PUBLICATION OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
17: 11 ~ 14, 2002

점성에 의한 구대칭 강착
SPHERICALLY SYMMETRIC ACCRETION WITH VISCOSITY

유계화
이화여자대학교 과학교육과
KYE HWA YOO
Ewha womans University
E-mail: khyoo@ewha.ac.kr
(Received Dec. 3, 2002; Accepted Dec. 20, 2002)

ABSTRACT

Our examination of the relations of spherically symmetric accretion on a massive point object to viscous drag, neglecting gas pressure and using self-similar transformation, shows the behaviors of the asymptotic solutions in the regions near to and far from the center. The viscosity reduces the free-fall velocity by the factor $(1+\zeta)^{-1}$, and causes flattening in the density distribution. Therefore, the viscosity leads to the reduction of the mass accretion rate.

Keywords: Accretion – Massive point source – Asymptotic solutions

1. 서론

질량이 큰 천체가 물질들을 동경 방향으로 집착하는 과정에 대한 연구는 Bondi (1952)로부터 비롯되었다. 낙하물질의 각 운동량의 여부에 따라 구형강착 또는 강착원반으로 불리우고 낙하하는 물질의 역학적 속력이 국지적 음속보다 작거나 클 때 아음속 또는 초음속 천이가 일어나게 된다. 이러한 분야도 연구가 활발히 진행되고 있다. Bondi(1952)이후 수많은 학자들이 이와 같은 연구를 거듭하여 왔다(Park 1992, Takahashi 2002).

Bondi(1952)는 polytrope 기체의 구대칭 강착에 대하여 연구하였고, Koester(1976)는 이러한 강착이 별의 진화에 어떤 영향을 주는 지 조사하였다. Maraschi et al.(1974)는 물질이 복사저항을 받으면서 구대칭으로 집착할 때 강착광도 L 가 Eddington 광도 L_E 보다 작은 경우에 대하여 연구하였다. Bolt(1977)와 Garlick(1978)은 복사저항을 받은 물질이 광학적으로 얇은 경우 중력과 복사 평형을 이룬다고 주장하였다. $L \sim L_E$ 의 경우 Rees(1974)는 강착률이 초임계가 되어 강착물질은 광학적으로 두껍게 되고, 역학적 평형을 이룬다고 지적하였다.

앞서 말한 바와 같이 낙하물질이 각운동량을 가진 경우 강착하는 천체 주위에 강착원반이 형성된다는 것이 알려져 있다(Pringle and Rees 1972, Novikov and Thorne 1973, Shakura and Sunyaev 1973). 그러나 은하 중심에 위치한 black hole 주위에 많은 별들은 이 black hole과 쌍성계를 이룬다고 가정할 수 있다. 즉 black hole의 Roche 한계 내에는

여러 별들로부터 유입된 물질이 강착 원반들을 만들지만 이들은 서로 충돌하여 구름을 생성한다. 이 구름의 물질들을 black hole은 구 대칭 강착한다(Gurzdyan and Ozerny 1979).

Chen(1977)과 Fukue(1984)는 동경 방향으로 물질들이 집착할 때 이 물질 류를 polytrope 기체류로 가정하고 자기 상사 polytrope 류에 대하여 조사했다.

Turolla and Nobil(1989)는 구 대칭으로 강착하는 물질들의 점성효과에 대하여 논하였지만 자기상사 해법은 사용하지 않았다. 따라서 여기서는 문제를 간단히 하기 위하여 구대칭 강착류와 점성효과만을 고려하기로 한다. 즉 점질량 천체가 물질들을 동경 방향으로 구대칭 집착할 때 물질들의 점성을 고려하여 물질들의 물리적 변수들의 시간적 변화에 대하여 생각하려 한다. 자기 상사 문제의 해결을 위하여 변환 방법을 사용하고 극한 영역에서 물질들의 행동을 알아보기로 한다.

이 논문의 제 2절에서는 기본 방정식과 상사변환을 제시하고 제 3절에서는 점질량 중력하에서 물질들의 점성을 고려하고 경계조건을 이용하여 상사해를 구한다. 제 4 절에서는 이 연구 결과를 요약하려 한다.

2. 기본 방정식과 상사 변환

2-1 Time scale

점 질량이 M 인 천체로 복사력등의 외부 저항을 받지 않고 구 대칭 강착할 경우를 생각한다. 물질이 무한대에 있을 때 공간 속도 v 가 음속 v_s 과 같다고 가정하면 강착반경(r_{ac})

$$r_{ac} = \frac{GM}{\upsilon_*^2 + \upsilon_{a\infty}^2} \tag{1}$$

이다(Vauclair et al. 1979). 여기서 M 은 물질을 강착하는 별의 질량이고 υ_* 는 별의 공간 속도이며 $\upsilon_{a\infty}$ 는 무한대에서의 물질의 낙하 속도이며 $\upsilon_s \sim \upsilon_{a\infty}$ 이다.

r_{ac} 로부터 물질이 점질량 천체로 자유낙하한다고 생각하면 역학적 시간 t_{ff} 는

$$t_{ff} = \frac{r_{ac}^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{2}$$

이다. 강착할 때 물질이 점성을 받으면 낙하하는 속도 υ_{vis} 는

$$\upsilon_{vis} = \frac{\nu}{r_{ac}}$$

이다. 이 식은 차원 해석으로 도출되었으며 여기서 ν 는 기체의 동 점성계수이다.

이제 점질량 천체로 낙하하는 물질을 유체라고 생각하고 이 유체가 이 물질의 기체 압력과 물질의 유체 압력이 평형을 이룰 때의 속력 $\upsilon_c = \sqrt{\frac{2RT}{x}}$ 이다. 여기서 R 은 기체상수, x 는 평균 분자량, T 는 기체의 온도이다.

물질류가 υ_c 되는 지점 r_c 까지의 거리 즉 $r < r_c$ 되는 영역에서는 물질의 강착이 일시 정지 영역이므로 우리는 $r > r_c$ 은 생각하기로 한다. 점성을 가지고 r_c 까지 걸리는 시간은

$$t_{vis} \sim \frac{r_{ac} - r_c}{\upsilon_{vis}} \tag{3}$$

이다.

문제를 간단히 하기 위하여 proton 의 coulomb 상호작용만을 가정한다. H의 완전 전리 점성계수(Filho,1995)는

$$\mu = 3.2\times 10^6 \frac{T_i^{2.5}}{1 + (\lambda/l)^2} \tag{4}$$

이며, λ 는 평균 자유행정 l 은 scale height 이며 T_i 는 이온 온도이며 T_i 를 14로 놓았다. 또한 $\lambda \sim l$ 로 가정한다. proton의 전자밀도가 10^4 cm^{-3} 이면 collision이 중요하다고 알려져 있으므로 이 값을 택하기로 한다.

식(2)와 식(3)로부터 $t_{ff} > t_{vis}$ 이므로 물질이 점 질량 천체로 강착할 때, 기체압력을 무시하고 점성을 고려해야 한다. 이제 기본방정식과 상사변환을 (2-2)절에서 생각하기로 한다.

2-2 기본방정식과 상사변환

점성을 받고 강착하는 물질은 각운동량이 없고, 복사저항도 받지 않는다고 가정하면 (2-2-1)절의 기본 방정식을 사용할 수 있고, 기본방정식의 해를 구하기 위해 (2-2-2)절에서 상사 변환을 생각할 수 있다.

2-2-1 기본방정식

성간물질 속에 점 질량 천체가 놓여 있고 질량 M 인 그 천체의 중력장에서 물질류가 구대칭으로 강착한다고 생각한다. 따라서 구좌표(r, θ, ϕ)를 사용하고 복사압력, 기체압력 및 자장의 압력을 무시하면 유체방정식은 다음과 같다.

연속방정식은

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho\upsilon) = 0 \tag{5}$$

이다. 여기서 ρ 는 기체밀도, υ 는 동경방향의 낙하속도이다.

동경방향의 운동 방정식은

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} + \nu\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial r} - \frac{2\upsilon}{r^2}\right) \tag{6}$$

이다.

만일 반경 r 인 기체 압력이 중력에 의한 유체압력과 평형인 임계거리 r_c 보다 큰 경우 기체의 압력은 무시되고 중력에 의해 기체의 운동이 결정된다. 이러한 조건아래서 상사해법을 사용하기로 한다.

2-2-2 상사변환

식(5)와 식(6)을 상사변환을 하기 전에 상사변수 ξ 를

$$\xi = (GM)^{-1/3} r\, t^{-2/3} \tag{7}$$

로 정의하기로 하자. 물리량 υ, ρ, ν 들은

$$\upsilon = \frac{r}{t}V(\xi) = (GM)^{1/3}\, t^{-1/3}\xi V(\xi) \tag{8}$$

$$\rho = r^{-3}D(\xi) = (GM)^{-1}\, t^{-2}\, \xi^{-3}D(\xi) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\nu = r^2\, t^{-1}\eta(\xi) &= [\xi\, (GM)^{1/3}\, t^{2/3}]^2\eta(\xi)\, t^{-1} \\ &= (GM)^{2/3}\, t^{1/3}\, \xi^2\eta(\xi)\end{aligned} \tag{10}$$

로 변환되며 상사변수 V, D 그리고 η 는 ξ 만의 함수이다.

기본방정식이 $t \to -t$, $\upsilon \to -\upsilon$ 일 때도 불변이라면, $t>0$, $\upsilon>0$ 그리고 $t<0$, $\upsilon<0$ 를 생각할 수 있다. 여기서 구대칭 강착 중 점성효과가 존재하는 점의 전후 시간을 각각 $t<0$, $t>0$ 라면 우리는 $t>0$ 인 경우에 관심이 있다.

식(8), 식(9) 식(10)과 상사변수 ξ 를 이용하면 기본방정식은 다음과 같은 형태의 미분 방정식으로 변환 할

수 있다.

$$2D-\frac{2}{3}\xi\frac{\partial D}{\partial \xi}+3DV+\xi(V\frac{\partial D}{\partial \xi}+D\frac{\partial V}{\partial \xi})=0 \tag{11}$$

$$-\frac{2}{3}\left(V+\xi\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)+V^2+\xi V\frac{\partial V}{\partial \xi}=-\xi^{-3}+\eta\left(4\frac{\partial V}{\partial \xi}+\xi^2\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right) \tag{12}$$

에서 식(12)의 왼쪽의 항들은 비정적 및 advection 항에 각각 기인하고 오른 쪽 2개의 항은 중력 및 점성항에 기인한다.

3. 상사해

3-1 경계조건

식(11)과 식(12)의 해를 구하기 위하여 우선 $r \to 0$ 와 $r \to \infty$ 경계조건을 구해본다. $\xi \to \infty$, $r \to 0$ 인 영역에서 물질은 정지하므로 점근 속도 (ξV) 와 υ 는 각각

$$\xi V \to -(1+\zeta)^{-1}\xi^{-2}, \quad \upsilon \to -\frac{GM}{1+\zeta}\frac{t}{r^2} \tag{13}$$

가 되는 해를 갖는다. 이 식은 비정적항과 중력항 및 점성항을 평형으로 놓고 구했다. 여기서

$$\zeta=\left(\frac{\nu t}{r^2}\right)^{-1} \tag{14}$$

이다. 주어진 ξ 에 대해서 속도가 $(1+\zeta)^{-1}$ 따라 변함을 알 수 있다.

$\xi \to 0$ 인 영역에서의 밀도 분포는

$$D(\xi) \to c,\ \rho \to c_1 r^{-3} \tag{15}$$

가 되는 해를 갖는다. 여기서 c, c_1 은 상수이다. 식(14)에서 $\upsilon \propto t/r^2$ 이고 $\rho \propto r^{-3}$ 이므로 $r \to \infty$ 에서 $\upsilon \to 0$ 라면 $\rho \to c_1$ 으로 근사해도 무방하다.

이제 $\xi \to 0$ 인 영역에서의 점근 속도 $\upsilon\xi$ 를 구해보면

$$V\xi \to -\sqrt{2}\,\xi^{-1/2},\ \upsilon \to -\sqrt{2GM/r} \tag{16}$$

이며 이것은 정적 자유낙하에 해당하며 advection과 중력항에 기인한다.

$r \to 0$ 영역에서의 점근 밀도의 해는

$$D \to c_2\xi^{-3/2}.\ \rho \to c_2 t\sqrt{GM/r^3} \tag{17}$$

가 되며 c_2 는 상수이다.

3-2 임계조건

V 를 멱 급수해라 가정하고 2차항 이상을 무시하면

$$V \sim a_1+a_2\xi^{-1} \tag{18}$$

라고 가정한다. a_1, a_2 는 상수이다. V 의 2차 도함수

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}=-a_2\xi^{-1}\frac{\partial V}{\partial \xi} \tag{19}$$

이다. 식(19)을 식(12)에 대입하고 임계조건을 생각하기 위하여 식 (11) 식(12)를 $\partial D/\partial\xi$. $\partial V/\partial\xi$ 로 고쳐 쓰면

$$\frac{\partial D}{\partial \xi}=-\frac{D(2+3V+\xi\frac{\partial V}{\partial \xi})}{\xi(V-\frac{2}{3})} \tag{20}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}=\frac{V^2-\frac{2}{3}V+\xi^{-3}}{\left((4+a_2)\eta+\frac{2}{3}-V\right)\xi} \tag{21}$$

가 된다.

해곡선이 연속이 되기 위해 식 (19)의 분모를 0으로 놓으면 $V=\frac{2}{3}>0$ 이다.

여기서는 강착을 생각하고 있으므로 $V<0$ 이어야 한다. $t<0$ 이면 이 점을 통과하여 강착 이후의 해가 존재한다.

3-3 천이점과 a_2 값

$(1+\zeta)^{-1}$ 의 ζ 항 중 $\frac{1}{r^2}$ 은 νt 에 대하여 마치 dilution factor같이 작용하므로, 물질의 자유낙하 하는 면적은 줄어든다. 따라서 (2-2-1)의 기본 방정식에 ν 항 대신 $\frac{\nu}{r^2} \to \frac{\alpha}{t}$ 로 대체 가능하다. 여기서 $\alpha>1$ 상수이다. α 에 따라 ξV 와 D 에 대하여 상사해가 존재한다. 그러나 우리는 기본방정식을 정중히 다루고 있으므로 α 항에 대해서는 생각하지 않는다(Umemura and Fukue 1994 참조).

점근 속도의 양 쪽을 같이 놓을 때 결정되는 ξ 점을 천이점 ξ_t 라고 정의하면

$$\xi_t=\sqrt{\frac{1}{2}}\,(1+\zeta)^{-2/3} \tag{22}$$

이 된다. 한편 식(21)의 분모를 0으로 놓으면

$$(4+a_2)\eta+\frac{2}{3}-V=0 \tag{23}$$

가 된다. $V<0$ 이고 $\eta>0$ 이면 식(23)에서 $a_2<-4$ 인 값을 요구한다.

3-4 질량 강착률

질량 강착률 $-\frac{dm}{dt}=4\pi r^2\upsilon\rho$ 이다. $r \to \infty$ 인 영역에서의 점근 강착률은

$$-\frac{dm}{dt} \to 4\pi GM\, c_1\, (1+\zeta)^{-1} t \quad (24)$$

이다. $r \to 0$ 인 영역에서의 점근 강착률은

$$-\frac{dm}{dt} \to 4\sqrt{2}\pi GM\, c_2 t \quad (25)$$

가 된다. $r \to \infty$, $r \to 0$ 인 영역에서의 강착률의 차이는 다만 상수 c_1, c_2 와 $(1+\zeta)^{-1}$ 에 있다.

4. 요약

물질이 점 질량 천체로 구 대칭 강착한 경우 기본 방정식에 자기상사 변환 방법을 이용하여 점성효과에 대하여 조사해 보았다. 점성항은 Umemura and Fukue(1994)의 구 대칭 강착 원반에서 제시된 복사력과 같은 효과를 가진다. 무시된 기체 압력 하에서의 물질의 속도는 중심영역에서 마치 자유낙하의 속도와 같았다. $r \to \infty$ 인 영역에서 물질의 속도는 $(1+\zeta)^{-1}$ 와 r^{-2} 에 비례하고 t 에 비례한다. $r \to 0$ 영역에서 $r \to \infty$ 인 영역으로 천이하는 영역은 $\zeta_t \propto (1+\zeta)^{-2/3}$ 이다. 밀도 분포는 $r \to \infty$ 인 영역에서는 일정하고 $r \to 0$ 인 영역에서는 $r^{-3/2}$ 와 t 에 비례한다. 물질의 강착률은 $r \to \infty$ 인 영역에서는 r^2 에 무관하고 $r \to 0$ 영역에서는 $(1+\zeta)^{-1}$ 와 t 에 비례하고 무거운 천체의 질량 M 에 비례한다. 구대칭 강착의 점성효과는 점성이 클수록 천이 영역을 감소하는 쪽으로 이동시키며 속도분포를 지연시키고 밀도분포는 지수적이라기 보다 flat하며 중심 쪽으로 갈수록 커진다. V 가 멱급수의 해를 가진 경우 멱급수의 상수값 $a_2 < -4$ 값을 요구한다.

그리고 광학적 두께는 ρ 에 비례하여 커진다. 이 때 불투명도의 주요 원인은 Thomson 산란에 의존하므로 대류의 발생이 기대된다.

이 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (과제 번호 R01-2002-000-00026-0, 2001, 2002) 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

Bolt, E. A. 1977 NASA SP. 42175
Bondi, H. 1952 MNRAS 104, 273
Chen, A. F. 1977 ApJ 213, 537
Filho, C. M. 1995 A&A 294, 295
Fukue, J. 1984 PASJ 36, 87
Garlick, A. R. 1978 A&A 68. 113
Gurzdyan, V. G. and Ozernoy, L. M. 1979 Nature 280, 214
Koester, D. 1976 A&A 52, 415
Maraschi, L., Reina, C. and Treves, A. 1974 A&A 35, 389
Novikov, I. D. and Thorne. K. S. 1973 in Black Holes, Dewitt and Dewitte(eds.) Gordon and Breach, New York
Park, M. K. 1992 JKPS 25, 294
Pringle, J. E. and Rees, M. J. 1972 A&A 21, 1
Rees, M. J. 1974 In Gravitation and Radiation Gravitational Collapse(1974 IAU), C. Dewitt-Morette (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co.
Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. 1973 A&A 24. 337
Takahashi, M. 2002 ApJ 570, 264
Turolla, P. and Nobil, L . 1989 ApJ 342, 982
Umemura, M. and Fukue, J. 1994 PASJ, 46. 567
Vauclair, G., Vauclair, S. and Greenstein, J. L. 1979 A&A 80, 79