

원통 좌표계에서의 전기비저항 유한요소 모델링

최원석¹⁾ · 김정호²⁾ · 박권규³⁾ · 김학수¹⁾ · 서정희⁴⁾

FEM Electrical Resistivity Modeling in Cylindrical Coordinates

Wonseok Choi¹⁾, Jung-Ho Kim²⁾, KwonGyu Park³⁾, Hak-Soo Kim¹⁾ and Jung-Hee Suh⁴⁾

요 약 : 유한요소법은 다양한 공학문제에 대해 수치적으로 해를 구하는 방법으로, 유한개의 요소를 이용하여 모형의 형상을 자유롭게 설정할 수 있기 때문에 3차원 모델링에 많이 적용된다. 공학에서 모델링은 해의 정확도와 계산시간이 중요한 의미를 가지므로, 유한요소법을 이용할 경우 주어진 공간에 대해 물리적인 연속성을 가지며 간단한 방법으로 요소를 구성하는 것이 효율적이다. 그러나 기존의 유한요소법에서는 구조적으로 복잡한 대상에 대해서 체계적인 요소 구성방식이 존재하나, 기하학적으로 단순한 원통형 물체에 대해서는 원통의 중심부에 대한 묘사가 자유롭게 못하다. 이 연구에서는 기존의 좌표변환식에서 처리할 수 없었던 좌표계의 원점을 수학적으로 정의하여 완전한 원통 좌표계에서의 유한요소법을 구성하고자 한다. 원통 좌표계에서는 모든 영역을 육면체 요소로 구성하여 유한요소법을 적용할 수 있으므로 원통형 물체나 공간으로 표현되는 시스템의 구조해석에 효율적이다. 한편, 이 방법은 단일 시추공과 지표의 탐사선으로 구성된 새로운 방식의 시추공-지표간 전기비저항 탐사법을 수행할 수 있는 기초를 제공하며, 이를 이용할 경우 전기비저항 탐사의 환경 분야에 대한 적용성을 높일 것으로 판단한다.

주요어 : 유한요소법, 3차원 모델링, 원통의 중심부, 원통 좌표계, 시추공-지표간 전기비저항 탐사

Abstract : The finite element method (FEM), a powerful numerical modeling tool for solving various engineering problems, is frequently applied to three-dimensional (3-D) modeling thanks to its capability of discretizing and simulating the shape of model with finite number of elements. Considering the accuracy of the solution and computing time in modeling of engineering problems, it is preferable to construct physical continuity and simplify mesh system. Although there exist systematic mesh generation systems for arbitrary shaped model, it is hard to model a simple cylinder in terms of 3-D coordinate system especially in the vicinity of the central axis. In this study I adopt cylindrical coordinate system for modeling the 3-D model space and define the origin of the coordinates with mathematically clear coordinate transformation. Since we can simulate the whole space with hexahedral elements, the cylindrical coordinate system is effective in handling the 3-D model structure. The 3-D dc resistivity modeling scheme developed in this study provides basic principle for borehole-to-surface resistivity survey, which can be a useful tool for the application to environmental problem.

Keywords : FEM, 3-D modeling, central axis, cylindrical coordinate system, borehole-to-surface resistivity survey.

서 론

전기비저항 탐사는 지하수 탐사, 지하자원 탐사, 지질 조사에 널리 이용되고 있으며, 최근에는 지반조사와 관련된 토목분야와 각종 오염원의 영향 평가를 위한 환경분야에도 활발하게 응용되고 있다. 전통적인 적용에서는 탐사의 목적이 단층/파쇄대 등의 지질구조와 관련된 저비저항대의 탐사이므로, 개략적인 2차원 탐사를 이용하였다. 반면에 최근에는 탐사의 목적이

암석의 재질 평가, 암반의 전기전도도 분포 추정, 이상대의 발달상태 파악과 같이 지하 매질의 비저항 분포에 대한 정량화나 입체적인 영상화 추세이다. 이를 위해서는 지표에서의 탐사선을 격자망으로 구성하는 3차원 지표탐사나, 시추공간 단면의 영상을 얻는 토모그래피 기법을 활용하여 많은 양의 자료를 수집하고 정량화된 영상결과를 해석에 이용하고 있다.

수집된 탐사자료를 영상화시키는 역산에서는 모델링을 반복적으로 실시하는데, 이 모델링은 탐사의 활용 목적이 변함에

*2002년 8월 13일 접수

1) (주) 지오제니 컨설턴트

2) 한국지질자원연구원, 탐사개발연구부

3) Kansas Geological Survey

4) 서울대학교 지구환경시스템공학부

따라 모형의 3차원화, 지형효과와의 고려, 토모그래피 기법 도입 등에 관한 연구로 발전하였으며 탐사법의 개선과 역산 기법의 연구에 영향을 주고 있다. 특히 모델링을 정량화하기 위해서는 모형의 형상을 자유롭게 설정하여 임의의 형상의 지하구조와 모형을 표현할 수 있어야 하는데, 이를 위한 수치적인 해석 기법으로 유한요소법(finite element method; FEM)의 활용이 가장 유용하다.

유한요소법에 의한 전기비저항 탐사의 3차원 모델링은 Pridmore 등(1981)에 의해 도입된 후, Holcombe 등(1984)의 요소의 변형을 이용한 3차원 지형보정 알고리즘 연구, 박권규(1994)의 3차원 지형보정에 대한 연구가 발표되었다. 한편 유한요소법을 이용한 전기비저항 탐사자료의 역산은 Park 등(1991)의 3차원 역산, 이명종(2000)의 지표탐사 자료와 시추공 간 자료에 대한 역산 등에 의해 지하구조의 3차원 영상화에 대한 연구가 발표되었다.

이러한 전기비저항 탐사에 대한 3차원 모델링을 이용하여 3차원 지표탐사나 시추공 탐사를 수행하면 실제 지하구조를 입체적으로 모형화 할 수 있는데, 대부분의 모델링 방법이 반무한 지하 매질을 직육면체 구조로 표현하는 직교 좌표계를 이용한다. 직교 좌표계는 지하구조를 수치적인 모형으로 표현할 때 모형과 전극의 위치를 쉽게 설정할 수 있으나 경우에 따라서는 복잡해질 수 있다. 대표적인 경우가 단일 시추공과 시추공 주변의 지표탐사 탐사선을 이용한 전기비저항 탐사로서 직교 좌표계를 이용할 경우 시추공의 구현에 있어 경제적이지만, 원통 좌표계에서는 시추공을 하나의 축으로 설정하고 시추공으로부터의 방사거리, 방향각을 다른 좌표축으로 하여 지표의 전극 위치를 임의로 설정할 수 있으므로 효율적인 3차원 모델링을 기대할 수 있다. 그러므로 원통 좌표계에서의 유한요소법을 이용한 모델링 알고리즘은 시추공-지표(hole-to-surface) 방식의 3차원 전기비저항 탐사법을 시도할 수 있다.

따라서 이 연구에서는 원통 좌표계에서의 유한요소 모델링 알고리즘을 개발하며, 기존의 원통 좌표계에서의 유한요소 모델링의 문제점인 빈 원통(hollow cylinder) 구조를 극복함으로써 시추공을 충분히 구현하는 것을 목적으로 한다. 개발된 알고리즘의 검증은 해석적 방법으로 구해진 해와 다른 방법의 모델링 결과와의 비교를 통해 이루어졌다.

원통 좌표계에서의 유한요소법

유한요소법은 유한개의 요소로 정의된 특정 성질의 기저함수를 주어진 문제에 맞는 적분형의 원리에 적용시켜 연속체를 유한요소 문제로 수식화하는 근사적 해법으로, 자연현상이나 구조물의 해석을 위해 물리학, 공학, 의학 분야 등에 널리 이용되고 있다. 미분 방정식의 해를 유한요소법으로 구하는 과정에서 해의 정확도와 계산시간은 대부분 요소의 구성방식에 의존하는데, 해의 정확도를 향상시키기 위해서는 물체의 기하학

적인 특성을 고려하여 요소의 종류를 결정하고, 분할 영역내의 함수나 미분함수의 변화량이 많거나 기하학적인 형상이 복잡한 곳은 많은 수의 작은 요소로 분할하여 물리적으로 연속성을 높여야 한다. 그러나 요소의 수가 증가하면 계산시간이 기하급수적으로 늘어나므로 요소의 수를 줄이면서 해의 정확도를 높이는 방법이 효율적이다. 유한요소법의 효율성에 대한 연구는 여러 분야에서 이루어져 아무리 복잡한 물체라도 최적의 요소 구성 방식이 존재하며 이를 자동화한 상용 프로그램도 많이 있다. 그러나, 원통형 물체는 단순한 형태이지만 기존의 유한요소법에서는 원통의 중심부를 기하학적으로 복잡한 구조로 인식한다. 이 문제는 원통의 중심부가 갖는 좌표의 특이함에 의한 것인데, 이 연구에서는 이 부분을 수학적으로 처리하여 기존의 방법에 비해 효율적으로 요소 구성을 할 수 있는 유한요소법을 제시하고자 한다.

요소의 특성

유한요소법에서 2차원 요소로는 삼각형 요소와 사각형 요소가 주로 이용되는데, 사각형 요소가 안정적인 결과를 보이므로 기하학적으로 복잡한 영역도 다수의 사각형 요소로 분할하며 해의 안정성에 영향을 미치지 않는 일부 영역에 대해 삼각형 요소를 보조적으로 사용한다. 한편, 요소의 꼭지점에 절점이 있는 선형요소에 비해 요소의 변이나 내부에도 절점이 있는 고차 요소는 분할 영역의 기하학적인 구조와 함수값을 부드럽게 표현할 수 있으므로 고차의 삼각형 요소를 이용할 수도 있으나 절점의 수가 많아지면 계산시간이 기하급수적으로 늘어나는 단점이 있다. 한편, 3차원 요소는 요소의 면이 갖는 2차원 요소의 특징을 포함하므로, 삼각형 요소가 포함된 고차의 삼각기둥(triangular-prism), 사면체(tetrahedral) 요소보다, 요소의 면이 사각형만으로 구성된 선형의 육면체(hexahedral) 요소를 이용하는 것이 효율적이다.

따라서 복잡한 물체에 대한 유한요소법의 적용은 해의 정확도와 계산시간을 고려하여 3차원(입체) 요소를 선택하면 되나, 원통형 물체는 기하학적인 단순함에도 요소의 선택과 구성이 쉽지 않다. Fig. 1의 (a), (c), (e)는 기존의 유한요소법에서 다양한 입체 요소를 이용하여 원통형 물체를 구성하는 방법으로 Fig. 1(a), (c)는 직교 좌표계에서의 방식이고, Fig. 1(e)는 원통 좌표계에서의 방식이다. 설명의 간편하게 하기 위해 여기서는 3차원인 원통의 요소 분할에 있어 문제가 되는 원통의 단면 즉, 원을 구성하는 2차원 요소로 국한하며, 좌표계도 2차원의 직교 좌표계나 극 좌표계로 표시한다.

Fig. 1(a)는 직교 좌표계에서 사각형 요소만으로 원을 구성한 것으로 원의 중심에서 일정거리 이상은 원주방향의 인접 요소가 원점에 대칭인 구조를 보이나 원의 중심부에서는 요소들이 격자형태로 구성된다. 이 구조는 원의 중심점에서 사각형 요소의 두 절점이 한 점으로 합쳐져 삼각형 요소로 바뀌는 것을 피하기 위한 것이다. 이 방법의 특징은 사각형 요소만을 이

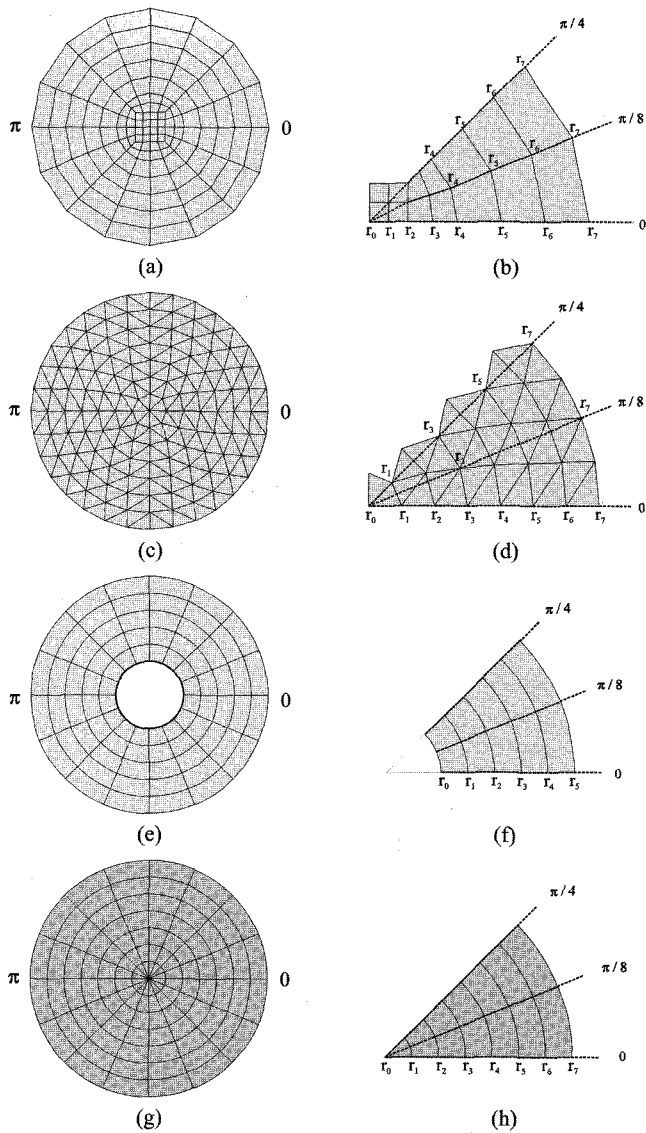


Fig. 1. Finite element discretization of a circle using various type of elements: (a) circle with rectangular elements in cartesian coordinates and its one-division (b), (c) circle with triangular elements in cartesian coordinates and its one-division (d), (e) annular with rectangular elements in polar coordinates and one-division (f), (g) circle with rectangular elements in polar coordinates and its one-division (h).

용하기 때문에 고차의 요소를 사용하지 않고도 안정적인 결과를 기대할 수 있다. 그러나 Fig. 1(a)의 일부 구간을 확대한 Fig. 1(b)에서는 방향각이 $\pi/8$ 나 $\pi/4$ 로 변환에 따라 거리좌표의 일부구간($r_1 \sim r_3$)이 절점에 표현되지 못한다. 따라서 원의 중심으로부터 일정한 거리마다 수치적인 해가 필요한 경우에는 주변 절점에서의 값으로 보간 한다. 한편, 원의 외각부인 Fig. 1(b)의 r_4 이후의 절점을 포함하는 사각형 요소에서 변의 중형비가 지속적으로 증가한다. 유한요소법에서 구하는 해의 특성(응력, 변형률 등)에 따라 사각형 요소의 중형비가 일정 범위를 초과하면 오차가 커지므로, r 이 일정거리에 도달하면 $r_4 \sim r_7$

구간과 같이 등간격으로 거리좌표를 설정할 수 없다.

Fig. 1(c)는 직교 좌표계에서 삼각형 요소로 영역을 구성한 것으로, Fig. 1(a)의 외각 부와 같이 거리가 증가함에 따라 변의 길이를 조정할 필요가 없다. 그러나, 요소의 면적이 유사해야 해의 정확도가 커지므로 원의 중심으로부터 멀어질수록 요소의 수가 급격하게 늘어나며, 만약 해의 안정성을 고려하여 고차 요소를 선택하면 행렬의 크기는 더욱 커진다. Fig. 1(c)의 일부 구간을 확대한 Fig. 1(d)는 Fig. 1(b)의 경우와 유사한 현상이 나타나므로 방향각에 따라 일부 절점들의 해는 직접 구할 수 없다.

Fig. 1(e)는 원통 좌표계에서의 유한요소법에서 이용되는 방법이다. 이 그림은 극 좌표계에서 사각형 요소로 영역을 분할한 것으로 원의 내부 좌표를 극 좌표계로 변환하면 요소 구성 방법이 간편해진다. 그러나 좌표변환시 원의 중심점은 변환되지 못하므로 중심부는 요소로 구성할 수 없다. 따라서 중심부에 송신을 가하는 경우는 해석적인 해를 이용하여 유한 요소로 구성된 영역과의 경계에서 페널티 법으로 처리하며, 중심부에 송신을 가할 필요가 없는 경우에는 요소가 없는 내부 경계면을 인위적인 경계처리에 의해 해결한다. 이 방법의 특징은 Fig. 1(f)와 같이 유한요소법이 적용되는 r_0 이후의 모든 거리는 등간격으로 구성할 수 있으므로 직교 좌표계에서 사각형 요소를 이용하는 경우(Fig. 1(b))와 달리 일정한 간격으로 해를 구할 수 있다. 그러나 이 방법을 이용하면 해석적인 해나 인위적인 경계면이 전체 해의 안정성에 영향을 주게 된다.

만약 Fig. 2(e)에서 중심부가 반드시 필요하여 이를 직교 좌표계의 삼각형 요소로 채우는 경우에는 직교 좌표계에서 중심부의 부채꼴 영역이 삼각형으로 표현되므로 직선(직교 좌표계)과 호(극 좌표계)의 틈에 의한 기하학적 불연속면 때문에 오차가 발생한다. 한편 Fig. 2(a)의 중심부를 삼각형 요소로 치환하는 경우에는 해의 안정성을 위해서는 삼각형 요소를 정삼각형에 가깝도록 해야하므로 Fig. 2(a)와 Fig. 2(c)의 방법을 적절히 혼용해야 하는데, 방향각의 분할 수에 따라 삼각형 요소의 면적과 수가 가변적이며 3차원 물체에 대한 모델링인 경우 이 삼각형 요소의 크기는 원에 수직인 좌표축의 요소 분할에도 영향을 미치는 등 중심부의 요소 분할이 매우 복잡해질 수밖에 없다. 그러므로 이 방법들보다는 하나의 좌표계에서 동일한 형태의 요소를 사용하는 방법이 유한요소법에 의한 모델링에서 경제적으로 해의 정확성을 높일 수 있다.

이와 같이 원통형 물체에 대한 기존의 유한요소법에서는 요소의 구성이 좌표계나 요소의 형태에 따라 장단점이 있는데, 원을 유한개의 요소로 분할하는 과정에서 가장 효율적인 접근 방법은 좌표계와 상관없이 원의 중심점에 대해 방사형의 구조를 갖는 사각형 요소로 전 영역을 구성하는 방식이다. Fig. 1(g)는 이 연구에 의한 원의 요소 구성 방식으로 원의 중심에 대해 방사형인 대칭 구조를 보이는 선형의 사각형 요소만으로 전 영역을 구성한 것이다. 이 방법으로 요소를 구성하면 Fig.

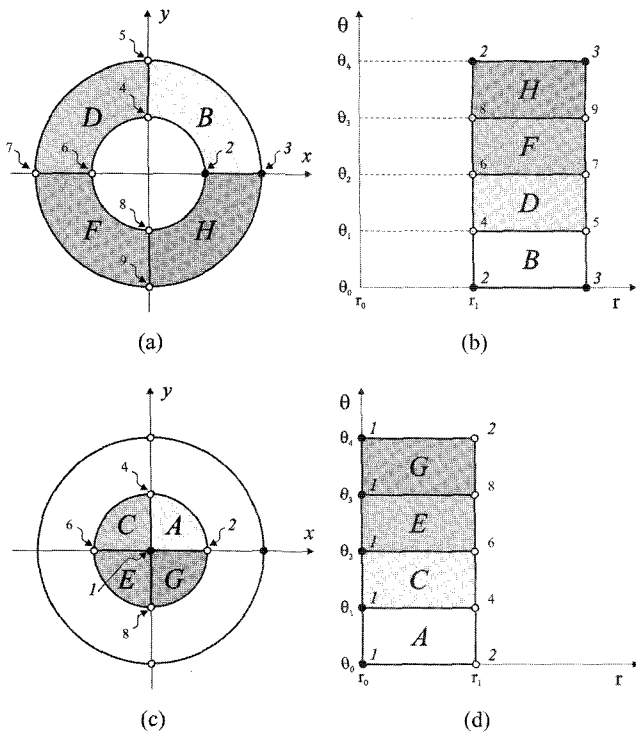


Fig. 2. Coordinate transformation of the elements in cartesian coordinates into those in polar coordinates. The number on dots denotes the node number: (a) annular elements in cartesian coordinates, (b) transformation of each annular elements into polar coordinates, (c) inner circle elements in cartesian coordinates, (d) transformation of each inner circle elements into polar coordinates.

1(h)와 같이 모든 방향각에 대해 일정 거리별로 해를 구할 수 있으며 요소의 구성방식이 간편하다.

좌표계의 특성

원통 좌표계는 수학적 편의를 위해 만들어진 공간으로, 원통형 물체를 수학적으로 표현하기에 가장 적합하다. 이 때, 직교 좌표계와 원통 좌표계는 좌표간 변환에 의해 서로 대응되며, 원통 좌표계는 다음의 좌표 변환식에 의해 직교 좌표계와 관계된다.

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta \\
 y &= r \sin \theta \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

한편, 식 (1)의 역 변환식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta &= \tan^{-1}(y/x) \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

그러나, 식 (1)에 의하면 모든 범위의 r, θ, z 는 x, y, z 로 변환이 가능하나, 식 (2)에 의하면 모든 범위의 x, y, z 를 r, θ, z 로 변환할 수 없다. 만약, θ 를 탄젠트 함수로만 표현하여, 수

학적으로 모든 x 와 y 에 대해서 성립하는 역 변환식을 구성하면 다음과 같다.

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x), & \text{if } (x > 0, y \geq 0) \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi, & \text{if } (x < 0) \\ \tan^{-1}(y/x) + 2\pi, & \text{if } (x \leq 0, y < 0) \\ \pi/2, & \text{if } (x=0, y > 0) \\ 3\pi/2, & \text{if } (x=0, y < 0) \end{cases}
 \tag{3}$$

식 (3)에 의하면 $x=y=0$ 인 점을 제외하면 모든 x 와 y 에 대해 θ 를 정의할 수 있으나 $x=y=0$ 인 점은 θ 를 정의할 수 없다. 즉, 원통 좌표계에서는 $r=0$ 이므로 θ 와 상관없이 z 축의 점이라 표현되므로, 유한요소법에서 직교 좌표계에서 생성된 원통형 물체를 원통 좌표계로 변환하면 z 축의 점들은 θ 의 값이 없으므로 이 점들과 관련된 요소를 설정할 수 없다. 따라서, 기존의 원통 좌표계에서 유한요소법을 적용할 경우에는 Fig. 1(e)와 같이 단면의 내부가 빈 원통으로 물체가 표현될 수밖에 없다.

이 연구에서는 Fig. 1(g)와 같이 동일한 요소로 원통형 물체의 전 영역(solid cylinder)을 구성하기 위해 $x=y=0$ 인 점에서 θ 를 정의하였다. Fig. 2는 원통의 단면에 대한 요소와 절점의 좌표 변환 과정을 도시한 것으로, 여기서는 식 (2)의 역 변환식에서 볼 수 있듯이 z 가 각 좌표계에서 동일하므로 2차원 평면에서 x, y 와 r, θ 간의 좌표 변환을 나타내는 2차원 직교 좌표계와 극 좌표계로 언급한다.

Fig. 2(a)는 원점이 포함되지 않는 절점으로 구성된 요소의 일부를 직교 좌표계에 도시한 것으로, x 와 y 좌표축에 절점이 있으며 이 절점들로 구성된 4개의 요소는 B, D, F, H이다. 요소내의 절점에 대해 식 (2)를 이용하여, 극 좌표계로 변환시키면 각 요소는 Fig. 2(b)와 같이 r, θ 로 표시되는 직교성의 좌표공간에 사각형으로 변환된다. 여기서 θ 축은 직교 좌표계의 $+x$ 축을 기준으로 $[0, 2\pi]$ 의 범위로 설정한 것이므로, 각 요소가 극 좌표계로 변환되면 요소 B의 경우 $+x$ 축 상의 절점 2와 3은 θ 가 $\theta_0=0$ 이며, $+y$ 축 상의 절점 4와 5의 θ 는 $\theta_1=\pi/2$ 에 해당한다. 요소 D, F, H의 절점도 식 (2)에 의해 θ 의 값이 정해지는데, 요소 H의 경우 $-y$ 축 상의 절점 8과 9의 θ 는 $\theta_3=3\pi/2$ 이며 $+x$ 축 상의 절점 2와 3의 θ 는 $\theta_4=2\pi$ 이다. 여기서 요소 B와 H가 공유하는 절점 2와 3은 직교 좌표계에서 동일한 x 와 y 의 좌표를 갖는데 반해, 극 좌표계에서는 절점이 포함되는 요소의 위치에 따라 θ 의 좌표가 0과 2π 로 분리된다. 이 절점을 식 (1)의 변환식에 의해 역으로 직교 좌표계로 변환하면 삼각함수의 특성에 의해 θ 의 값에 상관없이 동일한 x 와 y 의 값으로 표현된다. 즉, $[0, 2\pi]$ 의 범위를 갖는 θ 는 적분구간에서의 값을 의미하기 때문에 좌표에서는 0과 2π 가 등가이지만 적분경로 상에서는 0과 2π 를 구분할 필요가 있다.

이 개념을 확장하면 직교 좌표계의 원점을 극 좌표계에서

정의할 수 있다. Fig. 2(c)는 직교 좌표계의 원점을 포함하는 요소 A, C, E, G를 나타낸 것으로 부채꼴의 형상을 하고 있다. 이 중 요소 A의 절점 2, 4는 식 (2)의 역 변환식에 의해 Fig. 2(d)와 같이 나타낼 수 있으나, 절점 1은 극 좌표계로 변환할 수 없다. 그러나, Fig. 2(b)와 같이 하나의 절점이 적분경로 상에서 다른 좌표로 나타나는 성질을 이용하여 좌표의 원점을 수치적으로 표현하면 좌표계의 원점에서 요소의 다른 절점(2와 4)이 갖는 θ 로 대체할 수 있고, 직교 좌표계에서 부채꼴의 형상은 원통 좌표계에서 사각형의 형태로 표현된다. 이 때 절점 1의 r 은 $r_0=0$ 이나 θ 는 $\theta_0=0$ 와 $\theta_1=\pi/2$ 로 분리되며 마치 2개의 점처럼 작용한다. 그러나 이 요소내의 절점이 갖는 2개의 θ 는 적분경로를 표현한 것에 불과하며 2개의 좌표는 아니다. 따라서 이 절점은 공간적으로 하나의 점이기에 유한 요소 방정식으로 구성된 행렬의 성분에서는 동일한 위치에 해당하지만 수치적분을 수행할 때에만 구간으로 작용한다. 요소 C, E, G에서도 동일한 방법을 적용시키면 Fig. 2(d)와 같이 4개의 요소는 r 과 θ 의 범위가 $[r_0, r_1]$ 과 $[0, 2\pi]$ 인 직사각형 내에 10개의 서로 다른 좌표로 표현되며, 이 점들을 식 (1)의 좌표변환식을 이용하면 직교 좌표계에서는 Fig. 2(c)와 같이 5개의 좌표로 회귀한다.

이 방법에 의해 구성된 전체 요소에 대해 z 축을 포함하는 원통구조로 나타내면 원통 좌표계에서는 Fig. 3(a)와 같이 표현되는데, 기존의 유한요소법에서 구현한 요소(흰색) 뿐만 아니라 좌표계의 원점을 포함하는 요소(흑색)가 추가되었으므로 r 방향에 대한 내부의 인위적인 경계면이 존재하지 않는다. 따라서 Fig. 3(a)는 원통구조가 마치 직교 좌표계에서의 직육면체 구조와 동일한 형태이므로, 기하학적인 형상에서도 안정적이다. 유한요소법을 적용한 후 그 결과를 직교 좌표계로 변환하면 Fig. 3(b)와 같이 본래의 원통형을 유지하며 중심부가 요소로 채워진다.

유한요소 방정식

여기서는 전기비저항 탐사의 3차원 모델링에 대한 원통 좌표계에서의 유한요소 방정식을 유도하였다. 3차원 전기비저항 모델링은 임의의 점 전원에 의한 전위 분포를 구하는 Poisson 방정식의 형태로 다음과 같다.

$$-\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = \nabla \cdot J_s \tag{4}$$

여기서, σ : 전기전도도(electrical conductivity, S/m),

ϕ : 전위(electric potential, V),

J_s : 점원에 의한 전류밀도(source current density, A/m²)

유한요소법은 미분 방정식과 등가인 변분식으로부터 요소의 기하학적인 형상함수를 이용한 유한요소 방정식을 유도하여 근사해를 구한다. 이 연구에서는 근사 함수의 사용에 따른 잔여값과 임의의 가중함수의 내적을 최소화하는 가중 잔여법

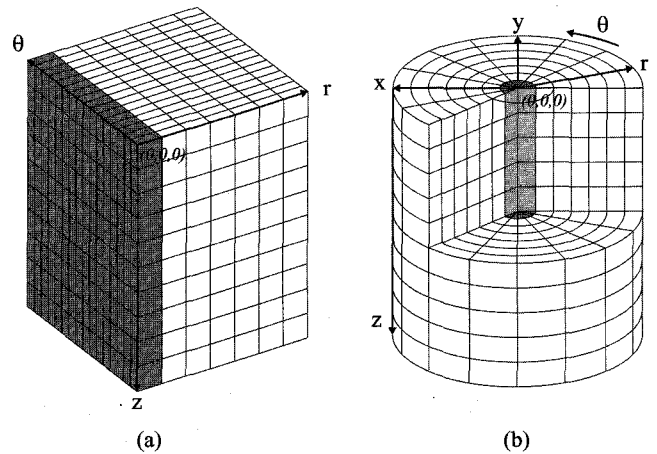


Fig. 3. Finite element discretization of a cylinder: (a) discretization of the solid cylinder by hexahedral elements in cylindrical coordinates, (b) its transformation into cartesian coordinate.

(method of weighted residual)을 이용하여 미분 방정식을 등가의 적분형 변분식으로 표현하였으며, 변분식에 대해 포텐셜과 시험함수를 동일한 함수로 사용하는 Galerkin법을 이용하여 유한요소 방정식을 유도한다. 이 방법으로 구성된 한 육면체 요소에 대한 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N_e} c_{ij}^e \phi_j^e = f_j^e - J_i^e \tag{5}$$

여기서, c_{ij}^e 는 개별 요소에 대한 계수행렬(coefficient matrix)로서, 원통 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$c_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma \left[\frac{\partial \Psi_i^e}{\partial r} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \tag{6}$$

한편, 식 (5)에서 f_j^e 는 전원 벡터이며, J_i^e 는 경계면에서의 전류밀도의 유출을 표현하는 항으로, 실제 계산에서 필요한 인위적인 경계에서의 조건으로 혼합경계조건을 적용한다(Dey and Morrison, 1979).

식 (5)를 이용하여 각 요소에서의 결과를 모든 요소에 대해서 중합하고, 인위적인 경계면에 대해서는 경계조건을 부여하면, 전체 계수행렬과 전원항의 벡터는 각 요소에서의 계수행렬과 전원항의 해당 절점에서의 조합으로 표현되므로 유한요소 방정식은 다음과 같은 선형 연립방정식이 되며, 계수행렬 **C**는 유한요소 방정식에 사용된 요소의 형상과 전기전도도만의 함수이므로 임의의 점 전원에 의한 전위를 계산할 수 있다.

$$C\phi = S \tag{7}$$

여기서, **C**: 계수행렬(coefficient matrix, capacitance matrix)

ϕ : 전위벡터(potential vector)

S: 전원벡터(source vector)

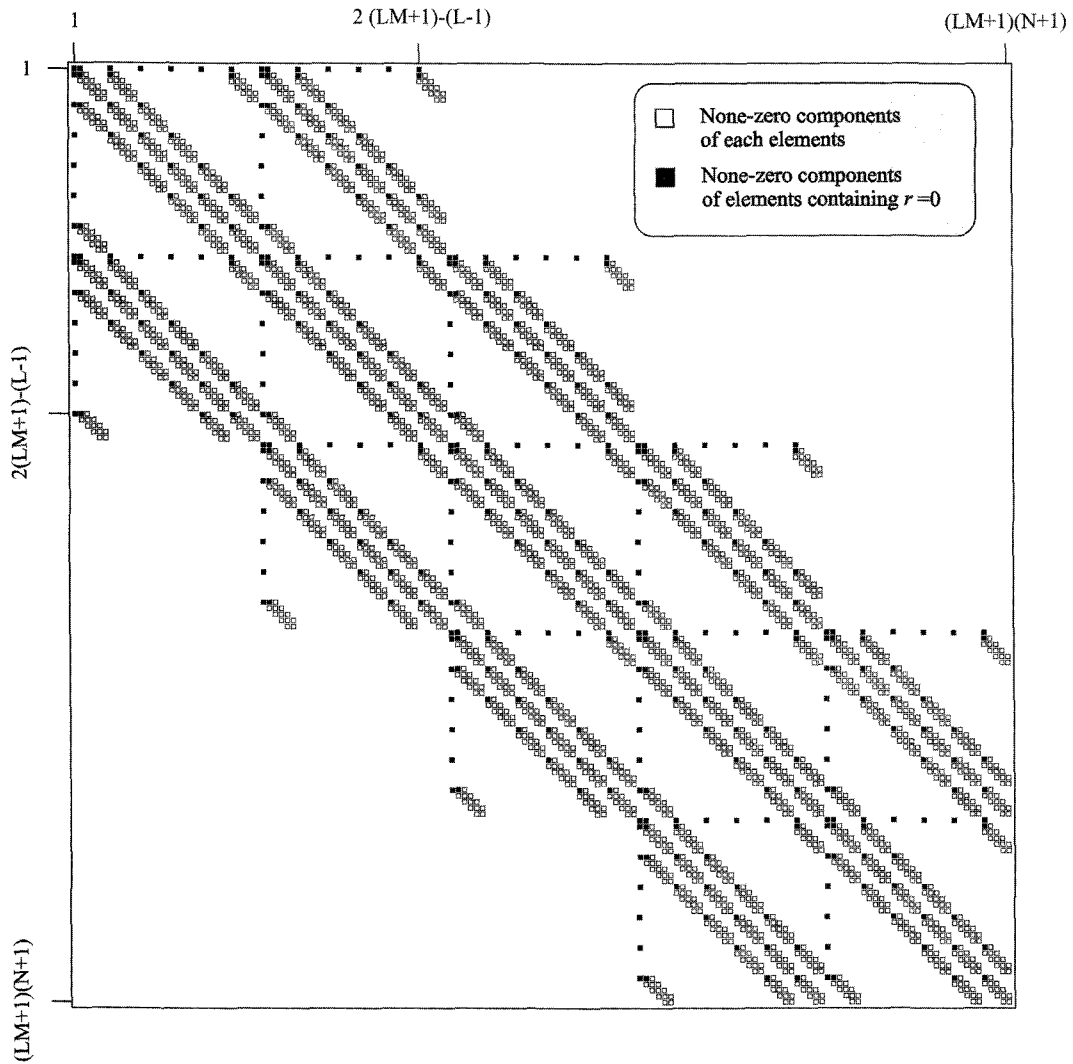


Fig. 4. Structure plot of coefficient matrix, C. It provides a quick visual check on the sparsity pattern of the matrix. A lined rectangles denote non-zero components and the corresponding nodes are located on the elements in annular region of a cylinder. A filled rectangles denote non-zero components and the corresponding nodes are located on the elements in core region of a cylinder. L, M and N denote the numbers of nodes in r, θ , z direction, respectively.

구성된 계수행렬은 Fig. 4와 같이 일정한 띠폭(banded)을 갖는 거대한(huge) 희소(sparse) 대칭(symmetric)행렬로서 r, θ , z와 관련된 요소의 개수를 각각 L, M, N이라 하면 각 방향에 대한 절점의 수는 L(원점 제외), M, N+1이 되고, 전체 행렬의 크기는 $((L \times M) + 1) \times (N + 1)$ 이다. 여기서, C는 대칭행렬이므로 상 삼각행렬의 띠폭만 고려하면 $2(L \times M + 1) - (L - 1)$ 이며 각 행에서 최대 $(2M + 1)$ 개의 열이 0이 아닌 값을 갖는데, 이 성분이 가변적인 이유는 원통의 중심의 요소마다 원점이 포함되므로 θ 방향 요소 수에 따라 반복적으로 행렬에 대응되기 때문이다. 이와 같이 일정한 띠폭을 갖는 행렬의 역산에는 직접적인 방법보다 반복적인 방법을 이용하는 것이 컴퓨터의 기억용량을 줄일 수 있으므로 효율적이다. 또한 반복적인 해법 수렴속도가 빠르고 안정적인 ICCG(Incomplete Cholesky Conjugate Gradient, 김학수, 1988.; 이명중, 2000) 법을 채택하여 계산속

도의 향상을 기하였다.

요소 분할의 최적화

여기서는 유한요소법으로 구성된 전기비저항 탐사의 3차원 모델링에 대해 균질 매질을 이용하여 해의 수렴도를 검증하고자 한다. 이를 위해 사용한 모형은 100 ohm-m의 비저항을 갖는 반무한 균질 매질로, 수치계산의 안정성을 위하여 각 측정점 사이는 4개의 내부 요소(sub-elements)로 구성하였고, θ 방향은 전체를 48등분 한 것으로 개별 요소에서 θ 의 변화량은 $\pi/24(7.5^\circ)$ 이다.

Fig. 5는 상기한 모형에 대해서 $z=0$ 인 지표면에서 r이 0, 5, 10 m인 지점에 점 전위를 가하였을 때 Fig. 5(a)와 같이 원점을 대칭으로 하는 지표면의 r 축의 결과로, 유한요소법에 의한 해인 포텐셜을 걸보기 비저항으로 변화시킨 것이다. Fig. 5

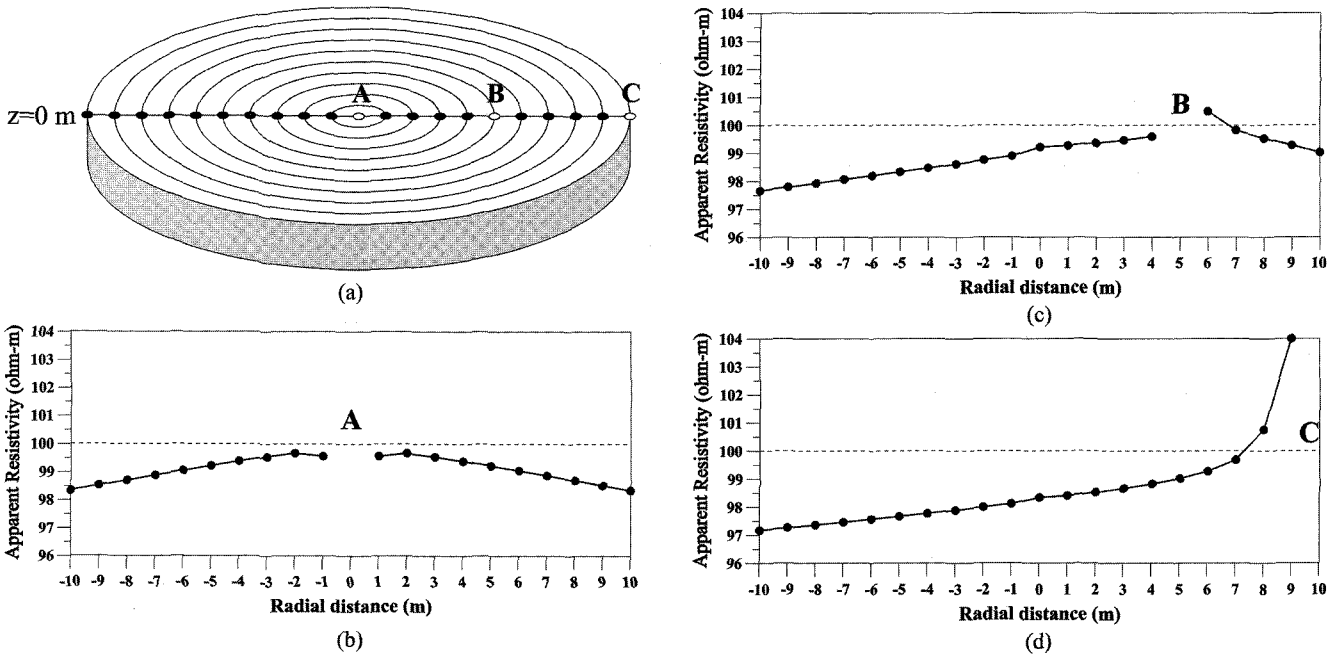


Fig. 5. Systematic error tests for radially varying source position at $z=0$ m over 100 ohm-m homogeneous half space: apparent resistivity curve along radial-axis with pole-pole array (a) due to a source point A (b), B (c), C (d).

(b)는 $r=0$ m에 전원을 가한 것으로 최대 2% 이하의 오차를 보이며 안정된 양상을 보인다. 그러나 $r=5$ m에 전원을 가한 Fig. 5(c)에서는 전원의 최근접 측정점인 $r=4$ m와 6 m에서 비대칭적인 결과를 보이며, 특히 $+r$ 방향에 대한 오차가 $-r$ 방향에 비해 커지는 현상을 확인할 수 있다. 이 현상은 $r=10$ m에

전원을 가한 Fig. 5(d)에서 증폭되는데, 전원의 최근접 측정점인 $r=9$ m에서 +4%의 오차를 보인다.

이와 같이 원점으로부터 이격된 지표면 상에 송신점이 있을 경우, r 이 커지는 방향과 감소하는 방향에 대한 포텐셜이 비대칭 특성을 보이는 현상은 점 전원이 포텐셜 분포의 중심점

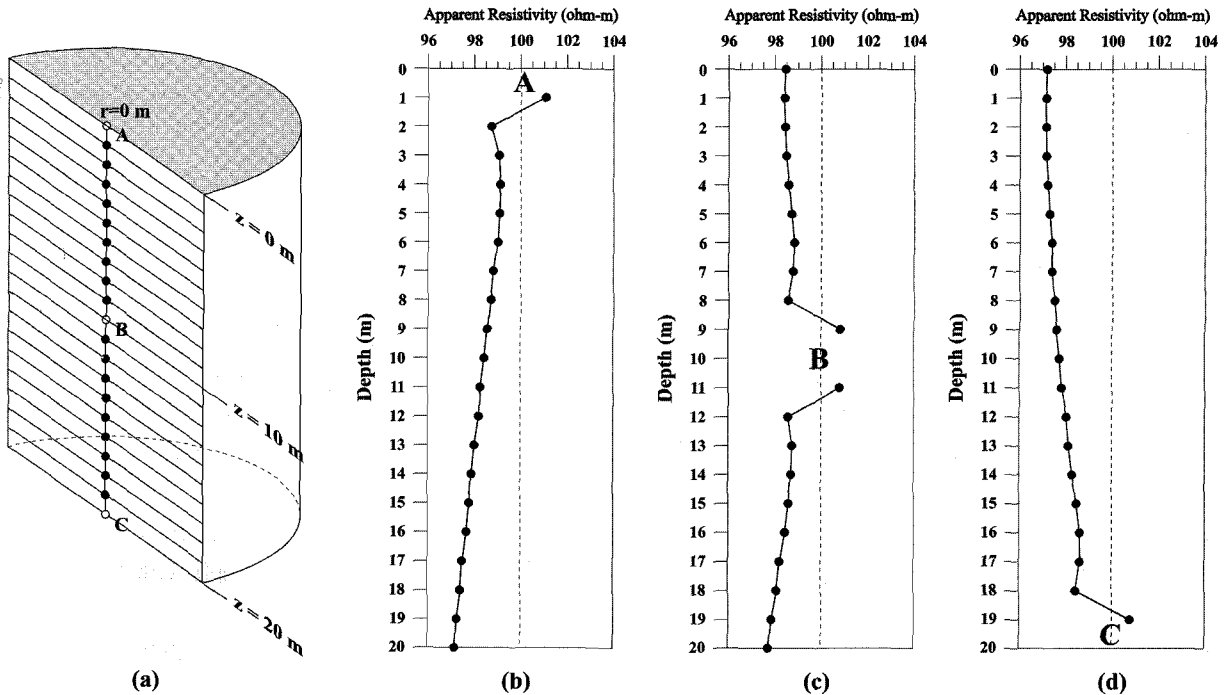


Fig. 6. Systematic error tests for vertically varying source position at $r=0$ m over 100 ohm-m homogeneous half space: apparent resistivity curve along depth-axis with pole-pole array (a) due to a source point A (b), B (c), C (d).

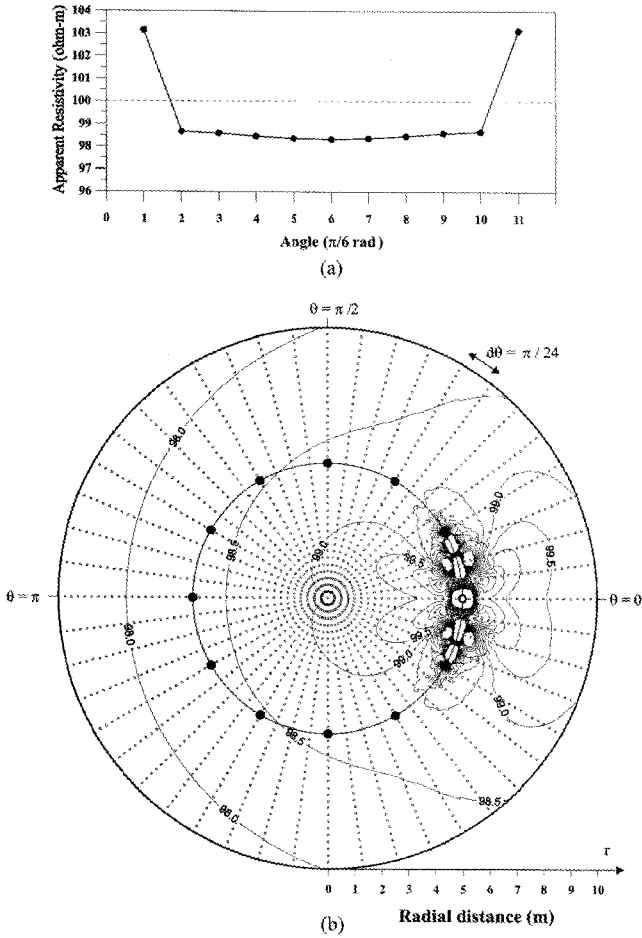


Fig. 7. Systematic error tests for azimuthal direction over 100 ohm-m homogeneous half space. A source is located at $r=5$ m and $z=0$ m: (a) apparent resistivity curve along azimuthal-axis at $z=0$ m, (b) apparent resistivity distribution on the cross-section at $z=0$ m.

이지만, 원통 좌표계에서는 전원에서 r 좌표값이 0이 아니기 때문이다. 따라서 z 축 상에 전원이 위치하고 지표에 측정점이 위치한 경우에는 포텐셜(겉보기 비저항)의 정확도가 높으나, z 축이 아닌 임의의 위치에 송신점과 수신점이 위치할 경우에는 전원에 의한 특이점 (singularity)이 전원을 중심으로 3~4 절점까지 영향을 미친다. 이 경우 측정점 주변 요소에 대해서만 내부 요소를 증가시키면 되나, 실제 전기비저항 탐사의 경우 지표탐사에서는 전원을 수시로 이동시켜야 하기 때문에 지표 전기비저항 탐사에 대한 모델링을 수행할 경우 모든 지표 요소의 내부 요소 수를 증가시켜야 한다.

동일한 모형에 대해서 $r=0$ 인 축(시추공 축)에서 z (심도)가 0, 10, 20 m인 지점에 전원을 가하여 Fig. 6(a)와 같이 z 축에서 얻은 결과가 Fig. 6의 (b), (c), (d)이다. 심도를 달리하여 전원을 가한 모든 결과는 전원의 최근점 측정점에서 다소 오차가 커지나 전반적으로 3% 이내의 오차로 안정적인 결과를 확인할 수 있다.

동일한 모형에 대해서 θ 방향의 변화를 확인하기 위해 $r =$

5 m, $z=0$ m인 지점에 전원을 가하여 $z=0$ m인 평면에 대해 도시한 결과가 Fig. 7이다. 그림에서 $\theta=0$ 과 $\theta=\pi$ 의 연장선은 Fig. 5(c)와 동일한 것이며, 지표면에 전원이 존재하는 경우 시추공을 중심으로 방사형으로 설정한 각 탐사선의 2차원 자료에 대해서는 안정적인 결과를 기대할 수 있다. 그러나 기존의 전극배열 방식에서 벗어나 시추공을 중심으로 원주방향에 대한 새로운 전극배열법을 개발하고자 할 때에는 전원에 의한 특이점이 θ 방향으로 전원을 중심으로 3~4개의 절점까지 나타나므로 이를 고려하여 내부 요소의 수를 설정하여야 한다.

이상의 결과로 원통 좌표계에서의 유한요소법의 특성을 정의하면, $r=0$ 인 z 축 상에 전원이 존재하는 경우에는 매우 적은 요소만으로 대상 영역 전체를 분할할 수 있으면서 안정적인 해를 기대할 수 있지만, $r=0$ 이 아닌 임의의 지점에 전원을 가할 경우에 안정적인 결과를 획득하기 위해서는 많은 요소가 필요하다.

그러므로 전기비저항 탐사와 같이 전원의 위치가 가변적인 경우 전원 주변의 특이점에 의한 영향을 감소시키는 기법이 필요한데, 이 연구에서는 포텐셜의 특이성분 제거법(Lowry, 1989)을 이용하였다. 이 방법은 다음 식과 같이 포텐셜을 특이성분(singularity component)과 정규성분(regular component)으로 분리시켜 계산한다.

$$\phi = \phi_s + \phi_r \tag{8}$$

여기서, ϕ_s 는 특이성분, ϕ_r 는 특이점에 상관없는 정규성분을 나타낸다. 이때, 전체 영역 Ω 에 대한 평균 전기전도도($\bar{\sigma}$)는 모든 요소에서의 전기전도도를 평균한 것으로, ϕ_s 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\phi_s = \frac{I}{4\pi\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_m} \right) \tag{9}$$

여기서, r_s : 전원과 측정점간의 거리

r_m : 지표면에 대칭인 가상 전원과 측정점간의 거리

상기한 바와 같이 2개의 성분으로 분리된 포텐셜에 의해 유한요소 방정식이 변화되는데, 식 (4)에 식 (8)과 (9)를 대입하면 다음과 같이 변화한다.

$$-\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{r})\nabla\phi_s(\mathbf{r})] = \nabla \cdot [(\sigma(\mathbf{r})-\bar{\sigma})\nabla\phi_s] \tag{10}$$

위 식을 행렬로 나타내면 다음과 같이 특이점이 제거된 정규성분 ϕ_r 에 대한 선형 연립방정식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{C}\phi_r = -\mathbf{C}\phi_s + \mathbf{C}'\phi_s \tag{11}$$

여기서, \mathbf{C} : 계수행렬

\mathbf{C}' : 평균 전기전도도($\bar{\sigma}$)에 의한 계수행렬

식 (11)은 식 (4)에 비해 우변의 전원항이 점 전원이 아닌 전기전도도 분포와 식 (9)에 의해 계산되는 특이성분 ϕ_s 의 조합

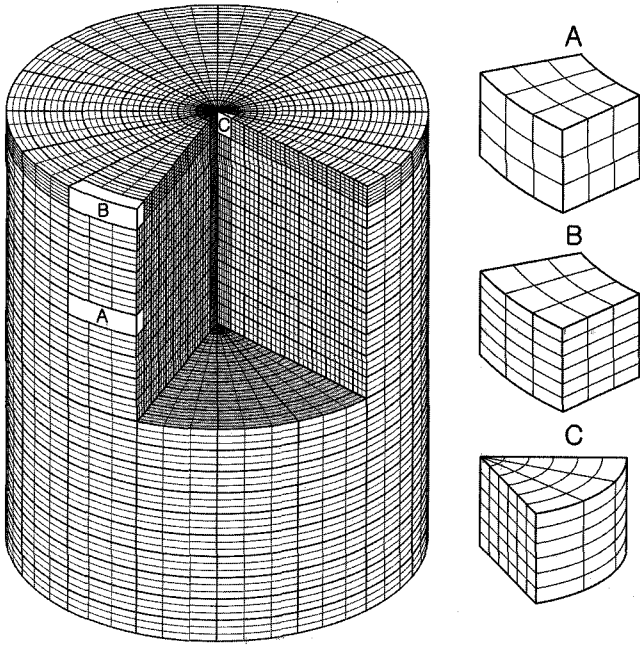


Fig. 8. Block structure for three-dimensional electrical resistivity modeling in cylindrical coordinates. The elements containing the center of a cylinder ($r=0$ m) consist of six sub-elements in radial and depth direction as 'C'. The elements containing the surface consist of six sub-elements in depth direction and three sub-elements in radial direction as 'B'. The others consist of three sub-elements in radial and depth direction as 'A'. In all cases total elements in azimuthal direction are fixed to 48.

으로 치환되어 계수행렬의 구조를 고려한 안정적인 전원 벡터로 바뀐 것이다. 그러므로 식 (9)와 식 (11)을 결합하면 원래의 포텐셜에 대한 해를 얻을 수 있다.

이와 같이 특이성분과 이 분포와 결합계수에 의해 정의되는 전원항에 의한 정규성분으로 포텐셜을 분리함으로써 전원 주변의 격자구조를 본래의 구조와 같이 유지시키면서 모델링의 정확도를 향상시킬 수 있다. 따라서 특이성분 제거법을 이용할 경우 전원의 위치에 무관하게 일정한 요소수로서 주어진 원통형 물체를 분할할 수 있다. 원통형 물체에 대한 전기비저항 탐사의 모델링을 위해 여기서 제안된 최적 요소 분할은 Fig. 8과 같다. 지표와 시추공을 포함하지 않는 요소는 'A'와 같이 기본 요소(main element)간을 3개의 내부 요소만으로 설정하며, 지표면을 포함하는 요소에는 'B'와 같이 지표 경계면에 대한 오차를 줄이기 위해 z 축으로 내부 요소를 6개로 증가시키며, 시추공을 포함하는 'C'의 경우는 급격한 물성 변화를 고려하여 r 축과 z 축의 내부 요소를 6개로 구성하였다.

알고리즘 검증

3차원 전기비저항 모델링 알고리즘을 검증하기 위하여 해석적 해가 존재하는 2차원의 2층 층서 구조 모형에 대한 모델링을 수행하였다. Fig. 9(a)와 같이 $z=0$ 인 지표면에 전극이 위치하며 모형은 z 축(심도축)에서 쌍극자 간격에 해당하는 1 unit

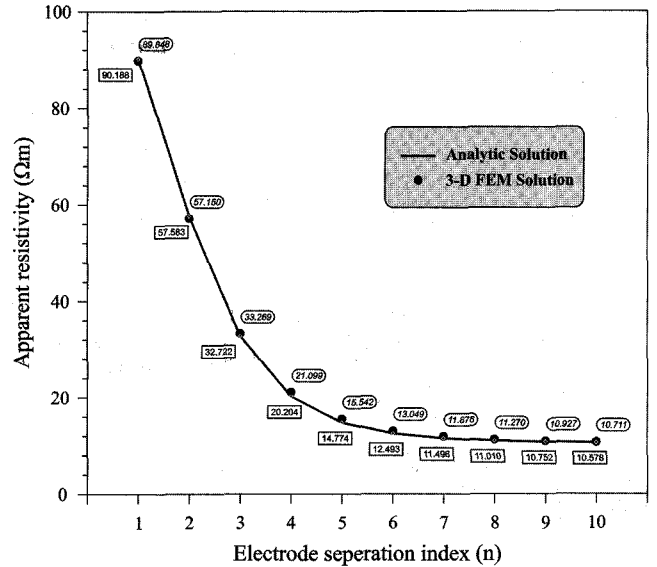
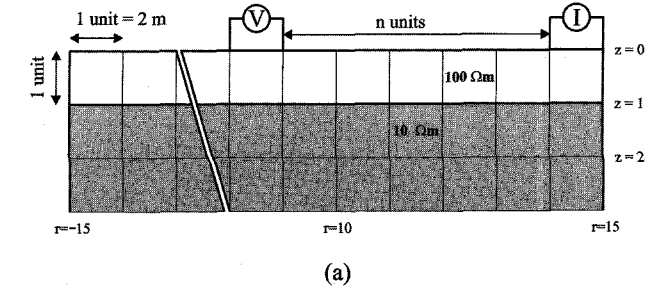


Fig. 9. The comparison of FEM solutions and analytic solutions over two-layered earth model: (a) configurations of the model using dipole-dipole array, (b) FEM solution and analytic solutions over (a).

을 경계로 상부는 100 ohm-m, 하부는 10 ohm-m의 전기비저항을 가지는데 측정방법은 쌍극자 배열법을 이용하였다. 이 때 구성한 측정 요소는 r 방향의 15개, z 방향의 5개, θ 방향은 16 개이며, 내부 요소는 앞에서 설명된 최적 요소 분할을 적용하였다(Fig. 8 참조). Fig. 9(b)의 결과는 해석적 해와 원통 좌표계에서의 유한요소 모델링 결과를 함께 도시한 것인데, 겉보기 비저항은 해석적인 해와 비교할 때 최대오차가 5%로 나타나며, 전류전극 쌍이 $r=0$ 인 방향의 요소에 가까워질수록 최대 오차는 점진적으로 감소한다. 이때 r 방향 측정 요소내의 내부 요소 수를 증가시키는 것보다 θ 방향의 총 요소 분할 수를 증가시키는 것이 오차를 감소시킨다.

다음은 시추공을 이용한 3차원 전기비저항 모델링의 정확도를 검증하기 위해 해석적인 해가 존재하는 층서 구조에 대해 결과를 비교하였다. Fig. 10(a)는 2층 층서 구조 모형으로, 층서의 경계는 10 unit에 위치하며 전원은 시추공 축을 따라 심도 5 unit에 존재하고 측정점은 이 알고리즘의 특성을 고려하여 또 다른 시추공(송신시추공에서 5 unit 이격)과 지표에 위치시켰다. 이 모델링에 이용된 배열법은 단극 배열이고 그 결과

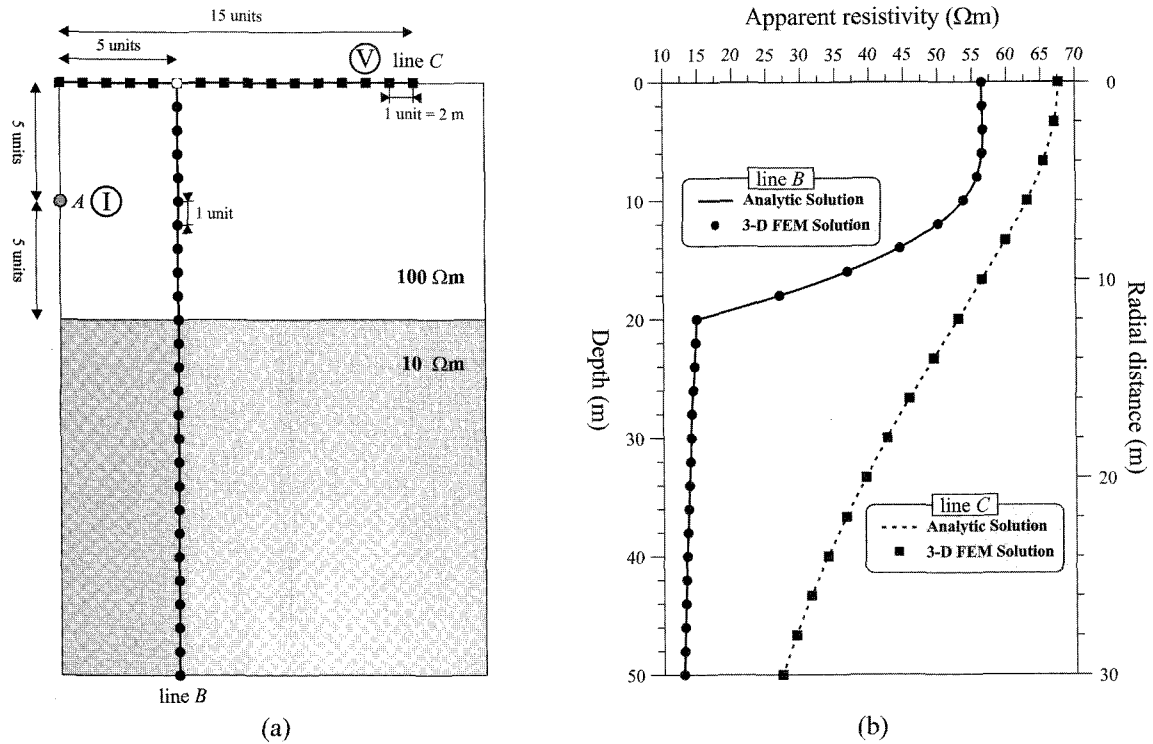


Fig. 10. The comparison of FEM solutions and analytic solutions over two-layered earth model in case of borehole source: (a) configurations of model using pole-pole array, current-pole is located at A and potential-poles are marked in vertical line B and horizontal line C, (b) FEM solution and analytic solution in line B and line C over (a).

는 Fig. 10(b)와 같다. 겉보기 비저항은 해석적인 해와 비교할 때 최대 0.1%의 오차로 매우 안정적인 결과를 보이는데, 특히 할 만한 점은 여기서 θ 방향의 총 요소 수를 8개로만 설정한 것인데, 지표에 전원이 위치한 Fig. 9의 결과에 비해 방향의 θ 요소 분할 수에 민감하지 않는 특성을 보인다. 이 현상은 원통 좌표계에서의 유한요소법이 갖는 강점으로 $r=0$ 인 z 축 상에 송신점이 있는 경우에는 적은 수의 요소만으로도 매우 안정적인 결과를 얻을 수 있으므로, 시추공에 전원이 존재하는 원통 좌표계에서의 유한요소법의 효율성이 커지게 된다.

결론

이 연구에서는 원통 좌표계에서의 유한요소법을 이용한 3차원 전기비저항 모델링 알고리즘이 개발하였다. 먼저 원통 좌표계에서의 유한요소법에서 문제가 되었던 원통 중심부의 요소를 주변과 동일한 형태의 요소로 구성할 수 있는 이론적 근거를 제시함으로써 요소의 형태 변화에 따른 기하학적인 오차나 인위적인 경계면을 고려할 필요가 없는 완전한 유한요소법을 구성할 수 있었다. 기존의 유한요소법에서는 원통 좌표계에서 원점에 대한 수학적 정의가 없었기 때문에 원점을 포함하는 요소를 구성할 수 없었는데, 원통 좌표계에서 방향각에 대한 좌표는 라디안으로 표현되며 삼각함수 내에서 일정한 주기를

가지며 회귀하지만, 유한요소법에서 이용되는 좌표는 고유한 값이 아니라 수치적분 과정에서 이용되는 적분 경로로 이해하고 이를 확장함으로써 좌표계의 원점에 대한 수학적 정의를 가할 수 있었다. 원통 좌표계에서 원점을 포함하여 모든 영역을 육면체 요소로 구성하는 것은 유한요소법을 이용하여 임의의 공간을 원통 좌표계로 변환하여 수치적인 해를 구할 수 있음을 의미하는데, 이 방법을 이용하면 원통형 물체나 공간으로 표현되는 시스템의 구조해석에 있어서 물리적인 연속성과 수학적 편의를 도모할 수 있다.

한편, 직교 좌표계를 이용하는 기존의 3차원 전기비저항 탐사법에서는 다수의 시추공이나 격자망 형태의 지표 탐사선이 필요한 반면에 원통 좌표계를 이용하면 하나의 시추공만으로도 개략적인 3차원 영상을 얻을 수 있다. 따라서 하나의 시추공과 이를 중심으로 하는 지표탐사 탐사선의 효율적인 구성을 통해 단층이나 파쇄대의 방향성에 대한 정보나 지하수의 유동 경로나 오염원의 유출 경로 등에 대해 시추공을 기준으로 확인할 수 있을 것이다.

또한 z 축에 전원이나 응력이 있을 때 안정적인 결과를 보이는 원통 좌표계의 유한요소법은 시추공의 심도 축에만 송신점과 수신점이 있는 물리 검증 등의 모델링에 효율적으로 이용될 수 있으며, 원통 형태를 갖는 일반적인 물체에 대한 구조 해석에도 효율성이 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- 김학수, 1988, 유한차분법에 의한 3차원 전기비저항 모델링에 관한 연구: 공학석사 학위논문, 서울대학교.
- 박권규, 1994, 유한요소법을 이용한 3차원 전기비저항 모델링 및 지형보정에 관한 연구: 공학석사 학위논문, 서울대학교.
- 이명중, 2000, 전기비저항 탐사자료를 이용한 지하구조의 3차원 영상화: 공학박사 학위논문, 서울대학교.
- 최원석, 2002, 원통 좌표계에서의 전기비저항 FEM 모형 반응 계산: 공학박사 학위논문, 서울대학교.
- Dey, A., and Morisson, H. F., 1979, Resistivity modeling for arbitrarily shaped three dimensional structure: *Geophysics*, **44**, 753-780.
- Holcombe, H. T., and Jiracck, G. R., 1984, Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys: *Geophysics*, **49**, 439-452.
- Lowry, T., Allen, M. B., and Shive, P. N., 1989, Singularity removal: A refinement of resistivity modeling techniques: *Geophysics*, **54**, 766-774.
- Park, S. K., and Van, G. P., 1991, inversions of pole-pole data for 3_D resistivity structure beneath arrays of electrodes: *Geophysics*, **56**, 951-960.
- Pridmore, D. F., Hohmann, G. W., Ward, S. H., and Sill, W. R., 1981, An investigation of finite element modeling for electrical and magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data: *Geophysics*, **54**, 254-262.