6)$$

$$\bar{V} = \frac{Q_d}{A} \quad (7)$$

2.3 유량

피토크를 이용한 실험에서 관내 한점 A_1 의 유속이 \bar{u}_1 일 때 유량 dQ_1 는 식(8), 관로 A 의 유량 Q_d 는 식(9), 단면내 각점들의 시간평균속도 \bar{u} 가 좌표로 주어질때 유량 Q 는 식(10)으로 정의된다.

$$dQ_1 = A_1 \bar{u}_1 = A_1 \sqrt{\frac{2h_1}{\rho_1}} \quad (8)$$

$$Q_d = A \bar{u}_d = A_1 \sqrt{\frac{2}{\rho n} (h_1 + h_2 \dots h_n)} \quad (9)$$

$$Q = \int_A \bar{u} \cdot dA \quad (10)$$

2.4 층류유동

원형관내를 흐르는 층류유동은 Reynolds 수 약 2300 이하일 때 발생하며 원통 좌표계를 사용하여 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식을 적분하여 관벽 $r=R$ 일 때 $u=0$ 를 적용하면 유동의 속도분포는 식(11)이 된다.

$$u = \frac{R^2 - r^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (11)$$

체적유량 Q 는 축방향속도 u 을 관의 단면적에 대하여 적분하면 식 (12)가 된다.

$$Q = \int_0^R u(2\pi r) dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (12)$$

평균속도 V_a 는 체적유량을 단면적으로 나누면 식 (13)이 된다.

$$V_a = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dr} \right) \quad (13)$$

식 (11)과 식 (13)에서 평균속도와 축방향속도의 비교식은 식 (14)로 주어진다.

$$\frac{u}{V_a} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (14)$$

층류유동에서 최대속도와 축방향속도의 관계 속도 분포식은 식 (15)와 같다.

$$u(r) = V_a \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (15)$$

2.5. 난류유동

완전 발달된 난류유동은 유체가 갖는 여러 성질이 변하는 불규칙 거동의 복잡한 과정으로써 Reynolds 수 4000 이상 일 때 발생하며 Fig. 2는 난류유동에서 t 시간 동안 평균속도를 표시한다. 난류 전단응력은 시간에 대한 x 방향의 평균속도를 u' , y 방향의 변동속도를 v' 라하면 그 크기는 $\rho u' v'$ 이며 시간 평균치로 나타내면 식 (16)이 된다.

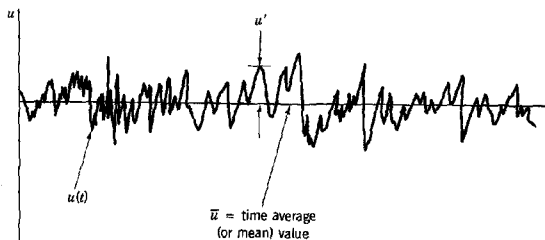


Fig. 2 The time-averaged velocity for turbulent flow.

$$\tau = -\overline{\rho u' v'} \quad (16)$$

층류와 난류를 조합하면 식 (17)로 표시된다.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \overline{\rho u' v'} \quad (17)$$

Fig. 3에서와 같이 관내의 난류유동에서 관벽 가까운 곳에 viscous sublayer, 천이구역인 overlap layer, 점성 작용이 없는 outer layer로 구분하고, 속도 분포는 식 (18)로 표시된다.

$$\frac{V_c - \bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \left(\frac{R}{y} \right) \quad (18)$$

여기서, $y=R-r$, $u^* = \tau_w/\rho$ 는 마찰속도, V_c 는 관중 심속도가 된다. 해석적인 power-law 속도분포식 식 (19)는 난류유동에서 사용하기 편한 실험식으로써, Blasius는 매끈한 관실험에서 Re 가 10^5 까지 유효한 관마찰계수식인 식 (20)을 제시하였고, 식 (19), 식 (20) 및 관마찰식인 Darcy-Weisbach (7)식을 조합해서 풀면 $n=7$ 인 마찰유동의 7승 법칙이 성립됨을 발표하였다.

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

$$f = 0.316 N_R^{-\frac{1}{4}} \quad (20)$$

난류유동에서 평균속도와 축방향속도의 관계속도분

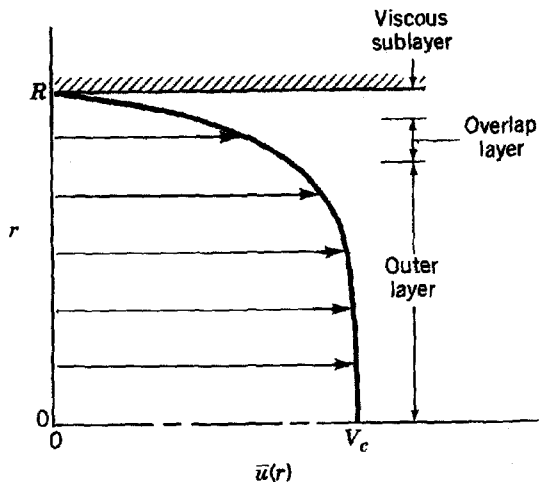


Fig. 3 Structure of turbulent flow in a pipe.

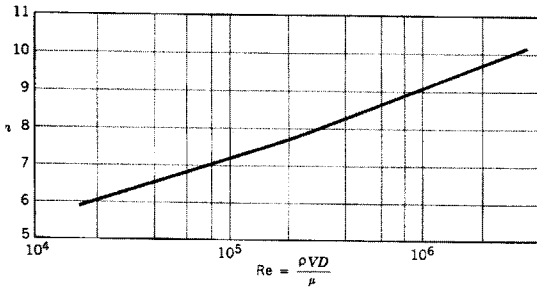


Fig. 4 Exponent, n, for power-law velocity profiles.

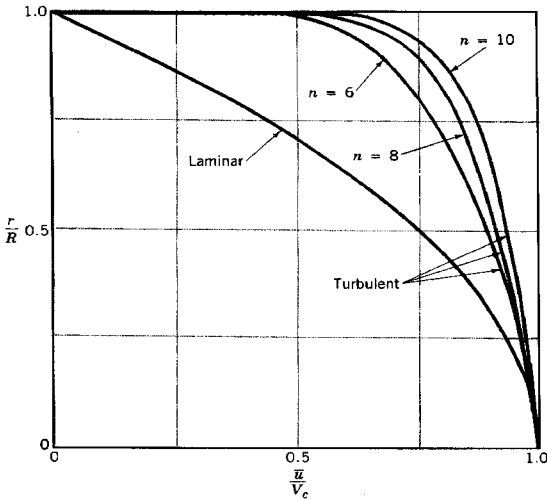


Fig. 5 Typical laminar flow and turbulent flow velocity profiles.

포식은 대략적으로 다음 식 (21)로 나타낼 수 있다⁽⁸⁾.

$$\frac{\bar{u}}{V_a} = \frac{60}{49} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (21)$$

Fig. 4와 Fig 5에서와 같이 식 (19)는 실험결과와 잘 일치되고 있음이 발표⁽⁹⁾되었고 이 Re가 10⁵을 넘는 경우에는 지수가 1/7보다 감소됨을 보여주고 있다.

그러나 power-law 속도분포식은 관벽에서는 속도 구배가 무한대로 접근함으로 관벽 가까이에서는 유효하지 못하며, 관중심 근방에서도 0로 수렴되지 않기 때문에 또한 유효하지 못함을 보여준다.

실험에서 구한 자료로 부터 멱법칙 지수를 구하는 방법은 여러방법이 있으나 대개 최소자승법(10)이 많이 이용된다. 최소자승법은 불연속적인 실험자료들로 부터 식 (22)과 같이 다항식으로 근사시키는 방법이다.

$$y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + \dots + a_nx_i^m \quad (22)$$

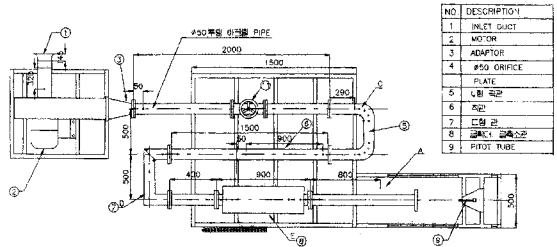


Fig. 6 The air flow loop of experimental apparatus.

여기서 m의 값에 따라 다항식의 형태가 주어진다. 그러나, 식 (19)의 원관내 속도분포식은 다항식의 형태로 표시할 수 없는 복잡한 식이다. 이에 양변에 식 (23)과 같이 대수함수형태로 바꾸어 본다.

$$\log y_i = \frac{1}{n} \log(1 - x_i) \quad (23)$$

이산화된 실험자료를 식 (23)에 대입한 후 Fortran으로 프로그램을 작성하여 컴퓨터를 통하여 계산하였다.

3. 실험장치와 방법

3.1 실험장치

원관내 공기의 유동실험을 위하여 Fig. 6과 같이 실험장치를 제작 설치하였다. 실험장치의 주요구성은, operation panel, 송풍기, 투명 아크릴 pipe, valve, 곡관, 급속대 급속소관, 피토크, 다관 manometer, 온도계로 구성하고 피토크를 미세 이동 조절 할 수 있는 이송장치를 설치하였다. 피토크는 zephyr 측정기와 컴퓨터로 연결하여 data를 정리하였다. 시험부는 직경 80 mm의 매끈한 투명 아크릴 pipe로 제작하였고, 이곳에서 충분히 발달된 정상유동을 얻기 위하여 직경 3 mm의 pitot tube를 급속소관으로부터 직경의 14.7배가되는 위치에 설치하였다. 실제 공학문제로서 10<Re<10⁵의 유동에서 속도분포가 완전히 발달된 거리는 l/D ≈ 25배 이지만 본 실험장치는 송풍기에서 나온 pipe의 직선거리가 직경의 30배 (l/D ≈ 30)이상의 충분한 거리이고 이 지점에서부터 주요 실험장치들을 연결하도록 하였다⁽⁵⁾.

3.2 실험방법

매끈한 관내 공기유동에서 유량과 속도분포에 관한

실험을 수행하기 위해 먼저 본 실험에서는 층류의 속도를 송풍기 1cycle/s로 시작하여 난류의 속도를 75 cycle/s까지 증가시켜 층류, 천이 그리고 난류유동장까지 실험하였다.

본 실험에서 시험부내 공기의 정압 p 는 미세 대기압력차를 측정할 수 있는 Druck 회사의 LPX8381 (Range : 0~20mbar)을 사용하여 측정하였다. 시험부는 중심으로부터 동서남북으로 5개점씩 즉 총 21점으로 구성되었으며 각 점에서 속도와 정압을 측정하였다. 각 점에서 속도 u 와 유량 Q 를 산출하기 위하여 피토판을 사용하고, 그 점에 압력차를 측정하는 zephyr 측정기로 연결하고 이를 다시 컴퓨터 프로그램에 의하여 자료를 산출하였다. 또한 온도 T 를 측정하고 포화증기압을 구함으로써 식 (1)~(3)의 관계식에 의하여 공기의 가스상수 R 와 밀도 ρ 를 구였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 실험의 타당성 검증

매끈한 관내 공기유동에서 속도분포에 관한 실험적 연구의 타당성을 검증하기 위하여 먼저 단면 내 각 점에서 동압과 유량, 시간평균 속도값을 측정하였다. 관내에 설치된 피토판으로 단면 내 20점 위치에서 송풍기 회전수(15 cycle/s~65 cycle/s) 조정에 따라 측정하였다. 본 실험에서는 층류유동과 천이구역의 데이터를 구하기 위하여 송풍기의 회전수를 1cycle/s와 10 cycle/s에서 측정하였으며, 난류유동의 데이터는 75 cycle/s까지 증가시켰다. 같은 반경내에서 수직축과 수평축의 속도값의 오차범위가 $\pm 2.5\%$ 한계내에 있음으로써 같은 반경내에서 속도가 정확하게 측정되었음을 확인할 수 있었다.

또한, 식 (22)의 곡선접합식으로 구한 멱법칙 지수 n 의 타당성을 검증하기 위하여 뉴턴유체의 유동에서 Reynolds 수와 반경방향에 따른 속도분포곡선을 실험과 해석적인 방법으로 구한 것과 비교하여 선행연구⁽¹⁾에 나타내었다. 여기서의 해석적인 해는 Bruce R. M. 등에 의하여 발표⁽²⁾되어 있고 또 다른 실험결과 값이 일본기계학회 유체역학 Hand Book에 발표⁽³⁾되었다. 본 실험에서 원관내 공기유동의 실험결과와 비교할 때 유사한 분포곡선을 나타내고 있음으로 실험의 타당성을 검증할 수 있다.

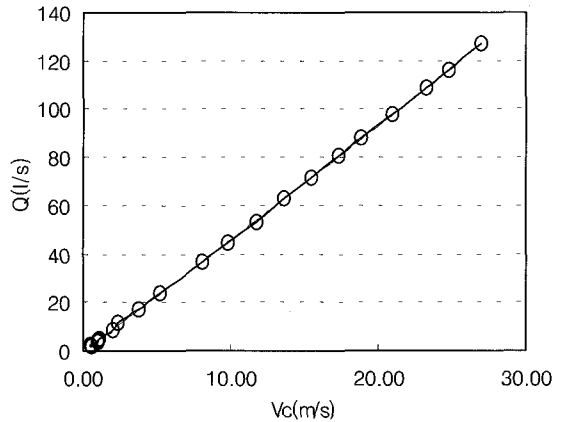


Fig. 7 Maximum velocity & flow rate

4.2 최대속도와 유량

본 실험에서 유량은 실험관 반경방향의 각 점에서 측정된 속도 데이터를 식 (8), (9)으로 계산함으로써 구하였으며, 최대속도는 관 중심속도를 측정된 값이다. Fig. 7 그림은 관중심의 최대속도(V_c)와 유량을 표시한 것이며 최대속도의 증가에 따라 유량이 증가하고 있다. 그 추세선은 아래의 다항식이 됨을 보여준다. 이로부터 유량계를 사용하지 않고도 유량을 쉽게 예측할 수 있었다.

$$Q = 0.0075 V_c^2 + 4.515 V_c - 0.1857$$

4.3 층류-난류 속도분포 비교

4.3.1 층류유동 반경방향 속도분포 비교

Fig. 8은 Re 수가 1914와 2422인 층류유동에서 관 평균속도 (V_c)에 대한 반경방향 속도분포를 실험값과 식 (15)에 의한 이론값으로 비교하여 나타낸 것이다⁽⁶⁾. 관성력이 적은 Re=1944에서는 벽면에서의 값을 측정하기가 어렵고 오차가 많아 데이터를 획득하지 못하였다. 또한, 반경방향의 속도가 관 벽으로 갈수록 실험값이 이론값보다 작게 나타난 것은 공기 유동에서 이론값은 손실을 고려하지 않았으며 또한 실제 층류유동에서는 속도가 매우 작기 때문에 점성의 영향이 크게 미치며 또한 반경방향의 각 점에서 미세 압력차를 측정하기 어렵고 피토판에 의한 압력 측정오차를 보정할 수 없기 때문이라 본다.

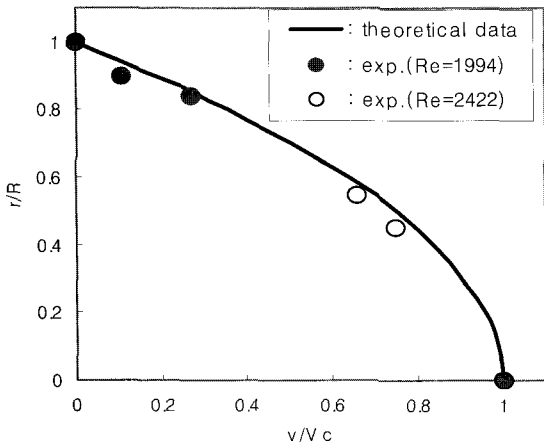


Fig. 8 Comparison of velocity profiles of laminar flow (Re=1914, 2422)

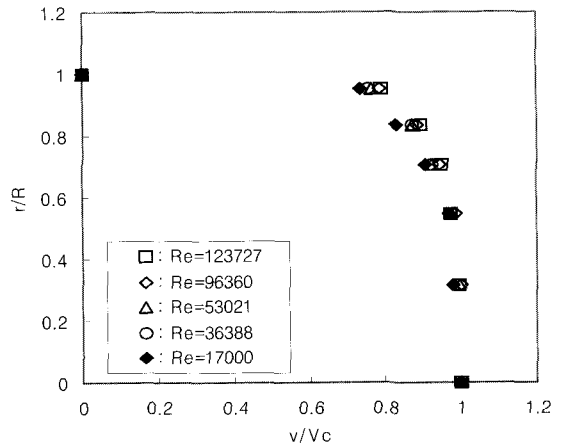


Fig. 10 Comparison of velocity profiles of turbulent flow

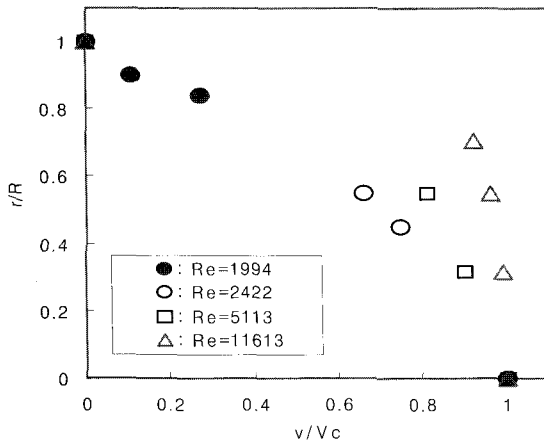


Fig. 9 Comparison of velocity profiles of laminar and turbulent flows

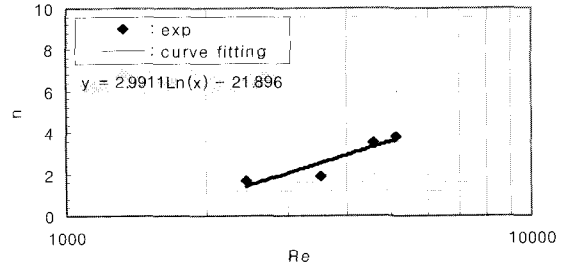


Fig. 11 Exponent, n , for power-law transition velocity profile

본 바와 같이 같은 반경상에서 임의점의 속도(u)와 관 중심속도 (V_c)와의 비인 (u/V_c)가 커짐으로써 상대적으로 속도 (u)가 커지고 점점 평탄한 속도분포를 가지고 있음을 볼 수 있다.

4.3.2 층류와 난류유동 반경방향 속도분포 비교

Fig. 9 그림은 층류와 난류유동에서 관 최대속도(V_c)에 대한 반경방향의 속도분포를 Re수 1,914에서 11,613까지의 반경변화(r/R)에 따른 속도분포(u/V_c)를 각각 나타낸 것이다. Re수가 크면 클수록 즉 층류유동에서 난류유동으로 이동할수록 속도분포곡선은 평탄하게 된다는 것을 입증하였다.

4.3.3 난류유동 반경방향 속도분포 비교

Fig. 10 그림은 완전 난류유동에서 최대속도(V_c)에 대한 반경방향의 속도분포를 Re수 17,000에서 123,727까지의 반경변화 (r/R)에 따른 속도분포의 (u/V_c)를 각각 나타낸 것이다. Re수가 크면 클수록 이 그림에서

4.4 레이놀즈수와 멱지수의 관계

Fig. 10에서 살펴봐왔듯이 Re수가 증가함에 따라 속도분포가 점점 평탄해짐을 알 수 있었다. 따라서, 매끈한 관내 공기유동에서 Re수와 멱지수(n)의 관계를 살펴보기 위하여 Fig. 11과 같이 천이구역인 Reynolds 수 2,442에서 난류구역으로 바뀌는 Reynolds수 4,564까지의 멱지수 n 값을 나타내었다. 이때의 실험값의 추세선은 $n = 2.9911 \ln(Re) - 21.896$ 이 된다. 이것은 Re수가 2,000에서 5,000 사이의 n 값이 1.7~3.5 정도가 되며 Table 1과 같다. 아직 천이구역에 대하여 레이놀즈수(Re)와 멱지수(n)의 관계를 발표한 자료는 찾을 수 없기 때문에 다른 자료들과 비교할 수는 없었다.

완전난류유동에서 n 값의 변화를 살펴보기 위하여 Fig. 12와 같이 Re수 8,717에서 123,727까지의 n 값을 나

Table 1 Data sheet of experimental exponent, n, for power-law velocity profiles for transition flow

Re	1914	2442	3522	4564	5113
n	0.342	1.715	1.913	3.52	3.772

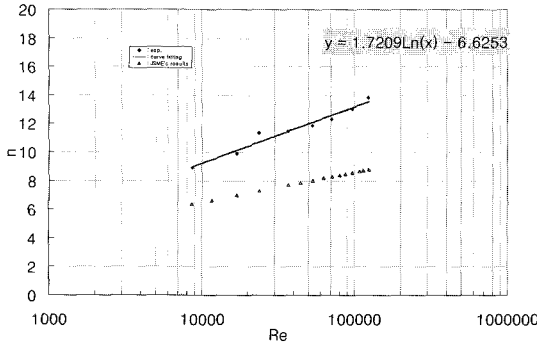


Fig. 12 Exponent, n, for power-law turbulent velocity profiles

Table 1 Data sheet of experimental exponent, n, for power-law velocity profiles

Re	8717	17000	23788	36788	44282	53021
n	8.914	9.886	11.36	11.46	10.62	11.89
Re	62297	70787	79718	96360	113564	123727
n	12.56	12.3	12.45	13.03	13.47	13.83

타내었다. Fig. 12에는 대부분의 실제 흐름에서 근사 값으로써 사용되고 있는 1/7승의 power-law velocity profile⁽¹⁾과 본 실험의 결과 값과 일본기계학회의 기술 자료⁽³⁾와 같이 비교하였다.

Fig. 12에서 보듯이 Re수의 증가에 따른 본 실험에서의 n값 변화는 $n = 1.72 \ln(Re) - 6.6259$ 로서 Re 수가 10^4 에서 10^5 사이의 n 값이 9~14이며 그 값들을 Table 1에 정리하였다. 그러나, Fig. 4와 같이 기존의 Bruce 등⁽²⁾ Re 수가 10^4 에서 10^5 사이의 n 값이 6~7 정도이며, 일본기계학회 기술자료⁽³⁾에서는 n 값이 6~9 정도로 나타나고 있으며 그 추세선이 $n = 2.1 \log(Re) - 1.9$ 로 발표되어 있다. 본 실험 결과는 이 기존의 자료와 비교 하여 볼 때 그 값이 큼을 알 수 있지만, 전체적으로 Re수가 증가함에 따라 n의 값이 증가하고 있음을 알 수 있었다. 본 실험에서 n 값이 크게 측정된 이유는 반응속도가 빠르지 못한 pitot tube를 이용한 측정오차라 판단된다. 또한, 부차적인 원인으로서 실험에서 사용한 실험관의 재료, 관의 조도, 사용유체의 종류, 관의 직경, 충분한 유량 등 실험조건 차이에 의해 발생한 것으로 사료된다. 따라서, 이러한 오차는 불확실성 해석

(uncertainly analysis)을 수행하여 해석한다면 정량적으로도 좋은 결과를 얻을 수 있고 판단된다.

5. 결론

- (1) 관 중심 최대속도(V_c)에 대한 유량(Q)을 도표로 나타냄으로써 유량을 쉽게 추정할 수 있었다.
- (2) 관 최대속도(V_c)에 대한 반경 방향의 속도분포를 고찰하면 Re수가 크면 클수록 즉 층류유동에서 난류유동으로 이동할수록 속도분포곡선은 평탄해 진다.
- (3) 매끈한 원관내 공기의 유동에서 천이구역인 Reynolds 수 2,442에서 4,564 사이의 반경 방향의 속도분포는 Power-law 속도분포 식에 적용하면 n값이 1.7~3.5정도이고 난류구역인 Reynolds 수 10^4 에서 10^5 사이의 반경 방향의 속도분포는 종래 발표된 n값이 6~9정도인데 비하여 실험 결과는 9~14정도로 크게 나타났지만 실험오차를 고려할 때 충분히 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) 박상언, 1997 “매끈한 관내 공기의 난류유동에서 속도분포에 관한 실험적 연구,” 인천전문대학 논문집 Vol. 27. pp. 21~29.
- (2) Bruce, R. M., Donald, F. Y., Theodore, H. O., 1994 Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, Inc.
- (3) 1987, 유체역학 핸드북, 일본기계학회(1979) 기술자료, 丸善株式會社.
- (4) Robert L. M., 1994 Applied Fluid Mechanics, Prentice Hall, Inc.
- (5) Philip, M. G., Richard, J. G., John, I. H., 1992 Fundamentals of Fluid Mechanics, Addison-Wesley, Inc.
- (6) 한국공업규격, 1987, 송풍기의 시험 및 검사방법, 공업진흥청, KS B 6311.
- (7) 윤재복, 서상호, 박상언, 1995 표준유체역학, 삼성실업.
- (8) Fay, J. A., 1994, Introduction to Fluid Mechanics, The MIT Press.
- (9) Schlichting, H., 1979 Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, Inc.
- (10) 1992 Numerical Recipes in Fortran, the Art of Scientific Computing, 2nd Ed., Cambridge University.