財務管理研究 第十九券 第二號(2002. 12), 27～48

차익거래 기회가 없는 이자율 변동모형 하에서 확률적 평균만기 및 선물가격과 선도가격과의 관계에 관한 연구

강병호* · 최종연*

〈요 약〉

본 논문은 이자율의 기간 구조가 차익 거래의 기회가 없도록 움직일 때 새로운 평균만기 측정치인 AR 평균만기(arbitrage-free duration)을 도출하고 선물가격과 선도가격과의 관계를 분석한다. 지금까지 평균만기에 관한 많은 연구들은 수익률 곡선이 특정한 형태로 이동한다는 가정 하에서 평균만기를 유도하고 이에 근거하여 채권가격의 변동치를 측정하고 있다. 본 논문에서는 기존의 평균만기의 가정을 완화한 AR 평균만기를 도출하였다. 여기서 제시하는 AR 평균만기는 기존의 Macaulay 평균만기를 포함하는 일반화한 측정치라고 할 수 있다.

아울러 본 논문에서는 선물가격과 선도가격사이에 존재하는 이론적 관계를 규명하고자 하였다. 선물가격은 선도가격에 비해 할인된 가격이라는 것을 보이고 이자율 변동위험이 선물가격의 할인정도에 미치는 영향을 모형화 하였다.

최근 들어 선물을 이용한 채권 면역화에 대한 실증연구에 관심이 지속적으로 증가하고 있다. 전통적 실증연구 방법론에서는 먼저, 선물가격과 기초채권 가격사이에 존재하는 분산-공분산 행렬을 추정한다. 그런 후 추정된 분산-공분산 행렬을 바탕으로 이자율 위험 헤징 전략을 수립한 후 이 전략에 대한 실증 분석을 수행하였다. 그러나, 전통적 접근법의 가장 큰 문제는 비안정적(non-stationary)인 분산-공분산 행렬을 적절히 고려할 수 없었다는 점이다. 따라서, 본 연구의 결과를 기반으로 하면 최적의 헷징 전략을 수립하기 위한 이론적 기틀을 수립할 수 있을 것이다.

Ⅰ. 머리말

본 논문은 이자율의 기간 구조가 차익거래의 기회가 없도록 움직일 때 새로운 평균만기와 선물가격과 선도가격과의 관계에 대해 다룬다. 기존 평균만기 지표에 관한 많은 연구들은 수익률 곡선이 특정한 형태로 이동한다는 가정 하에서 채권가치의 이자율 민감도를 측정하고 있다. 예를 들어 Macaulay 평균만기는 수익률 곡선의 평행이동을 가정한

* 한양대학교 경영학부 교수

다. Fisher와 Weil(1971)은 최초로 일반화된 평균만기 지표를 도입했으며 이후 많은 연구자들은 다양한 이자율의 확률 과정 하에서의 평균만기 지표에 대하여 연구하였다. 예를 들면, Bierwag(1977) 및 Khang(1979)은 수익률 곡선의 특정한 움직임을 가정하고 각 특정한 움직임에 적합한 평균만기 지표를 유도하였다[1]. 또한, Maloney and Yawitz(1986)는 이전의 많은 평균만기 지표들을 포함하는 수정 평균만기(adjusted duration)을 개발하였다[2].

그러나 이러한 연구들에 있어서 이자율 기간 구조가 특정 형태를 보인다는 것은 분석의 편의를 위하여 도입된 가정이며 이자율이 실제로 그와 같은 형태를 보이는 지에 대한 이론적인 규명은 없었다. 더구나 이들이 가정한대로 이자율 기간 구조가 움직이면 차익거래의 기회가 발생할 수도 있다. 주식을 예로 들어 설명하면 다음과 같다. 현재주가가 100원이고 1기간 무위험 이자율은 10%이다. 또 주가는 이항분포를 따른다고 가정한다. 이 경우 다음기의 주가를 200원 또는 150원으로 가정하면 시장에 차익거래 기회가 존재한다. 왜냐하면 100원을 차입하여 주식을 구입하면 주가가 어떻게 변하든지 간에 항상 이익을 보기 때문이다. 주가를 모형화 할 때 적어도 이와 같은 차익거래 기회가 없도록 모형화 하여야 하며 이자율기간구조를 모형화 할 때도 똑 같은 원리가 적용된다.

임의의 이자율기간 구조의 움직임 하에서 이자율 위험을 최소화하려는 시도는 차익거래 기회가 존재하는 상황에서 최적의 면역전략을 찾는 격이 될 수도 있다. 다시 말해 차익거래 기회가 존재하는 환경 하에서 면역전략은 아무런 의미를 기질 수 없다. 이러한 접근법은 시장 참여자들이 합리적으로 행동한다는 가정과 정면으로 배치된다.

차익거래 기회가 존재하지 않는 상황에서 면역화 전략을 개발하는 것은 단순히 내부적으로 일관된 이론을 개발하는 것 이상의 중요성을 갖는다. 이자율 선물과 이자율 옵션을 이용한 면역화 전략에 관한 연구가 많이 이루어졌지만 아직까지 이 분야에 대해 연구자들의 많은 관심이 집중 되고 있다[3]. 이러한 면역화 전략의 개발은 선물과 옵션과 같은 조건부 청구권(contingent claim)의 균형가격 결정과 밀접한 연관을 갖는다. 이자율 위험을 헷지하기 위해서는 예상치 못한 이자율 곡선의 움직임이 있을 때 채권 포트폴리오의 가치 변화가 조건부 청구권의 가치 변화에 의하여 어떻게 상쇄 되는지를 고려해야 한다. 그런데 조건부 청구권에 대한 합리적인 가치 산정을 위해서는 차익 거래 기

1) 이자율의 기간 구조와 수익률 곡선의 비평행 이동을 허용한 경우의 평균만기 지표들에 관해서는 Bierwag, Kaufman, Schwetzer and Toves(1981)에 잘 정리되어 있다.

2) 이들은 수익률 곡선의 움직임에 관한 가정을 하지 않았기 때문에 이들의 수정 평균만기(adjusted duration)는 실무적으로 사용하기에 한계가 있다.

3) Gay and Kolb(1983)과 CBOT(1988)을 참조하기 바란다.

회가 없는 이자율 곡선의 움직임을 가정하여야 한다.

본 논문의 목적은 이자율기간구조가 특정한 형태를 따른다는 가정 대신에 이자율기간 구조가 차익거래 기회가 없이 움직일 때 평균만기는 무엇이고 선물과 현물가격 간의 관계가 무엇인지를 규명하는 것이다. 구체적으로 본 논문의 목적은 첫째로 확률적인 평균만기(stochastic duration)를 유도하고, 둘째로 차익 거래 기회가 없도록 하는 이자율 곡선의 변동이 주어졌을 때의 이자율 선물의 가격 결정 모형을 도출하는 것이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 II장에서는 분석의 틀을 마련하기 위하여 차익거래 기회가 없는 이자율의 변동에 관한 모형을 제시한다. 또 차익거래 기회가 없는 이자율 변동모형이 주어졌을 때 확률적인 평균만기를 유도한다. 이러한 평균만기를 확률적 평균만기라 부르는 이유는 이자율의 변동이 확률적으로 움직일 때 유도된 평균만기이기 때문이다. 이러한 확률적 평균만기는 Macaulay 평균만기를 일반화한 것이다. 제 III장에서는 이자율 선물의 균형 가격을 유도한다. 그리고 이자율 선물 가격이 선도 가격보다 작음을 보이고, 또한 할인율이 만기의 크기에 따라 커짐을 보인다. 마지막으로 제 IV장은 이 논문의 이론적 틀에 기초하여 수행할 수 있는 여러 가지 실증적인 연구 방향을 제시함으로써 결론을 맺고자 한다.

II. 확률적 평균만기(stochastic duration)

1. TAR 모형(Trinomial Arbitrage-Free Model)

Ho and Lee(1986)는 AR 모형(arbitrage-free interest rate movements model)을 이용하여 이자율 모형에 대한 새로운 접근법을 제시하였다. 이들은 기초 이자율 기간구조가 일관 되게 유지되는 이자율 모형을 제시하였다[4]. 이후 AR 모형은 Bliss and Ronn(1989)에 의하여 이항모형으로부터 삼항모형으로의 확장이 이루어 졌다. 이들은 상태종속(state-dependent) 삼항 모형으로 확장하였고[5], 실제 자료를 이용한 검증을 통해 이자율 기간구조 모형이 삼항모형에서도 잘 성립됨을 보였다. Ritchken and Boenawan(1990)은 이자율이 음수(-)가 되지 않게 하는 추가적인 제약조건을 제시하였으며, Heath, Jarrow and Morton(1990)은 음(-)의 이자율이 발생하지 않는 상태에서 연속 시간 모형(continuous time model)을 유도하였다.

4) AR 모형의 자세한 설명은 Ho and Lee(1986)을 참조 바란다.
5) 이항분포 및 상태독립 대신에 삼항분포 및 상태종속을 가정하였다.

위에서 제시된 다양한 확장 모형들 중 Bliss and Ronn(1989)의 삼항 모형을 이용하여 AR모형 수정[6]을 확장 시켜 보자. 이를 TAR(trinomial arbitrage-free model)이라고 부르기로 한다. TAR 모형을 도출하기 위한 가정은 다음과 같다.

(1) 시장에 장애요인이 존재하지 않는다(frictionless).
(2) 시장은 일정한 간격으로 나누어진 시간축의 단절된 점에서 청산된다.
(3) 채권시장은 완전하다(complete).
(4) 각 시점에 유한한 수의 상태가 존재한다.

$P_i^n(\cdot)$를 시간이 n이고, 상태는 i인 할인함수로 보자. 그러면, 상태 i는 상태가 상승한 개수 p와 상태가 변하지 않는 개수 q의 값에 의해 결정 된다. 시간이 n이고, 상태는 i인 삼항 격자의 경로를 표시하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow P_{i+2}^{n+1}(\cdot) & \text{상승할 경우}(u) \\
P_i^n(\cdot) & \longrightarrow P_{i+1}^{n+1}(\cdot) & \text{변화가 없는 경우}(n) \\
 & \searrow P_i^{n+1}(\cdot) & \text{하락할 경우}(d)
\end{array}
$$

TAR 모형에서는 가능한 세 상태를 "상승(upward)", "하락(downward)" 그리고 "중간(midway)"이라고 부른다. 현재의 할인함수를 $P_i^n(T)$라 할 때 그 다음기에 $P_{i+2}^{n+1}(T)$이 되면 "상승"이 이루어 졌다고 하며, $P_{i+1}^{n+1}(T)$이 되면 "중간"이 이루어졌다고 하고, 그리고 $P_i^{n+1}(T)$이 되면 "하락"이 이루어졌다고 부른다[7]. TAR 모형에도 AR 모형과 마찬가지로 경로독립의 가정을 하기때문에 지나온 경로를 알 필요가 없다. 상태를 의미하는 아래 첨자의 숫자는 "상승"이 이루어지면 2가 증가하고 "중간"이 이루어지면 1이 증가하게 된다. 그러므로 지나온 경로를 알 필요가 없이 "상승"한 횟수와 "중간"으로 간 횟수를 알면 상태가 결정된다. TAR 모형의 경우에 있어 경로독립의 가정을 상태로 이용하여 표현하면 아래와 같이 복잡한 형태가 된다. 예를 들면 (n - 2) 시점에 상승하였다가 (n - 1) 시점에 중간으로 가는 경우에 나타나는 n 시점의 상태는 (n - 2) 시점에 중간으로 갔다가 (n - 1) 시점에 상승하는 경우에 시현하는 n 시점의 상태와 같게 된다.

---

6) AR 모형에 대한 자세한 내용은 본 연구에서는 지면 관계상 생략하고 본 논문의 논리전개에 필요한 부분만 수록한다.
7) 설명의 편의를 위하여 시간 n에서 상태 i를 위치(n, i)로 부르기로 한다.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \text{상승} & \longrightarrow & \text{중간} \equiv \text{중간} & \longrightarrow & \text{상승} & & \\ \text{중간} & \longrightarrow & \text{중간} \equiv \text{하락} & \longrightarrow & & \text{상승} \equiv \text{상승} & & \longrightarrow & \text{하락} \\ & & \text{하락} & \longrightarrow & \text{중간} \equiv \text{중간} & \longrightarrow & \text{하락} & & \end{array}$$

이항 과정인 경우에는 시간이 n 일 때 (n + 1)개의 상태가 존재하고 삼항 과정의 경우에는 (2n + 1)개의 상태가 존재한다. 만일에 경로독립을 가정하지 않는다면 이항과정의 경우에는 2^n개의 그리고 삼항 과정의 경우에는 3^n개의 많은 상태가 존재하여 모형의 현실 적용성을 떨어뜨린다.

TAR 모형에서는 세 가지의 할인함수가 가능하므로 세 가지의 섭동함수를 가진다. 그러므로 n + 1 에서의 할인함수들은 아래와 같다.

상승할 경우,

$$P_{i+2}^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)} h^u(T) \tag{1}$$

변화가 없는 경우,

$$P_{i+1}^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)} h^m(T) \tag{2}$$

하락할 경우,

$$P_i^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)} h^d(T) \tag{3}$$

여기서,

$$h^u(T) = \frac{1}{\pi^u + \pi^m \delta^T + \pi^d \delta^{2T}} \tag{4}$$

$$h^m(T) = \frac{\delta^T}{\pi^u + \pi^m \delta^T + \pi^d \delta^{2T}} \tag{5}$$

$$h^d(T) = \frac{\delta^{2T}}{\pi^u + \pi^m \delta^T + \pi^d \delta^{2T}} \tag{6}$$

π^u, π^m, π^d는 각 상태가 발생할 확률을 의미한다.

만일에 섭동함수의 값이 모든 T에 대하여 1이라면 다음기의 할인함수는 선도할인함수와 동일하다. 그러나 섭동함수의 값이 모든 T에 대하여 1보다 큰 값을 가지면 채권의 가격이 상승했음을 의미하고 1보다 적은 값을 가지면 채권의 가격은 하락했음을 의미한다. 만일에 특정 만기 T에 대해 세 함수 모두 1보다 크거나 혹은 1보다 작다면 재정거래가 생기므로 세 함수 중에서 적어도 한 함수는 1보다 큰 값을 가져야 한다. 섭동함수들은 모두 양의 값을 가져야 하며 또한 식 (7)을 만족시켜야 한다.

$$h^u(0) = h^m(0) = h^d(0) = 1 \tag{7}$$

섭동함수는 만기에 의존하는 함수이다. 그러므로 삼항격자(trinomial lattice)을 구성하기 위해서는 초기할인함수 $P(T)$와 세 섭동함수가 필요하다.

TAR 모형의 경우에는 경로독립의 가정으로 인하여 만족시켜야 할 경로가 이항과정에 비해 그 수가 늘어나게 된다. 그 중에서 아래의 두 경로를 고려하자.

① "상승" ——→ "중간" "중간" ——→ "상승"
② "하락" ——→ "중간" "중간" ——→ "하락"

먼저 ①의 의미를 파악하기 위하여 위치(n, i)에서의 할인함수 $P_i^n(T)$를 고려하자. 식 (1)~식 (3)을 이용하면 한번 상승하고, 다음에 중간으로 간 할인함수는 식 (8)과 같다.

$$P_{i+3}^{(n+2)}(T) = \frac{P_i^{(n)}(T+2)}{P_i^{(n)}(2)} \frac{h^u(T+1)\,h^m(T)}{h^u(1)} \tag{8}$$

유사한 과정에 의하여 먼저 중간으로 가고, 다음에 상승한 경우를 분석 하면 식 (9)와 같다.

$$P_{i+3}^{(n+2)}(T) = \frac{P_i^{(n)}(T+2)}{P_i^{(n)}(2)} \frac{h^m(T+1)\,h^u(T)}{h^m(1)} \tag{9}$$

경로독립의 가정에 의해 식 (8)과 식 (9)는 같아야 하므로 식 (10)이 성립한다.

$$h^u(T+1)\,h^m(T)\,h^m(1) = h^m(T+1)\,h^u(T)\,h^u(1) \tag{10}$$

마찬가지로 경로 ②의 경우에도 동일한 과정을 거치면 식 (11)이 유도된다.

$$h^m(T+1)\,h^m(T)\,h^u(1) = h^u(T+1)\,h^d(T)\,h^m(1) \tag{11}$$

재정거래기회가 없다는 조건을 이용하면 식 (11)에서 $h^d(T)$를 소거할 수 있다.

$$(1-\pi_u-\pi_m)h^u(T+1)h^m(T)h^u(1) = h^u(T+1)h^m(1)(1-\pi h^u(T)-\pi h^m(T)) \tag{12}$$

$A(T) = h^u(T)/h^m(T)$, $1/B(T) = h^m(T)$, $\delta = h^m(1)/h^u(1)$ 이라고 정의하면 식 (10)과 식 (11)은 식 (13)과 식 (14)으로 변한다.

$$A(T) = \delta A(T+1) \tag{13}$$

$$(1-\pi_u-\pi_m) = \delta A(T+1)[B(T)-\pi_u A(T)-\pi_m)] \tag{14}$$

$A(0) = h^u(0)/h^m(0) = 1$ 이므로

$$A(T) = \frac{1}{\delta^T} \tag{15}$$

$$B(T) = (1-\pi_u-\pi_m)\delta^T + \pi_u\frac{1}{\delta^T} + \pi_m \tag{16}$$

$h^m(T) = 1/B(T)$, $h^u(T) = A(T)/B(T)$ 이므로 "상승"과 "중간"일 경우의 섭동함수를 구할 수 있다.

$$h^u(T) = \frac{1}{\pi_u+\pi_m\delta^T+\pi_d\delta^T} \tag{4}$$

$$h^m(T) = \frac{\delta^T}{\pi_u+\pi_m\delta^T+\pi_d\delta^T} \tag{5}$$

재정거래 기회가 없다는 조건을 이용하면 "하락"일 경우의 섭동함수가 유도된다.

$$h^d(T) = \frac{\delta^{2T}}{\pi_u+\pi_m\delta^T+\pi_d\delta^T} \tag{6}$$

TAR 모형에서 δ는 AR 모형에서의 δ와 비슷한 의미를 가진다. AR 모형에서 δ는 두 섭동함수의 차이를 나타낸다. δ가 크면 클수록 가격이 상승 할 경우와 하락 할 경우의 가격의 차이가 더욱 커진다. TAR 모형에서의 δ는 "상승"의 섭동함수와 "중간"의 섭동함수 간의 차이를 의미하는 동시에 "중간"의 섭동함수와 "하락"의 섭동함수 간의 차이를 의미한다. δ가 크면 클수록 이자율의 변화가 적음을 의미하므로 이자율기간 구조의 불확실성과는 반비례의 관계에 있다. δ는 0과 1사이의 값을 가지며 δ가 1의 값을

가지면 이자율기간 구조의 불확실성이 없다.

식 (4)에서 식 (6)의 식을 이용하여 식 (1)에서 식 (3)까지를 반복 수행하면 식 (17)와 같이 시점 n과 상태 I하에서의 할인함수에 관한 식을 도출할 수 있다.

$$P_i^n(T) = \frac{P(T+n)}{P(n)} \times \frac{h^u(T+n-1)\,h^u(T+n-2)\cdots h^u(T)\,\delta^{T(2n-1)}}{h^u(n-1)\,h^u(n-2)\cdots h^u(1)} \quad (17)$$

1. AR 평균 만기

이번 절에서는 수정 AR 모형을 이용하여 채권의 평균만기를 측정하는 방법론을 제시한다. 여기서 제시하는 새로운 평균만기를 AR 평균만기라 부르기로 하자. AR 평균만기는 기본적으로 이산 시간상태 모형(discrete time-state model)을 이용한 확률적 평균만기를 측정하는 것이다. 어떤 주어진 채권이 있고 이 채권의 기간 말 가치가 상태에 따라 다른 값을 갖는다고 하자. 이 채권의 기간 말 가치와 동일한 가치를 갖는 순수할인채의 만기가 바로 주어진 채권의 평균만기가 된다.

[정의 1] 어떤 특정 채권이 $C(j),\ j=1, \cdots, T$와 같은 현금흐름을 보인다고 할 때 이 채권의 평균만기는 다음과 같이 측정 할 수 있다[8].

$$\tau = -\left(\frac{1}{2\ln\delta}\right) \ln\left[\frac{\sum C(j)\,P(j)\,h^u(j-1)}{\sum C(j)\,P(j)\,h^d(j-1)}\right] + 1 \quad (18)$$

AR 평균만기는 이자율이 불확실한 시장 하에서 채권의 이자율 위험에 대한 민감도를 측정하는 것이다. 이러한 AR 평균만기는 무차익거래 조건을 만족하는 이자율 구조 하에서 유도되었기 때문에 이자율위험에 대한 조건부 청구권 (contingent claims)들의 면역화 전략에 대한 새로운 체제를 제공해 줄 수 있다[9]. AR 평균만기는 Macaulay 평균만기와 유사하다. 즉, 이자율 기간구조에 충격을 가하였을 때 평균만기는 채권의 이자율에 대한 민감도를 측정하는 것이다. 그러나, 두 평균만기에는 핵심적인 차이는 존재한다. 첫째, Macaulay 평균만기는 단순히 이자율의 평행이동을 가정하나 AR 평균만기는 수익률곡선의 다양한 균형 이동을 고려하고 있다. 둘째, AR 평균만기는 무한소 변동 (infinitesimal changes)을 가정하지 않는다. 따라서 AR 평균만기를 이용해 유한한 보유

---

8) 보다 자세한 도출 과정은 <부록 A>를 참조하기 바란다.

9) 전통적 평균만기는 채무불이행 위험이 없는 보통채(Straight bond)를 대상으로 하였다. 따라서, 수의상환채 (callable bond)와 같이 옵션성격이 가미된 채권에 대한 면역전략 추구가 불가능하다(Winkelmann, 1989).

기간 동안 수행할 수 있는 면역화 전략을 추구할 수 있다.

만약 수익률 곡선이 평행이동($\pi^d = 1$)하고, 기간이 매우 작다($\Delta \cong 0$)고 가정하면, AR 평균만기와 Macaulay 평균만기는 같아진다. 이는 수정 AR 모형에서의 식 (1)부터 식 (6)을 이용하여 도출 가능하다.

$\pi^d = 1$ 이면,

$$\tau = -\left(\frac{1}{2\ln\delta}\right)\ \ln\left[\frac{\sum C(j)P(j)\delta^{-2(j-1)}}{\sum C(j)P(j)}\right] + 1 \tag{19}$$

이다. 여기서, $\delta^{-1} = 1 + \varepsilon$이고, ε이 매우 작으면, $\delta^{-1}(1+\varepsilon)^j \cong 1 + j\varepsilon$이다. 그리고, 기간이 매우 작다(Δ)는 가정을 사용하면, 식 (19)의 우변은 $\left[\frac{\sum C(j)\ P(j)j}{\sum C(j)P(j)}\right]$로 간단히 정리가 된다. 즉, 이는 Macaulay 평균만기를 의미한다. 그러므로 AR 평균만기는 Macaulay 평균만기 보다 일반적인 모형이며, 채권의 이자율 민감도를 보다 정확하게 측정할 수 있다.

$\pi^d \neq 1$ 이면, AR 평균만기는 Macaulay 평균만기와 달라지게 된다. 할인함수를 다음 식 (20)과 같이 정의하면,

$$P^*(j) = P(j)\,h^u(j-1)\,\delta^{2(j-1)} = P(j)\,h^d(j-1) \tag{20}$$

식 (18)에 식 (20)을 대입하여 정리하면, 식 (21)을 도출 할 수 있다.

$$\tau = -\left(\frac{1}{2\ln\delta}\right)\ \ln\left[\frac{\sum C(j)P^*(j)\delta^{-2(j-1)}}{\sum C(j)P^*(j)}\right] + 1 \tag{21}$$

식 (21)과 식 (19)을 비교하여 보면, 식 (21)에서 할인함수를 식 (20)과 같이 재정의함으로써, 작은 기간(Δ)을 가질수록, 식 (21)은 Macaulay 평균만기에 접근함을 알 수 있다.

Ⅲ. 이자율 선물가격 결정 모형

이번 장에서는 전 장에서 논의된 할인 함수 모형을 이용하여 이자율 선물의 가격 결정 모형을 유도한다. 이를 위해 먼저, F를 만기가 N인 할인 채권의 선물 계약 가격이라고 정의 하자. 그리고 인도일은 $n(n < N)$으로 정의하자. 그러면, 선물 계약은 이자율 기간구조의 움직임에 의존하는 조건부 청구권(contingent claim)이 된다. 그리고 선물 가격, F는 Δ 만큼의 시간이 경과한 후의 선물가격들, F^u, F^n 및 F^d와 다음과 같은

관계로 표현되어 질 수 있다.

[명제 1] F가 선물 가격이고, 다음의 식을 만족하면, 무 차익거래 기회조건을 만족한다[10].

$$F = \pi^u F^u + \pi^n F^n + \pi^d F^d \tag{22}$$

$$F = \sum_{j=0}^{2n} T(j\,;\pi^s,\,n)\,F(j,\,n) = \sum_{p+q+r=n} T(p,\,q\,;\pi^S,\,n)\,F(2p+q,\,n) \tag{23}$$

여기서, $T(p,\,q\,;\pi^S,\,n) = \begin{pmatrix} n \\ p,\,q,\,r \end{pmatrix}(\pi^u)^p(\pi^n)^q(\pi^d)^r$이고, $F(2p+q,n)$는 할인함수가 $P^{(n)}_{2p+q}(t)$이며, $2p+q$ 상태에서의 선물 가격을 의미한다.

인도일에 선물가격은 기초 채권의 현물가격과 같아야 한다. 그러므로,

$$F(2p+q,\,n) = P^{(n)}_{2p+q}(N-n) \tag{24}$$

식 (24)을 식 (23)에 대입하여 정리하면, 다음의 식 (25)와 같다.

$$F = \sum_{p+q+r=n} T(p,\,q\,;\pi^s,\,n)\,P^{(n)}_{2p+q}(N-n) \tag{25}$$

여기서, 식 (4)에서 식 (6)까지의 TAR 모형을 이용하여 각 상태와 시점에 섭동함수(perturbation function)와 할인함수를 식 (25)에 적용하여 정리하면 식 (26)과 같은 간단한 식으로 표현할 수 있다.

$$F(\pi^S,\,\delta\,;n,\,N) = \Phi(\pi^S,\,\delta\,;n,\,N)\,\frac{P(N)}{P(n)} \tag{26}$$

위 식에서,

$$\Phi(\pi^S,\,\delta\,;n,\,N) = \frac{(\pi^u+\pi^n\delta^{n-1}+\pi^d\delta^{2(n-1)})(\pi^u+\pi^n\delta^{n-2}+\pi^d\delta^{2(n-2)})}{(\pi^u+\pi^n\delta^{N-1}+\pi^d\delta^{2(N-1)})(\pi^u+\pi^n\delta^{N-2}+\pi^d\delta^{2(N-2)})}$$
$$\frac{\cdots(\pi^u+\pi^n\delta+\pi^d\delta^2)}{\cdots(\pi^u+\pi^n\delta^{N-n}+\pi^d\delta^{2(N-n)})}\times(\pi^u+\pi^n\delta^{N-n}+\pi^d\delta^{2(N-n)})^n \tag{27}$$

이다.

여기서 $f(n,\,N) = \dfrac{P(N)}{P(n)}$ 로 쓸 수 있다. 물론, $f(n,\,N)$은 선도 가격이다. 그러면,

---

10) [명제 1]의 증명은 <부록 B>에 자세하게 설명되어 있다.

식 (26)으로부터 선물 가격과 선도 가격과의 간단한 관계식을 도출 할 수 있다.

식 (26)에 대한 분석은 다음과 같다. 첫 번째로 $\pi^d = 1$일 때를 고려해 보자. 식 (27)로부터 $\Phi(\pi^S, \delta; n, N) = 1$이 된다. 그러면, 선물가격과 선도가격은 같아지게 된다. 이러한 결과에 대해 아주 직관적인 설명을 할 수 있다. 이자율의 기간구조가 경로 확률 π^S를 가지는 삼항 과정을 따른다고 가정하자. $\pi^d = 1$이면, 투자자는 세가지 상태에서 두 가지에 도달할 가능성을 완전히 무시할 수 있다. 이러한 확실성 하에서는 선물 가격은 선도가격과 같아야만 한다. 즉, 이자율의 불확실성이 없다면 선물가격과 선도가격은 같아질 수 밖에 없다.

다음으로 $\Phi(\pi^S, \delta; n, N)$ 함수의 변형을 통하여 $\Phi(\cdot)$의 속성을 분석 해 볼 수 있다.

$\Phi(\cdot)$은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot) &= \frac{(\pi^u + \pi^n \delta^{n-1} + \pi^d \delta^{2(n-1)})(\pi^u + \pi^n \delta^{N-n} + \pi^d \delta^{2(N-n)})}{(\pi^u + \pi^n \delta^{N-1} + \pi^d \delta^{2(N-1)})} \\ &\times \frac{(\pi^u + \pi^n \delta^{n-2} + \pi^d \delta^{2(n-2)})(\pi^u + \pi^n \delta^{N-n} + \pi^d \delta^{2(N-n)})}{(\pi^u + \pi^n \delta^{N-2} + \pi^d \delta^{2(N-2)})} \\ &\times \cdots = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i \end{aligned} \tag{28}$$

여기서, $\Phi_i = \dfrac{(\pi^u + \pi^n \delta^{n-i} + \pi^d \delta^{2(n-1)})(\pi^u + \pi^n \delta^{N-n} + \pi^d \delta^{2(N-n)})}{(\pi^u + \pi^n \delta^{N-i} + \pi^d \delta^{2(N-i)})}$ 이다.

위 식 Φ_i에서, 분모와 분자 사이의 차분은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\theta_i &= (\pi^u + \pi^n \delta^{N-i} + \pi^d \delta^{2(N-i)}) - (\pi^u + \pi^n \delta^{n-i} + \pi^d \delta^{2(n-i)}) \\ &\quad (\pi^u + \pi^n \delta^{N-n} + \pi^d \delta^{2(N-n)}) \\ &= (\pi^u + \pi^n \delta^{N-i} + \pi^d \delta^{2(N-i)})(\pi^u + \pi^n + \pi^d) \\ &\quad - (\pi^u + \pi^n \delta^{n-i} + \pi^d \delta^{2(n-i)})(\pi^u + \pi^n \delta^{N-n} + \pi^d \delta^{2(N-n)}) \\ &= \pi^u \pi^n (1 + \delta^{N-i} - \delta^{N-n} - \delta^{n-i}) + \pi^u \pi^d (1 + \delta^{2(N-i)} \\ &\quad - \delta^{2(N-n)} - \delta^{2(n-i)}) + \pi^n \pi^d \delta^{N-i} (1 + \delta^{N-i} - \delta^{N-n} - \delta^{n-i}) \\ &= (\pi^u \pi^n + \pi^n \pi^d \delta^{N-i})(1 - \delta^{N-n})(1 - \delta^{n-i}) \\ &\quad + \pi^u \pi^d (1 - \delta^{2(N-n)})(1 - \delta^{2(n-i)})\end{aligned}$$

위 식에서 $\delta \leq 1$이며, 식 (27)를 이용하면 $\Phi(\pi^S, \delta; n, N) \leq 1$이다. 이러한 분석 결과들을 요약하면 [정리 1]과 같다.

[정리 1] 선물 가격과 선도 가격간의 관계식은 식 (26)과 같이 표현되며, 이 관계식으로부터 채권을 기초자산으로 하는 선물가격은 동일한 채권을 기초자산으로 하는 선도가격보다 크지 않다.

선물가격이 선도가격보다 할인된 가격이라는 사실은 일일 정산 효과에 의해 직관적으로 설명 될 수 있다. 먼저 선물가격과 이자율간에는 역의 관계가 성립한다. 즉 이자율이 오르면 선물가격이 하락한다. 선물을 매입한 투자자는 이자율이 오르면 선물가격이 하락하여 손해를 보고 이자율이 떨어지면 선물가격이 상승하여 이익을 본다. 이때 선물계약은 선도계약과는 달리 일일정산의 적용을 받는다. 선물을 매입한 투자자는 이자율이 올라 선물가격이 하락하면 손해를 보기 때문에 손해 본 만큼 자금을 조달하여야 하고 이자율이 떨어져 선물가격이 상승하면 이익을 보기 때문에 이익 본 만큼 자금을 운용할 수 있다. 문제는 자금을 조달할 때는 높은 이자율로 조달하여야 하고 자금을 운용할 때는 낮은 이자율로 하는 다시 말해 조달이자율과 운용이자율간의 비대칭성이 존재한다는 점이다. 이를 달리 표현하면, 선물 매입 포지션(long position)일 때, 일일 정산시 현금 유출이 일어나는 경우에는 높은 이자율로 자금의 차입이 이루어지게 되고, 현금 유입이 생기면 낮은 이자율로 재투자가 이루어진다.

일일정산의 적용여부를 제외하고 선도계약과 선물계약이 동일하다고 가정하자. 이때 선물가격과 선도가격이 동일하다면 매입포지션을 취할 투자자들은 선물계약 대신에 선도계약을 택할 것이다. 왜냐하면 선물계약을 택하면 일일정산을 하여야 되고 일일정산을 하면 조달이자율과 운용이자율간의 비대칭성 때문에 불리해지지만 선도계약을 택하면 조달이자율과 운용이자율간의 비대칭성 때문에 야기되는 불리한 점을 회피할 수 있기 때문이다. 만일 모두 투자자들이 선도계약을 택하게 되면 선물계약은 존재할 수가 없게 될 것이다. 따라서 선물계약이 선도계약과 동시에 존재하기 위해서는, 일일정산시 조달이자율과 운용이자율 간의 비대칭성 때문에 야기되는 불리한 점을 보충해 주어야 한다. 이와 같이 선물계약의 불리한 점을 보충해 주기 위해서는 선물가격이 선도가격보다 작아져야 한다. 즉 선물가격이 낮아져야 투자자들이 선물을 매입하게 될 것이다. 선물가격이 선도가격에 비해 낮아지는 정도는 선물계약이 일일정산 때문에 불리해지는 정도를 보충하는 수준이 될 것이다 [정리 1]에서는 이와 같이 낮아지는 정도를 모형화하고 있다.

한가지 흥미로운 점은 선물가격이 선도가격에 비해 할인된 점을 직관적으로 설명할 때 투자자들의 예상이 주된 역할을 하였지만 식 (26)에서는 투자자들의 예상에 관한 변수가 포함되어 있지 않다. 그러나, 이자율의 차익거래 모형에서 모든 개인 투자자들이 지역기대가설(local expectation hypothesis)를 따른다는 사실을 상기하면 쉽게 해소될 수 있다.

선물가격이 선도가격에 비해 할인된다는 사실은 실증분석에 의해서도 뒷받침되고 있다. Cox, Ingersoll and Ross(1981)이 미재무성 증권(Treasury Bill), 유로달러(Eurodollar)와 여러 통화를 기초자산으로 하는 선물가격 및 선물가격을 통해 이를 실증적으로 보였다[11].

선물가격이 할인되는 정도는 여러 가지 변수에 의해 달라진다. 먼저, 식 (28)의 Φ를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\Phi(\pi^S, \delta; n, N) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - \frac{\pi^n(\pi^u + \pi^d\delta^{N-i})(1-\delta^{N-n})(1-\delta^{n-i}) + \pi^u\pi^d(1-\delta^{2(n-i)})(1-\delta^{2(N-n)})}{(\pi^u + \pi^n\delta^{N-i} + \pi^d\delta^{2(N-i)})}\right] \tag{29}$$

식 (29)으로부터 $\Phi(\pi^S, 1; n, N) = 1$이라고 볼 수 있다. 즉 δ가 1이면 선도가격과 선물가격간의 차이는 없다. 왜냐하면 δ가 1이면 이자율위험이 존재하지 않기 때문이다. 이자율위험이 존재하지 않는다는 의미는 미래 이자율이 일정하거나 또는 이자율의 변화를 완전하게 예측할 수 있다는 뜻이다. 이자율이 일정하면 일일정산이 일어나지 않으므로 선물계약에서 일일정산 때문에 야기되는 불리한 점이 없고 따라서 선물가격과 선도가격이 동일하여야 한다. 미래이자율을 완전하게 예측 가능한 경우도 비슷한 논리로 설명되어 질 수 있다. 또한 $\Phi(\pi^S, \delta; 1, N) = \Phi(\pi^S, \delta; N, N) = 1$이다. 이때, $n = 1$일 때는 일일 정산에 따르는 재조달 위험이 없기 때문에 선물가격의 할인도 없게 된다. 다른 한편으로, $n = N$일 때는, 기초 자산의 가격변동 위험이 없으므로 즉 기초자산의 가격이 액면가이기 때문에 선물가격과 선도가격은 동일하다. 그러므로 우리의 관심사항은 1 보다 크고 N 보다 작은 $n_0(1 < n_0 < N)$에서 $\Phi(\pi^S, \delta; n, N) \leq 1$이

11) Allen and Thurston(1988)은 내재 선도가격과 선물 종가를 이용하여 정반대의 결과를 제시하였다. 그들은 거래비용의 존재, 자료의 부정확성 및 시장의 비효율성 때문에 정반대의 결과가 도출되었다고 주장하였다. 또한 Chang and Chang(1990)은 외환시장에서는 선도가격과 선물가격간에 차이가 없다고 주장하였다. 그러나, Dezhbakhsh(1994)는 Chang and Chang의 검증 방법론에 문제가 있음을 지적하였으며, 아울러 [정리 1]과 같은 결과가 외환시장에서도 존재할 수 있다고 주장하였다.

고 $\Phi(\pi^S, \delta; n, N)$를 이자율 관련 변수로 표현해 보자는 것이다.

$$g_i(\pi^S, \delta; n, N) = \frac{\pi^n(\pi^u + \pi^d \delta^{N-i})(1-\delta^{N-n})(1-\delta^{n-i}) + \pi^u \pi^d (1-\delta^{2(n-i)})(1-\delta^{2(N-n)})}{(\pi^u + \pi^n \delta^{N-i} + \pi^d \delta^{2(N-i)})}$$

로 놓으면, 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{g_i(\pi^S, \delta; n, N)}{g_i(\pi^S, \delta; n, N+1)} = \frac{\pi^u + \pi^n \delta^{N-i+1} + \pi^d \delta^{2(N-i+1)}}{\pi^u + \pi^n \delta^{N-i} + \pi^d \delta^{2(N-i)}} \times \frac{\pi^n(\pi^u + \pi^d \delta^{N-i})(1-\delta^{N-n})(1-\delta^{n-i})}{\pi^n(\pi^u + \pi^d \delta^{N-i+1})(1-\delta^{N-n+1})(1-\delta^{n-i})} \times \frac{\pi^u \pi^d (1-\delta^{2(n-i)})(1-\delta^{2(N-n)})}{\pi^u \pi^d (1-\delta^{2(n-i)})(1-\delta^{2(N-n+1)})} < 1$$

그러므로, $g(\pi^S, \delta; n, N)$은 N에 대해 증가함수이다. 식 (29)에 의하면, $\Phi(\cdot)$는 기초자산인 채권의 만기가 증가할수록 감소한다. 이는 선물가격이 선도가격에 비해 할인되는 정도가 기초자산인 채권의 만기가 길수록 증가한다는 사실을 보여준다. 또한 g_i를 δ에 대해 미분하면 음의 값을 갖는다. $\frac{\partial g_i(\pi^S, \delta; n, N)}{\partial \delta} < 0$ 또

$\Phi(p_i^s, \delta; n, N) = \prod_{i-1}^{n} (1 - g_i(\pi^S, \delta; n, N))$이기 때문에 $\frac{\partial \Phi(\pi^S, \delta; n, N)}{\partial \delta} > 0$

임을 보일 수 있다. 이는 이자율 변동성이 클수록, 선물가격이 선도가격에 비해 할인되는 정도는 커지며 이는 또 할인되는 정도가 시간에 대해 가변적임을 의미하기도 한다.

마지막으로 이표채는 할인채의 포트폴리오로 볼 수 있으므로, 이표채을 기초자산으로 하는 선물계약은 할인채를 기초자산으로 하는 선물계약의 포트폴리오 볼 수 있다. 그러므로, 할인채에 대한 선물가격 결정모형인 식 (26)을 확장하면 이표채를 기초자산으로 하는 선물가격 결정모형을 쉽게 유도할 수 있다. 또 할인채 선물계약에 적용된 논리 또한 이표채 선물계약에 똑 같이 적용될 수 있다.

Ⅳ. 맺음말

본 논문은 이자율의 기간 구조가 삼항분포를 따르는 동시에 차익 거래의 기회가 없도

록 변동할 때 평균만기를 유도하고 선물가격결정에 대해 논하였다. 첫째, 본 논문에서는 AR 평균만기를 도출하였다. 이러한 평균만기는 기존의 Macaulay 평균만기를 일반화한 지표라고 할 수 있다. 향후 AR 평균만기와 기존의 다른 평균만기(Gultenkin and Rogalski, 1984)와의 비교분석을 위한 실증연구가 필요하다. 지금까지 Macaulay 평균만기가 Macaulay 평균만기를 유도하기 위해 가해진 여러 가지 제약조건에도 불구하고 다른 전통적 평균만기에 비해 유효성이 결코 떨어지지 않았다. 따라서 Macaulay 평균만기를 일반화한 AR 평균만기가 어떤 실증분석결과를 보일지 흥미로운 과제며 이는 향후 실증 연구 과제로 남겨 둔다.

둘째, 본 논문은 이자율 선물의 가격결정 모형을 도출하였다. 즉, 선물가격은 선도 가격에 비해 할인된 가격이라는 것을 보였다. 이전 연구는 선물가격과 선도가격의 관계에 대해 실증분석 하였다. 그러나, 이러한 연구들은 T-Bills 선물에 대해서만 수행하였다. 본 논문의 분석모형에 의하면 T-Bill 선물에서는 할인율이 작아 선물가격의 할인 정도를 실증적으로 보이기 어렵다. 따라서, T-Bond에 대한 선물가격과 선도가격을 실증분석하고 이러한 분석결과가 이론모형의 할인율과 일치하는지를 규명하는 것은 흥미로운 연구주제이다.

최근 들어 선물을 이용한 채권 면역화에 대한 실증연구에 관심이 지속적으로 증가하고 있다. 전통적 실증연구 방법론은 먼저, 선물가격과 기초채권 가격사이에 존재하는 분산-공분산 행렬을 추정한다. 추정된 분산 - 공분산 행렬을 바탕으로 이자율 위험 헤징 전략을 수립한 후 이러한 전략에 대한 실증 분석을 수행하였다. 그러나, 이러한 접근법의 가장 큰 문제는 비안정적(non-stationary)인 분산-공분산 행렬을 적절히 고려할 수 없었다는 점이다. 따라서, 본 연구의 결과를 기반으로 하면 최적의 헷징 전략을 수립하기 위한 이론적 기틀을 수립할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

Allen, L. and T. Thurston, "Cash-Futures Arbitrage and Forward-Futures spread in the Treasury Bill Market," *Journal of Futures Markets*, 8, (1988), 563-573.

Bierwag. G., "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, (Jan. 1977), 725-742.

________, G. Kaufman, R. Schweitzer and A. Toevs, "The Art of Risk Management in Bond Portfolios," *Journal of Portfolio Management*, 7, (Spring 1981), 27-36.

Black. F, E. Derfman and W. toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*, 46, (Jan. Feb. 1990), 33-39.

Bliss. R, and E. Ronn, "Arbitrage-Based Estimation of Non-stationary Shifts in the Term Structure of Interest rates," *Journal of Finance*, 44, (Jul. 1989), 591-610.

Capozza. D. R and B. Cornell, "Treasury Bill Pricing in the Spots and Futures Markets," *Review of Economics and Statistics*, 61, (1979), 513-520.

Chang. C and J. Chang, "Forward and Futures Prices : Evidence from the Foreign Exchange Markets," *Journal of finance*, 45, (Sep. 1990), 1333-1336.

Chicago Board of Trade, "Using Interest rate Futures in Portfolio Management," COT, 1988.

J. C. Cox, J. E. Ingersoll Jr. and S. A. Ross, "The Relationship between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9, (1981), 321-346.

Dezhbakhsh, H., "Foreign Exchange Forward and Futures Prices. : Are They Equal?," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, (Mar. 1994), 75-87.

Dunetz, M. L. and J. M. Mahoney, "Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds," *Financial Analysis Journal*, 44, (May-Jun. 1988), 53-72.

Fisher, L. and R. Weil, "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations : Returns to Bond Holders from Nave and Optimal Strategies," *Journal of Business*, 44, (Oct. 1971), 408-431.

Gay, G. and R. Kolb, "Interest Rate Futures : a New Perspective on Immunization," *Journal of Portfolio Management*, 9, (Fall 1983), 65-70.

Gultekin, B. and R. Rogalski, "Alternative Duration Specification and the Measurement of Basic Risk : Empirical Tests," *Journal of business*, 57, (Oct. 1984), 241-264.

Health, D, R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term structure of Interest Rates : A Discrete time approximation," *Journal of financial and quantitative analysis*, 25, (Dec. 1990), 1011-1029.

Hilliard, J., "Hedging Interest Rate Risk with futures Portfolio under Term structure of Effects," *Journal of finance*, 39, (Dec. 1984), 1547-1569.

Ho, T. S. Y. and S. B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41, (Dec. 1986), 1011-1029.

________, "Pricing of call and sinking fund provisions on corporate bonds under interest rate risk : empirical evidence," *International Journal of finance*, 2, (Autumn 1989), 1-17.

Khnag, C., "Bond Immunization when Short-Term Rates Fluctuate More Than Long-Term Rates," *Journal of finance and Quantitative Analysis*, 14, (Dec. 1979), 1085-1090.

Maloney, K. J. and J. B. Yawitz, "Interest rate Risk, Immunization and Duration," *Journal of Portfolio Managaement*, 12, (Spring 1986), 41-48.

Meulbroek, L., "A Comparison of Forward and futures Prices of an Interest Rate-Sensitive Finacial Asset," *Journal of finance*, 47, (Mar. 1992), 381-396.

Ritchken, P. and K. Boenawan, "On ArbitrageFree Pricing of Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 45, (Mar. 1990), 259-264.

Winkelmann, K., "Uses and Abuses of Duration and Convexity," *Financial analysts Journal*, 45, (Sep. - Oct. 1989), 72-75.

<부 록 A> AR 평균만기 도출 과정

$j(j=1, \cdots, T)$ 시점에 $C(j)$를 지불하는 채권을 고려하자. 할인함수 $P(T)$가 주어져 있다면, 채권의 가치는 식 (A1)이 된다.

$$B = \sum_{j=1}^{T} C(j)P(j) \tag{A1}$$

1기간 후의 할인함수가 $P^u(T)$가 되면, 채권가격은 식 (A2)로 변한다.

$$B^u = \sum_{j=1}^{T} C(j)P^u(j-1) \tag{A2}$$

이와 비슷하게, 1기간 후의 할인함수가 $P^u(T)$ 또는 $P^d(T)$가 되면, 채권가격은 각각 식 (A3)와 식 (A4)가 된다.

$$B^n = \sum_{j=1}^{T} C(j)P^n(j-1) \tag{A3}$$

$$B^d = \sum_{j=1}^{T} C(j)P^d(j-1) \tag{A4}$$

그러나 수정된 AR 모형에서의 정의에 의해(식 (1)~식 (3)에서)

$$P^u(j) = \frac{P(j+1)}{P(1)}\ h^u(j) \tag{A5}$$

$$P^n(j) = \frac{P(j+1)}{P(1)}\ h^n(j) \tag{A6}$$

그리고

$$P^d(j) = \frac{P(j+1)}{P(1)}\ h^d(j) \tag{A7}$$

식이 된다.

평균만기가 같은 채권들은 1원당 같은 수익을 지불한다고 가정하자. 그리고 순수 할인채권에 대한 평균만기는 그 채권의 만기가 된다고 가정하자. τ는 채권의 평균만기를 나타내고, $P(\tau)$는 만기가 τ인 할인채권의 가격을 표시한다고 할 때, 어떤 상수 α에

대해 다음의 식이 성립한다.

$$B = \alpha P(\tau) \tag{A8}$$

$$B^u = \alpha P^u(\tau - 1) \tag{A9}$$

$$B^n = \alpha P^n(\tau - 1) \tag{A10}$$

그리고

$$B^d = \alpha P^d(\tau - 1) \tag{A11}$$

식 (A2)에서 식 (A10)까지 결합하면 식 (A12), 식 (A13) 및 식 (A14)을 구하게 된다.

$$\sum_{j=1}^{T} C(j)\frac{P(j)}{P(1)} h^u(j-1) = \alpha\frac{P(\tau)}{P(1)} h^u(\tau - 1) \tag{A12}$$

$$\sum_{j=1}^{T} C(j)\frac{P(j)}{P(1)} h^n(j-1) = \alpha\frac{P(\tau)}{P(1)} h^n(\tau - 1) \tag{A13}$$

$$\sum_{j=1}^{T} C(j)\frac{P(j)}{P(1)} h^d(j-1) = \alpha\frac{P(\tau)}{P(1)} h^d(\tau - 1) \tag{A14}$$

α를 제거하기 위해 식 (A12)와 식 (A14)식을 사용하면, 식 (A15)를 구하게 된다.

$$\frac{h^u(\tau - 1)}{h^d(\tau - 1)} = \frac{\sum C(j) P(j) h^u(j-1)}{\sum C(j) P(j) h^d(j-1)} \tag{A15}$$

그리고, 식 (4)와 식 (6)으로부터 식 (A16)을 얻게 된다.

$$\frac{h^u(\tau - 1)}{h^d(\tau - 1)} = \delta^{-2(\tau-1)} \tag{A16}$$

따라서, 식 (A15)와 식 (A16)을 결합하면 다음의 식 (A17)이 유도된다.

$$\tau = -\left(\frac{1}{2 \ln \delta}\right) \ln\left[\frac{\sum C(j) P(j) h^u(j-1)}{\sum C(j) P(j) h^d(j-1)}\right] + 1 \tag{A17}$$

다른 식들의 결합을 이용하면 동일한 AR 평균만기 측정치를 얻게 된다.
식 (A12) 및 식 (A13)을 활용하면 식 (A18)이 유도된다.

$$\tau = -\left(\frac{1}{\ln \delta}\right) \ln\left[\frac{\sum C(j)P(j)h^{u}(j-1)}{\sum C(j)P(j)h^{n}(j-1)}\right] + 1 \qquad \text{(A18)}$$

그리고, 식 (A13) 및 식 (A14)으로부터는 식 (A19)가 유도된다.

$$\tau = -\left(\frac{1}{\ln \delta}\right) \ln\left[\frac{\sum C(j)P(j)h^{n}(j-1)}{\sum C(j)P(j)h^{d}(j-1)}\right] + 1 \qquad \text{(A19)}$$

식 (A18)과 식 (A19)가 동일함을 보이기 위해, 다음의 조건식이 만족되어야 한다.

$$\ln\left[\frac{\sum C(j)P(j)h^{u}(j-1)}{\sum C(j)P(j)h^{n}(j-1)}\right] = \ln\left[\frac{\sum C(j)P(j)h^{n}(j-1)}{\sum C(j)P(j)h^{d}(j-1)}\right]$$

위 식을 정리하면 식 (A20)으로 정리 되어 진다.

$$[\sum C(j)P(j)h^{u}(j-1)][\sum C(j)P(j)h^{d}(j-1)] = [\sum C(j)P(j)h^{n}(j-1)]^{2} \qquad \text{(A20)}$$

식 (A12), 식 (A13), 식 (A14) 및 경로독립조건을 사용하면, 식 (A20)을 쉽게 증명할 수 있다. 따라서, 식 (A18)과 식 (A19)는 동일한 식이고, 더 나아가 $\frac{(\text{식 }(A18) + \text{식 }(A19))}{2}$ 는 식 (A17)과 동일한 식이 된다. Q.E.D

<부 록 B> [명제 1]의 증명

만기가 $T(T>1)$인 순수할인채권 한 단위와 만기가 $K(K>1)$인 순수할인채권 α 단위, 그리고 β단위의 선물계약으로 구성된 포트폴리오를 가정하자. 만일 포트폴리오 수익이 시점 t_0와 t_1사이에서 위험을 시현하지 않는다면, 포트폴리오의 가치는 그 기간 말에 발생하는 상태에 관계없이 동일해야 한다. 더 나아가 어떠한 차익거래의 기회도 존재하지 않는다면, 포트폴리오 수익률은 무위험자산 수익률과 동일하여야 한다.

$$V_{1,u} = V_{1,n} = V_{1,d} = \frac{V_0}{P(1)} \tag{B1}$$

여기서

$$V_0 = P(T) + \alpha P(K) \tag{B2}$$

$$V_{1,u} = P^u(T-1) + \alpha P^u(K-1) + \beta(F^u - F) \tag{B3}$$

$$V_{1,n} = P^n(T-1) + \alpha P^n(K-1) + \beta(F^n - F) \tag{B4}$$

$$V_{1,d} = P^d(T-1) + \alpha P^d(K-1) + \beta(F^d - F) \tag{B5}$$

그러나 수정 AR 모형(식 (1)~식 (3))으로부터 다음 식들이 성립한다.

$$P^u(T-1) = \frac{P(T)}{P(1)} h^u(T-1) \tag{B6}$$

$$P^n(T-1) = \frac{P(T)}{P(1)} h^n(T-1) \tag{B7}$$

$$P^d(T-1) = \frac{P(T)}{P(1)} h^d(T-1) \tag{B8}$$

식 (B3)에서 식 (B8)까지를 이용하면, 다음의 식 (B9)와 식 (B10)을 얻게 된다.

$$\alpha \frac{P(K)}{P(1)} (h^u(K-1) - h^n(K-1)) + \beta(F^u - F^n) = \frac{P(T)}{P(1)} (h^n(T-1) - h^u(T-1)) \tag{B9}$$

$$\alpha \frac{P(K)}{P(1)} (h^n(K-1) - h^d(K-1)) + \beta(F^n - F^d) = \frac{P(T)}{P(1)} (h^d(T-1) - h^n(T-1)) \tag{B10}$$

식 (B9) 및 식 (B10)으로부터 α와 β를 구할 수 있다.

$$\alpha = \frac{P(T)[(F^n - F^d)(h^n(T-1) - h^u(T-1))}{P(K)[(F^n - F^d)(h^u(K-1) - h^n(K-1))} - \frac{(F^u - F^n)(h^d(T-1) - h^n(T-1))]}{(F^u - F^n)(h^n(K-1) - h^d(K-1))]}$$

$$\beta = \frac{P(T)[X-Y]}{P(K)[(F^u - F^n)(h^n(K-1) - h^d(K-1))} - \frac{P(T)[X-Y]}{(F^n - F^d)(h^u(K-1) - h^n(K-1))]}$$

여기서, $X = (h^n(K-1) - h^d(K-1)(h^n(T-1) - h^u(T-1))$

$Y = (h^u(K-1) - h^n(K-1)(h^d(T-1) - h^n(T-1))$이다.

식 (B10)에 α와 β를 대입하고, 간단히 정리하면 다음의 식 (B11)를 구하게 된다.

$$F = \frac{A}{D}F^u + \frac{B}{D}F^n + \frac{C}{D}F^d \qquad \text{(B11)}$$

여기서, $A = (h^n(T-1) - h^d(T-1)2h^u(K-1) - h^n(K-1) - 1)$

$-(h^n(K-1) - h^d(K-1)2h^u(T-1) - h^n(T-1) - 1)$

$B = (h^u(T-1) - 1)(h^u(K-1) - h^d(K-1))$

$(h^u(K-1) - 1)(h^u(T-1) - h^d(T-1) - 1)$

$C = (h^u(K-1) - 1)(h^u(T-1) - h^n(T-1))$

$(h^u(T-1) - 1)(h^u(K-1) - h^n(K-1) - 1)$

$D = (h^n(T-1) - h^d(T-1))(h^u(K-1) - h^n(K-1))$

$-(h^n(K-1) - h^d(K-1))(h^u(T-1) - h^n(T-1))$

$A + B + C = D$ Q.E.D