PUBLICATION OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
17: 7 ~ 10, 2002

시간에 따라 변하는 블랙홀 자기권의 플라즈마 속도

PLASMA VELOCITIES IN THE NONSTATIONARY BLACK HOLE MAGNETOSPHERE

박석재
한국천문연구원

SEOK JAE PARK
Korea Astronomy Observatory
E-mail: sjpark@kao.re.kr

(Received Nov. 15, 2002; Acceted Dec. 12, 2002)

ABSTRACT

In the earlier papers we analyzed the axisymmetric, nonstationary electrodynamics of the central black hole and a surrounding thin accretion disk in an active galactic nucleus. Based on those papers we analyze the axisymmetric, nonstationary force-free black hole magnetosphere and the motion of the plasma. We concentrate on deriving the relations between the velocity components of the plasma and those of the accreting magnetic field lines. We conclude that the former are given by the sum of the latter and the magnetic field terms.

Keywords : black hole physics — MHD — galaxies : jets

1. 서론

Macdonald와 Thorne(1982, 이하 MT)은 유입물질 원반으로 둘러싸인 거대한 블랙홀의 자기권을 이론적으로 잘 정리하였다. 즉 MT는 시간에 따라 변하지 않고 블랙홀의 자전축이 대칭축이 되는 모델을 잘 정리함으로써 이제 교과서에 수록될 정도가 되었다(e.g., Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

MT 모델에 근거를 둔 플라즈마의 흐름에 관한 연구는 제트와 같은 현상과 맞물려서 주목을 받아왔다. 하지만 이에 관한 대부분의 논문들은 시간에 따라 변하지 않는다는 특성상 상대적으로 더 쉬운 수학적 구조를 가지고 있다. 예를 들어 시간에 따라 변하지 않는 '제트 방정식'은 Okamoto(1975)에 의해 처음으로 유도된 후 여러 학자들에 의해 최근에 이르기까지 집중적으로 연구될 수 있었다.

하지만 우주에서 시간에 따라 변하지 않는 천체는 없는 바, 플라즈마의 흐름도 시간에 따라 변한다는 관점에서 살펴볼 필요가 있다. 그러기 위해서는 기초가 되는 블랙홀 자기권 모델부터 시간에 따라 변하는 것이라야 한다. 마침 MT 모델에 근거를 두어 만들어진 시간에 따라 변하는 모델이 있으므로(e.g., Park & Vishniac 1989; Park 2002), 이곳에서 플라즈마의 흐름을 알아보고자 한다.

플라즈마의 속도를 $\boldsymbol{v}$라 하자. 그러면 우리가 생각하는 블랙홀 자기권이 'highly-conducting' 하다는 가정으로부터

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0 \tag{1-1}$$

을 얻는다. 또한 자기권이 'force-free' 조건을 만족한다는 가정 아래

$$\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=0 \tag{1-2}$$

도 만족한다. 식 (1-1), (1-2)에서 물리량들은 전자기학에서 정의되는 그대로이다.

2장에서는 시간에 따라 변하는 블랙홀 자기권의 전자기학을 정리해 본다. 이를 바탕으로 3장에서는 플라즈마 운동을 기술하는데 가장 기본이 되는 물리량, 플라즈마의 속도에 대하여 알아본다. 그리고 4장에서는 3장의 결과를 앞으로 어떤 연구에 활용할 수 있는지 서술한다.

시간에 따라 변하는 우리 모델의 중심에는 질량 M, 각운동량 J, 질량 당 각운동량 $a \equiv J/M$를 갖는 Kerr 블랙홀이 자리잡고 있다고 가정한다.

2. 시간에 따라 변하는 블랙홀 자기권

블랙홀 자기권을 상대론적으로 기술하는 데에 가장 기본이 되는 물리량은 물론 4차원 계량 텐서이다. 경과 함수를 α, 이동 벡터를 β^i, 3차원 공간의 계량 텐서를 γ_{ij}라 하

면 4차원 시공간의 계량 텐서는 일반적으로

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2+\beta_k\beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (2\text{-}1)$$

와 같이 주어진다. 여기서 라틴 문자는 1에서 3까지 달리고 시공간 부호는 (-+++)이다. 이 논문에서 모든 물리량의 단위는 $c=G\equiv 1$을 만족하도록 잡는다.

구좌표계 (r,θ,φ) 원점에 위치한 블랙홀을 기술하는 시공간 계량은

$$\alpha=\frac{\rho}{\Sigma}\Delta, \quad (2\text{-}2a)$$

$$\beta^{\varphi}\equiv-\omega=-\frac{2aMr}{\Sigma^2}, \quad (2\text{-}2b)$$

$$\gamma_{rr}=\frac{\rho^2}{\Delta^2}, \quad (2\text{-}2c)$$

$$\gamma_{\theta\theta}=\rho^2, \quad (2\text{-}2d)$$

$$\gamma_{\varphi\varphi}\equiv\varpi^2=\frac{\Sigma^2}{\rho^2}\sin^2\theta \quad (2\text{-}2e)$$

로 주어진다. 여기서 Δ, ρ, Σ는 각각

$$\Delta^2\equiv r^2+a^2-2Mr, \quad (2\text{-}2e)$$

$$\rho^2\equiv r^2+a^2\cos^2\theta, \quad (2\text{-}2f)$$

$$\Sigma^2\equiv(r^2+a^2)^2-a^2\Delta^2\sin^2\theta \quad (2\text{-}2g)$$

를 의미한다.

이 경우 블랙홀 주위를 각속도 ω로 회전하는 FIDO(Fiducial Observer, see Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988)는

$$\boldsymbol{e}_{\hat{r}}=\frac{\Delta}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}, \quad (2\text{-}3a)$$

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad (2\text{-}3b)$$

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}=\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (2\text{-}3c)$$

와 같은 관성계 단위 벡터를 갖는다.

식 (2-2e)로 주어지는 ϖ에 의해 $\boldsymbol{m}\equiv\varpi\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}$로 정의되는 벡터 $\boldsymbol{m}$은 축대칭 Killing 벡터가 되며 ∂A는 $\boldsymbol{m}$-고리(loop)라고 보면 된다. 축대칭 가정으로부터 임의의 스칼라 f와 , 임의의 벡터 $\boldsymbol{f}$, 그리고 $\boldsymbol{m}$에 대한 Lie 미분 L에 대하여

$$\boldsymbol{m}\cdot\nabla f=0,\ L_m\boldsymbol{f}=0, \quad (2\text{-}4a)$$

이 성립하고 시간에 따라 변한다는 조건으로부터

$$\frac{\partial f}{\partial t}\equiv\dot{f}\neq 0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\equiv\dot{\boldsymbol{f}}\neq 0 \quad (2\text{-}4b)$$

을 만족한다.

따라서 Kerr 블랙홀 주위 FIDO가 측정하는 Maxwell 방정식은

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e \quad (2\text{-}5a)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad (2\text{-}5b)$$

$$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{E})=-\dot{\boldsymbol{B}}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\omega)\boldsymbol{m} \quad (2\text{-}5c)$$

$$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{B})=\dot{\boldsymbol{E}}-(\boldsymbol{E}\cdot\nabla\omega)\boldsymbol{m}+4\pi\alpha\boldsymbol{j} \quad (2\text{-}5d)$$

로 주어져야 한다.

블랙홀 사건의 지평선과 만나지 않는 $\boldsymbol{m}$-고리 A를 생각해 보자. 가장자리를 ∂A, 그리고 A의 작은 면적에 대한 직교 벡터를 $d\boldsymbol{S}$ 같이 표시하면, 우리는 A를 관통하는 총 전류 $I(t,\boldsymbol{r})$, 총 전기 flux $\Phi(t,\boldsymbol{r})$, 총 자기 flux $\Psi(t,\boldsymbol{r})$를 각각,

$$I(t,\boldsymbol{r})=-\int_A\alpha\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}, \quad (2\text{-}6a)$$

$$\Phi(t,\boldsymbol{r})=\int_A\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (2\text{-}6b)$$

$$\Psi(t,\boldsymbol{r})=\int_A\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (2\text{-}6c)$$

와 같이 정의할 수 있게 된다.

이 경우 전기장과 자기장은

$$\alpha\,\boldsymbol{j}^P=-\frac{\nabla I\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi}=-\frac{\nabla I\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2}, \quad (2\text{-}7a)$$

$$\boldsymbol{E}^P=\frac{\nabla\Phi\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi}=\frac{\nabla\Phi\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2}, \quad (2\text{-}7b)$$

$$\boldsymbol{B}^P=\frac{\nabla\Psi\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi}=\frac{\nabla\Psi\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2}, \quad (2\text{-}7c)$$

$$\boldsymbol{E}^T=-\frac{2}{\alpha\varpi}\left(\frac{\dot{\Psi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}=-\frac{2}{\alpha\varpi^2}\left(\frac{\dot{\Psi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{m} \quad (2\text{-}7d)$$

$$\boldsymbol{B}^T=-\frac{2}{\alpha\varpi}\left(I-\frac{\dot{\Phi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}=-\frac{2}{\alpha\varpi^2}\left(I-\frac{\dot{\Phi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{m}, \quad (2\text{-}7e)$$

와 같이 주어진다.

3. 시간에 따라 변하는 플라즈마 운동

플라즈마의 운동 속도와 자기장을

$$\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}^T+\boldsymbol{v}^P \quad (3\text{-}1a)$$

$$\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{B}^T+\boldsymbol{B}^P \quad (3\text{-}1b)$$

와 같이 나누어 생각하자. 여기서, 그리고 앞으로, T는 toroidal, P는 poloidal 성분을 의미한다. 그러면 유도되는 전기장은 식 (1-1)에 의해

$$\boldsymbol{E}^P=-\boldsymbol{v}^T\times\boldsymbol{B}^P-\boldsymbol{v}^P\times\boldsymbol{B}^T \quad (3\text{-}2a)$$

$$\boldsymbol{E}^T=-\boldsymbol{v}^P\times\boldsymbol{B}^P \quad (3\text{-}2b)$$

가 된다.

식 (3-2a), (3-2b)는 자기권이 시간에 따라 변하든 변하지 않든 항상 성립하는 것들이다. 하지만 시간에 따라 변

하지 않는 경우에는 $E^T=0$ 이므로 식 (3-2b)로부터 임의의 스칼라 κ를 이용하여

$$v^P \equiv \kappa B^P \tag{3-3a}$$

로 놓을 수 있다. 식 (3-3a)는 플라즈마 물질이 자기력선을 따라 자기권의 밖으로 나갈 수 있는 근거가 된다. 즉 제트와 같은 물질의 흐름이 자연스럽게 생성되는 것이다. 하지만 우리는 지금 $E^T \neq 0$ 인 경우를 다루고 있으므로 임의의 poloidal 벡터 C를 이용하여

$$v^P \equiv \kappa B^P + C \tag{3-3b}$$

로 놓도록 하자. 그러면 식 (3-3b)는 시간에 따라 변하지 않을 때에는 식 (3-3a)로 환원된다.

식 (2-7c), (3-3b)를 식 (3-2b)에 대입하면

$$E^T = -\frac{1}{2\pi\varpi}(C\cdot\nabla\Psi)\,e_{\hat\varphi} = -\frac{1}{2\pi\varpi^2}(C\cdot\nabla\Psi)m, \tag{3-4a}$$

가 된다. 따라서 식 (3-4a)를 식 (2-7d)과 비교하여 유용한 관계식

$$\dot\Psi = -\alpha C\cdot\nabla\Psi \tag{3-4b}$$

를 얻게 된다.

자기권 모델 안의 자기력선의 속도를 v_F라 하면 Ψ는 v_F의 toroidal 성분에 의해서는 변하지 않고 오로지 poloidal 성분에 의해서만 변하게 되므로

$$\dot\Psi = -\alpha\, v_F^P\cdot\nabla\Psi \tag{3-5a}$$

가 된다. 따라서 식 (3-4b)와 식 (3-5a)를 비교하여 우리는

$$C = v_F^P, \tag{3-5b}$$

즉

$$v^P \equiv \kappa B^P + v_F^P \tag{3-5c}$$

임을 깨닫게 된다. 식 (3-5c)는 제트와 같은 물질의 흐름을 더 쉽게 형성시킬 수 있다는 의미를 지닌다. 왜냐하면 v_F^P의 방향은 물질의 유입 때문에 자기권 모델의 대칭축 방향을 향할 것이기 때문이다.

이상에서 살펴본 바와 같이 시간에 따라 변하는 자기권 모델에서는 당연히

$$v_F = v_F^T + v_F^P \tag{3-6}$$

가 되어야 한다. 식 (3-6)에서 v_F^T 항만 있다면 시간에 따라 변하지 않는 모델이 된다. 왜냐하면 자기력선들이 회전만 할 뿐 실질적으로 블랙홀로 유입되지 않기 때문이다. 즉 v_F^P 항이 존재함으로 말미암아 시간에 따라 변하는 모델이 가능하다는 것을 다시 확인할 수 있게 된다. 식 (3-6)으로 주어지는 v_F가 만일

$$E + v_F\times B = 0 \tag{3-7a}$$

을 만족한다면 자기력선과 같이 움직이는 관측자는

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-v_F^2}}(E + v_F\times B) = 0 \tag{3-7b}$$

이므로 전기장을 느낄 수 없게 된다.

지금부터 우리는 식 (3-7a)를 만족하는 v_F에 대해서만 생각해보기로 한다. 식 (3-7a)를 식 (1-2)에 대입하면 $-\rho_e v_F\times B + j\times B = 0$가 되므로 임의의 스칼라 ξ를 이용해

$$j \equiv \rho_e v_F + \xi B \tag{3-8a}$$

로 놓을 수 있다. 식 (3-8a)를 성분별로 보면

$$j^T = \rho_e v_F^T + \xi B^T \tag{3-8b}$$

$$j^P = \rho_e v_F^P + \xi B^P \tag{3-8c}$$

가 된다.

그런데 플라즈마 운동에서 당연히

$$j = \rho_e v \tag{3-9a}$$

를 만족해야 하므로

$$v^T = v_F^T + \frac{\xi}{\rho_e}B^T \tag{3-9b}$$

$$v^P = v_F^P + \frac{\xi}{\rho_e}B^P \tag{3-9c}$$

가 성립한다. 여기서 식 (3-5c)와 식 (3-9c)를 비교하여

$$\frac{\xi}{\rho_e} = \kappa \tag{3-10}$$

임을 알 수 있다.

따라서 식 (3-9b), (3-9c)는 각각

$$v^T = v_F^T + \kappa B^T \tag{3-11a}$$

$$v^P = v_F^P + \kappa B^P \tag{3-11b}$$

가 되고 합치면

$$v = v_F + \kappa B \tag{3-11c}$$

가 되는데, 식 (3-11a), (3-11b), (3-11c)가 바로 우리가 필요로 하는 플라즈마의 운동 속도이고 이 논문에서 처음으로 소개되는 것들이다.

식 (3-11b)에 대해서는 이미 앞에서 자세히 살펴보았으니 식 (3-11a)에 대해 더 알아보자. 식 (3-11a)는 시간에 따라 변하지 않는 경우에도 그대로 적용될 만큼 자연스럽다. 예를 들어 가장 간단한 경우 — 시간에 따라 변하지 않는 비상대론적인 경우 — 에도 식 (2-5c)는 $\nabla\times E = 0$이 되므로 여기에 식 (1-1)을 대입하면 식 (3-11a)가 정확히 유도된다.

4. 결론

자기력선의 각속도를 Ω_F라 하면 임의의 FIDO에 대해서

$$v_F^T = -\frac{\omega-\Omega^F}{\alpha}\varpi\, e_{\hat\varphi} = -\frac{\omega-\Omega^F}{\alpha}m \tag{4-1a}$$

로 놓을 수 있는데 이것을 식 (3-8b)에 대입하면

$$\boldsymbol{j}^{T} = -\frac{\rho_e(\omega - \Omega^{F})}{\alpha}\boldsymbol{m} + \zeta\,\boldsymbol{B}^{T} \tag{4-1b}$$

를 얻는다. 식 (4-1b)에 ρ_e와 $\boldsymbol{j}$를 구하여 대입하면 우리는 'force-free' 블랙홀 자기권의 Grad-Shafranov 방정식

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left[\frac{\alpha}{\varpi^2}\left\{1-\frac{(\omega-\Omega_F)^2\varpi^2}{\alpha^2}\right\}\nabla\Psi\right] \\
&- \left\{\frac{\omega-\Omega_F}{\alpha}\nabla\Psi + \frac{4\pi}{\alpha\varpi^2}\left(I-\frac{\dot{\Phi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{v}_F^{P}\times\boldsymbol{m}\right\}\cdot\nabla\Omega_F \\
&- 4\pi\nabla\cdot\left\{\frac{\omega-\Omega_F}{\alpha\varpi^2}\left(I-\frac{\dot{\Phi}}{4\pi}\right)\boldsymbol{v}_F^{P}\times\boldsymbol{m}\right\} \\
&+ \frac{2\pi}{\varpi^2}\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{m} - \frac{16\pi^2\zeta}{\varpi^2}\left(I-\frac{\dot{\Phi}}{4\pi}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4-2}$$

을 구할 수 있다(Park 2002, 식 [39]).

이와 마찬가지로 원리적으로는, 식 (3-11a), (3-11b), (3-11c)를 적용하면서 상대론적 자기유체역학의 Euler 방정식을 이용하여 플라즈마의 흐름을 기술하는 제트 방정식, 즉 식 (4-2)와 비슷한 또 다른 Grad-Shafranov 방정식을 구할 수 있다. 하지만 식 (4-2)가 $\boldsymbol{v}_F^{P}$ 와 $\dot{\boldsymbol{E}}$의 시간에 따른 변화를 구체적으로 입력하지 않는 한 거의 풀릴 수 없는 편미분방정식 꼴을 취하고 있는 것을 보면, 제트 방정식을 구하는 일은 더 어렵기도 하겠지만 별 의미가 없는 것처럼 여겨진다. 특히 시간에 따라 변하는 자기권에서는 보존되는 물리량이 없으므로 더욱 그렇다.

참고문헌

Macdonald, D. A., & Thorne, K. S. 1982, MNRAS, 198, 345 (MT)

Novikov, I. D., & Frolov, V. P. 1988, Physics of Black Holes (Kluwer Academic Pub.)

Okamoto, I. 1975, MNRAS, 173, 357

Park, S. J., & Vishniac, E. T. 1989, ApJ, 337, 78

Park, S. J. 2002, in Current High-Energy Emission around Black Holes, ed. C.-W. Lee & H.-Y. Chang (World Scientific), p231

Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, Black Holes: The Membrane Paradigm (Yale Univ. Press)