PUBLICATION OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
17: 1 ~ 6, 2002

<해설논문(Review Article)>

'제트 방정식'의 완벽한 유도
THE FULL DERIVATION OF THE JET EQUATION

박석재[1], 이태형[2]
[1]한국천문연구원
[2]경희대학교

SEOK JAE PARK[1], TAE HYEONG LEE[2]
[1]Korea Astronomy Observatory
[2]Kyunghee University
E-mail : sjpark@kao.re.kr, starcafe@space.kyunghee.ac.kr
(Received Nov. 1, 2002; Accepted Dec. 15, 2002)

ABSTRACT

In this review article the famous 'jet equation' of the neutron stars and black holes will be fully derived for the pedagogical purposes.

Keywords : black hole physics — MHD — galaxies : jets

1. 서론

중성자성과 블랙홀의 자기권에 대한 이론적 연구의 효시는 Goldreich & Julian (1969, 이하 GJ)이다. 따라서 GJ가 발표된 시점을 중성자성과 블랙홀의 자기권 모델 연구가 시작된 시점으로 봐도 큰 문제가 없으리라고 본다. 우리는 Park(2000, 이하 논문 I)에서 GJ가 발표된 1969년부터 최근에 이르기까지, 30년 동안 발전된 중성자성과 블랙홀 자기권 모델에 대하여 자세히 알아보았다.

이 논문에서는 그 내용 중에서도 특히 '제트 방정식'에 주목하기로 한다. 왜냐하면 헤아릴 수 없이 많은 논문이 이 제트 방정식에 기초를 두어 발표되었기 때문이다. 제트 방정식은 Okamoto(1975)에 의해 처음으로 유도된 후 미국, 일본, 영국에서 집중적으로 연구되었는데 특히 미국의 Cornell 대학, 일본의 Nagoya 대학, 영국의 Cambridge 대학 등에서 많은 결과들을 얻었다. 특히 Cornell 대학은 이 방정식 하나로 많은 대학원생들이 박사 학위를 받았을 정도였다. 이렇게 중요한 방정식이기 때문에 그것을 처음부터 끝까지 유도해보는 것은 교육적으로도 매우 중요한 일이 되고 있다. 이 논문에서는 우리 학생들의 용이한 학습을 위해 제트 방정식을 완벽하게 유도해 보이기로 하겠다.

논문 I에서는 편의상 중성자성의 자기권은 비상대론적으로, 블랙홀의 자기권은 상대론적으로 가정되었다. 하지만 이는 정확한 기술은 아니었다. 왜냐하면 중성자성 자기권도 표면 근처에서는 충분히 상대론적일 수 있기 때문이다. 이 논문에서는 중성자성이나 블랙홀의 자기권 모두 비상대론적이라고 가정한다. 따라서 이 논문에서 유도되는 제트 방정식은 중성자성 경우든 블랙홀 경우든 똑같이 적용될 수 있다.

우리가 알아볼 중성자성이나 블랙홀의 자기권 모델은 GJ를 기반으로 하여 발전된 것(이하, GJ 모델)으로 시공간 좌표를 $(t, \boldsymbol{r})$, 공간의 원통 좌표계를 (R,ϕ,z), 구 좌표계를 (r,θ,ϕ)라 할 때 시간에 따라 변하지 않고 z-축에 대하여 대칭을 유지하는 것이므로 모든 식에서

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot\cdot\cdot)=\frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot\cdot\cdot)=0 \tag{1-1}$$

이 만족된다. 또한 highly-conducting 플라즈마로 가득 채워져 있어 전기장 $\boldsymbol{E}$, 자기장 $\boldsymbol{B}$, 자기력선의 속도 $\boldsymbol{v}$, 광속도 c 사이에는

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0 \tag{1-2}$$

이 만족된다. 그리고 degenerate 조건

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-3}$$

도 만족하게 된다.

2장에서는 먼저 GJ 모델의 ,펄사 방정식,의 유도를 정리하겠다. 펄사 방성식 유도는 제트 방정식의 유도의 기본이 되기 때문이다. 3장에서는 2장에서 요약한 자기권 속의 플라즈마 운동을 알아본다. 이 경우 보존되는 물리량들이 있는데 이들에 대해 자세히 알아본다. 그리고 4장에서는 본격적으로 제트 방정식을 유도하기로 하겠다.

2. 펄사 방정식

여기서는 제트 방정식의 기본이 된 펄사 방정식의 유도를

간단히 정리하겠다. 자세한 유도는 논문 I의 2장을 참고하기 바란다. 식 (1-1)에 의하여 GJ 모델에서는 Maxwell 방정식이

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e \tag{2-1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2-2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{2-3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2-4}$$

와 같은 꼴로 주어진다. 여기서 ρ_e는 전하 밀도, $\boldsymbol{j}$는 전류 밀도로서 자기권 모델에서는

$$\rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{2-5}$$

를 만족한다. 식 (2-5)는 ƒforce-free„ 조건이라고 불리는데, 전자기장이 충분히 강한 극한 환경에서 inertia 항들을 생각할 필요가 없는 경우를 의미한다.

자기장을

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{2-6}$$

와 같이 나누어 생각하기로 한다. 여기서, 그리고 앞으로, T는 toroidal, P는 poloidal 성분을 의미한다. 자기권 모델에서 자기장은 회전만 하므로 자기력선의 속도는

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{F}} \equiv R\Omega^{\mathrm{F}}\,\boldsymbol{1}_\phi \tag{2-7}$$

가 된다. 여기서 Ω^{F}는 자기력선의 각속도, $\boldsymbol{1}_\phi$는 ϕ-방향의 단위 벡터를 의미한다. 따라서 유도되는 전기장은 식 (1-2), (2-6), (2-7)에 의해

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{F}} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{P}} \tag{2-8}$$

가 되어 poloidal 성분만 갖게 된다. 즉 $E^{\mathrm{T}} = 0$인 것이다.

중성자성의 ƒ북극„ 위에서 대칭축인 z-축 한 점으로부터 거리가 R만큼 떨어진 임의의 원을 생각하자. 그 원으로 둘러싸인 표면을 A라 하고(평면일 필요는 없음) 면적 미분소를 dS, 그 표면을 지나는 자기 flux Ψ를

$$\Psi = \int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-9}$$

와 같이 정의하면 우리는

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} = \frac{\nabla\Psi \times \boldsymbol{1}_\phi}{2\pi R} \tag{2-10}$$

를 얻는다. 따라서 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}$는 식 (2-7), (2-8), (2-10)에 의해

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}} = -\frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c}\,\boldsymbol{1}_\phi \times \frac{\nabla\Psi \times \boldsymbol{1}_\phi}{2\pi R} = -\frac{\Omega^{\mathrm{F}}}{2\pi c}\nabla\Psi \tag{2-11}$$

와 같이 주어진다.

여기서 식 (2-9)와 유사하게 I를

$$I = -\int_A \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-12}$$

라고 정의하자. 그러면

$$\boldsymbol{j}^{\mathrm{P}} = -\frac{\nabla I \times \boldsymbol{1}_\phi}{2\pi R} \tag{2-13}$$

가 된다. 또한 Maxwell 방정식 (2-4)에 의하여

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = -\frac{2I}{cR}\,\boldsymbol{1}_\phi \tag{2-14}$$

가 된다.

이 경우 ρ_e는 식 (2-1), (2-11)에 의해

$$\rho_e = -\frac{\Omega^{\mathrm{F}}}{8\pi^2 c}\nabla^2\Psi - \frac{1}{8\pi^2 c}\nabla\Omega^{\mathrm{F}} \cdot \nabla\Psi, \tag{2-15}$$

로 주어진다. 그리고 식 (2-4)에 식 (2-10)을 대입하여 $\boldsymbol{j}$의 toroidal 성분을

$$\begin{aligned} j^{\mathrm{T}} &= -\frac{c}{8\pi^2 R}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \\ &\equiv -\frac{c}{8\pi^2 R}\Delta^*\Psi \end{aligned} \tag{2-16}$$

와 같이 구할 수 있다.

또한 식 (2-10)과 (2-13)으로부터 우리는

$$\boldsymbol{j}^{\mathrm{P}} = -\frac{dI}{d\Psi}\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{2-17}$$

관계가 있음을 깨닫게 된다. 식 (2-17)을 식 (2-5)의 poloidal 성분에 대입하면 관계식

$$-\rho_e R\Omega^{\mathrm{F}} + j^{\mathrm{T}} + \frac{dI}{d\Psi}B^{\mathrm{T}} = 0 \tag{2-18}$$

을 얻는다.

식 (2-18)에 식 (2-15)와 (2-16)을 대입하고 정돈하면 우리는 마침내

$$\left\{1 - \left(\frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c}\right)^2\right\}\Delta^*\Psi - \frac{1}{2c^2R^2}\nabla\{R^4(\Omega^{\mathrm{F}})^2\} \cdot \nabla\Psi + \frac{16\pi^2 I}{c^2}\frac{dI}{d\Psi} = 0 \tag{2-19}$$

또는

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{R^2}\left\{1 - \left(\frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c}\right)^2\right\}\nabla\Psi\right] + \frac{\Omega^{\mathrm{F}}}{c^2}\nabla\Omega^{\mathrm{F}} \cdot \nabla\Psi + \frac{16\pi^2 I}{c^2R^2}\frac{dI}{d\Psi} = 0 \tag{2-20}$$

을 얻는다. 식 (2-19)와 (2-20)은 GJ 자기권을 완벽하게 기술하는 필사 방정식이요, transfield 방정식이요, Grad-Shafranov 방정식이다. 여기서 Grad-Shafranov 방정식이란 대칭축을 갖는 플라즈마를 기술하는 기본 방정식을 의미한다. 식 (2-19)와 (2-20)은 GJ가 발표될 때까지 알려지지 않았었지만 그 후 Michel (1973), Scharlemann & Wagoner (1973), Julian (1973), Okamoto (1974)에 의하여 독립적으로 발견되었다.

식 (2-11)을 식 (2-3)에 대입하면

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \cdot \nabla\Omega^{\mathrm{F}} = 0, \tag{2-21}$$

즉 Ferraro의 iso-rotation을 얻게 된다. 따라서 Ω^F 값은 한 자기력선을 따라서는 일정한 값을 갖게 된다.

3. 보존되는 물리량들

앞장에서 요약한 GJ 자기권 속의 플라즈마 운동에서 보존되는 물리량들이 있는데 이들에 대해 알아보자.

플라즈마는 당연히 식 (1-1)을 만족하는 자기유체역학 연속 방정식

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3-1}$$

과 Euler 방정식

$$\rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \nabla P \tag{3-2}$$

에 의하여 기술된다. 식 (3-1), (3-2)에서 ρ는 플라즈마의 밀도, $\boldsymbol{v}$는 플라즈마의 속도, P는 압력이고 중력은 무시하고 있음에 유의하자. 식 (3-2)로부터 플라즈마의 운동을 생각할 때는 조건 (2-5)를 더 이상 고려하지 않는다는 사실을 알게 된다.

입자들은 toroidal 방향으로 $v^T = R\Omega$로 회전한다고 생각하고 여기에 poloidal 방향의 속도를 더해 전체 속도 $\boldsymbol{v}$를

$$\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}^T + \boldsymbol{v}^P \tag{3-3}$$

와 같이 나타내자. 그러면 식 (1-2), (2-3)는 $\boldsymbol{v}^P$가 임의의 스칼라 κ를 이용하여

$$\boldsymbol{v}^P \equiv \kappa \boldsymbol{B}^P \tag{3-4}$$

로 표현될 수 있게 해준다. 또한 식 (3-4)를 이용하면 식 (1-2), (2-3)으로부터

$$\boldsymbol{B}^P \cdot \nabla\left(\Omega - \frac{\kappa B^T}{R}\right) = 0 \tag{3-5}$$

을 얻는다. 즉 이 경우 Ω^F는

$$\Omega^F = \Omega - \frac{\kappa B^T}{R} \tag{3-6}$$

가 되어야 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 되고 식 (2-21)을 만족하게 된다.

식 (3-6)이 성립하는 경우 플라즈마 속도의 toroidal 성분은

$$v^T = R\Omega = R\Omega^F + \kappa B^T \tag{3-7}$$

로 주어진다. 식 (3-4), (3-7)을 결합하면

$$\boldsymbol{v} = \kappa \boldsymbol{B} + R\Omega^F \mathbf{1}_\phi \tag{3-8}$$

과 같이 나타낼 수 있게 된다. 식 (3-8)의 첫 항은 식 (2-8), (2-11)의 결과에 전혀 영향을 미치지 않음에 유의하자.

식 (3-6)를 이용하면 연속 방정식 (3-1)으로부터

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\rho\kappa \boldsymbol{B}^P) = \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla(\rho\kappa) = 0 \tag{3-9}$$

이 되므로

$$\eta \equiv \rho\kappa \tag{3-10}$$

로 주어지는 양 또한 한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다.

Euler 방정식 (3-2)의 toroidal 성분에서

$$\{(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\}^T = v_R \frac{\partial(R\Omega)}{\partial R} + \Omega v_R + v_z \frac{\partial(R\Omega)}{\partial z}$$

이므로 $\{\rho R(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\}^T = \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(R^2\Omega)$를 얻고 결국 $\rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(R^2\Omega) = \frac{R}{4\pi}\{(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}\}^T$가 된다. 따라서 식 (3-4), (3-9)로부터

$$\begin{aligned} -\rho\kappa \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla(R^2\Omega) + \frac{1}{4\pi}\left(B_R \frac{\partial}{\partial R} + B_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(RB^T) \\ = \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla\left(-\eta R^2\Omega + \frac{1}{4\pi} RB^T\right) \\ = 0 \end{aligned}$$

가 되고 식 (2-14)를 이용하면

$$L \equiv R^2\Omega - \frac{RB^T}{4\pi\eta} = Rv^T + \frac{I}{2\pi c\eta} \tag{3-11}$$

값 역시 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 L은 단위 질량 당 각운동량이라는 사실을 쉽게 알 수 있다.

상태 방정식 $P \equiv K\rho^\Gamma$의 K도 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 되어

$$\boldsymbol{B}^P \cdot \nabla K = 0 \tag{3-12}$$

가 성립한다. 이는 플라즈마 입자 당 엔트로피 s가 Boltzmann 상수를 k_B라 할 때

$$s = \frac{k_B}{\Gamma - 1}\ln K \tag{3-13}$$

로 주어지고

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla s = 0 \tag{3-14}$$

을 만족하여 s 또한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖기 때문이다.

Euler 방정식 (3-2)의 poloidal 성분에 대해서도 알아보자. 식 (3-2)에 $\boldsymbol{v}$의 내적을 취한 뒤 식 (3-8)을 이용하면

$$\begin{aligned} \rho\boldsymbol{v} \cdot \left\{\nabla\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})\right\} + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \\ - \rho_e \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P \\ = \eta \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla\frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^F}{4\pi}\boldsymbol{B}^P \cdot \nabla(RB^T) \\ + \kappa \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla(K\rho^\Gamma) \\ = 0 \end{aligned}$$

이 된다. 그런데 마지막 항은

$$\begin{aligned} \kappa \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla(K\rho^\Gamma) &= \eta \boldsymbol{B}^P \cdot (K\Gamma\rho^{\Gamma-2}\nabla\rho) \\ &= \eta \boldsymbol{B}^P \cdot \nabla\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right) = 0 \end{aligned}$$

이므로 식 (3-11)의 도움을 받아

$$\boldsymbol{B}^{P}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}-\frac{\Omega^F}{\eta}\frac{RB^T}{4\pi}+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right)$$
$$=\boldsymbol{B}^{P}\cdot\nabla\left\{\frac{v^2}{2}-\Omega^F\left(L+\frac{RB^T}{4\pi\eta}\right)+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right\}$$
$$=0$$

이 되므로

$$E\equiv\frac{v^2}{2}-\frac{\Omega^F RB^T}{4\pi\eta}+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{v^2}{2}+\frac{I\Omega^F}{2\pi c\eta}+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho} \tag{3-15}$$

값 또한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 E는 단위 질량 당 에너지라는 사실도 쉽게 알 수 있다.

지금까지 정의된 Ω^F, η, L, E, s(또는 K) 등이 자기력선을 따라서 보존되는 양들이라는 사실은 Chandrasekhar(1956)에 의하여 최초로 소개되었고 Mestel(1961)에 의하여 확실히 자리잡게 되었다. 즉 Ω^F, η, L, E, s는 integration of motion 으로서 $\Omega^F=\Omega^F(\Psi)$, $\eta=\eta(\Psi)$, $L=L(\Psi)$, $E=E(\Psi)$, $s=s(\Psi)$를 만족하는 것이다.

4. 제트 방정식

제트 방정식은 식 (3-2)를 변형한 식

$$\nabla\frac{v^2}{2}=\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})-\frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{4-1}$$

에서 구할 수 있다.

자기력선에 수직인 단위 벡터

$$\mathbf{1}_\perp\equiv\mathbf{1}^P\times\mathbf{1}_\phi=-\frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|}=-\frac{\nabla\Psi}{2\pi RB^P} \tag{4-2}$$

를 생각하면

$$(\mathbf{1}_\perp\cdot\nabla)f=-\frac{1}{|\nabla\Psi|}\nabla\Psi\cdot\nabla f\equiv\nabla_\perp f \tag{4-3}$$

가 된다. 식 (4-1)의 양변에 $\mathbf{1}_\perp$과 내적을 취하면 좌변은

$$\nabla_\perp\frac{v^2}{2}=\nabla_\perp\left(E+\frac{\Omega^F RB^T}{4\pi\eta}-\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right) \tag{4-4}$$

가 된다.

식 (4-2)의 우변은

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{B}^P\times(\nabla\times\boldsymbol{B})^T=\frac{4\pi}{c}j^TB^P,$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{B}^T\times(\nabla\times\boldsymbol{B})^P=\frac{B^T}{R}\nabla_\perp(RB^T),$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^P\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^T$$
$$=\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^P\times\{\nabla\times(\kappa\boldsymbol{B}+R\Omega^F\mathbf{1}_\phi)\}^T,$$
$$=\frac{(B^P)^2}{2}\nabla_\perp\kappa^2+\frac{4\pi\kappa^2}{c}j^TB^P$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^T\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^P$$
$$=\mathbf{1}_\perp\cdot\left\{\mathbf{1}_z\frac{v^T}{R}\frac{\partial}{\partial z}(Rv^T)+\mathbf{1}_R\frac{v^T}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rv^T)\right\}$$
$$=\frac{v^T}{R}\nabla_\perp(Rv^T),$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^P\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^P=0,$$

$$\frac{\rho_e}{\rho}\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{E}=\frac{R\Omega^F}{c}\frac{\rho_e}{\rho}B^P$$

임을 고려하면

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\left\{\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})-\frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\rho}\nabla P\right\}$$
$$=\frac{(B^P)^2}{2}\nabla_\perp\kappa^2+\frac{v^T}{R}\nabla_\perp(Rv^T)-\frac{B^T}{4\pi\rho R}\nabla_\perp(RB^T)-\frac{1}{\rho}\nabla_\perp P-\frac{1-M_A^2}{c\rho}j^TB^P+\frac{R\Omega^F}{c\rho}B^P\rho_e \tag{4-5}$$

가 된다.

따라서 식 (4-4)와 식 (4-5)를 등치하면

$$\nabla_\perp\left(E+\frac{\Omega^F RB^T}{4\pi\eta}\right)-\frac{v^T}{R}\nabla_\perp(Rv^T)+\frac{B^T}{4\pi\rho R}\nabla_\perp(RB^T)-\nabla_\perp\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\nabla_\perp P-\frac{(B^P)^2}{2}\nabla_\perp\kappa^2+\frac{1-M_A^2}{c\rho}j^TB^P-\frac{R\Omega^F}{c\rho}B^P\rho_e=0 \tag{4-6}$$

이 된다. 식 (4-6) 앞의 세 항은 식 (3-11)에서 얻은 결과

$$RB^T=-4\pi\eta(L-R^2\Omega)=-4\pi\eta(L-Rv^T)$$

를 대입하고 정돈하면

$$\nabla_\perp\left(E+\frac{\Omega^F RB^T}{4\pi\eta}\right)-\frac{v^T}{R}\nabla_\perp(Rv^T)+\frac{B^T}{4\pi\rho R}\nabla_\perp(RB^T)$$
$$=\nabla_\perp E-\nabla_\perp(\Omega^F L)+Rv^T\nabla_\perp\Omega^F-\frac{B^T}{\rho R}\nabla_\perp(\eta L)+\frac{v^TB^T}{\rho}\nabla_\perp\eta$$

가 된다. 그리고

$$-\nabla_\perp\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\nabla_\perp P=-\frac{\rho^{\Gamma-1}}{\Gamma-1}\nabla_\perp K$$

는 식 (3-13)으로부터 얻은

$$\nabla_\perp K=\frac{\Gamma-1}{k_B}K\nabla_\perp s=\frac{\Gamma-1}{k_B}\frac{P}{\rho^\Gamma}\nabla_\perp s$$

를 대입하면 결국

$$-\frac{\rho^{\Gamma-1}}{\Gamma-1}\nabla_\perp K=-\frac{P}{\rho k_B}\nabla_\perp s$$

가 된다. 따라서 식 (4-6)은 결국

$$\nabla_\perp E - \nabla_\perp(\Omega^F L) + Rv^T \nabla_\perp \Omega^F - \frac{B^T}{\rho R}\nabla_\perp(\eta L) + \frac{v^T B^T}{\rho}\nabla_\perp \eta - \frac{P}{\rho k_B}\nabla_\perp s - \frac{(B^P)^2}{2}\nabla_\perp \kappa^2 + \frac{1-M_A^2}{c\rho} j^T B^P - \frac{R\Omega^F}{c\rho} B^P \rho_e = 0$$

이 된다. 여기서 $(') \equiv d/d\Psi$ 로 놓으면 앞의 여섯 항은

$$\begin{aligned}
&\nabla_\perp E - \nabla_\perp(\Omega^F L) + Rv^T \nabla_\perp \Omega^F - \frac{B^T}{\rho R}\nabla_\perp(\eta L) + \frac{v^T B^T}{\rho}\nabla_\perp \eta - \frac{P}{\rho k_B}\nabla_\perp s \\
&= -\frac{1}{|\nabla\Psi|}\nabla\Psi\cdot\Big\{\nabla E - \nabla(\Omega^F L) + Rv^T\nabla\Omega^F - \frac{B^T}{\rho R}\nabla(\eta L) + \frac{v^T B^T}{\rho}\nabla\eta - \frac{P}{\rho k_B}\nabla s\Big\} \\
&= -|\nabla\Psi|\Big\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)' - \frac{B^T}{\rho R}(\eta L)' + \frac{v^T B^T}{\rho}\eta' - \frac{P}{\rho k_B}s'\Big\}
\end{aligned}$$

이고 뒤의 세 항은

$$-\frac{(B^P)^2}{2}\nabla_\perp \kappa^2 = \frac{(B^P)^2}{2}\frac{1}{|\nabla\Psi|}\nabla\Psi\cdot\nabla\kappa^2 = \frac{B^P}{4\pi R}\nabla\kappa^2\cdot\nabla\Psi$$

와

$$\begin{aligned}
&\frac{1-M_A^2}{c\rho} j^T B^P - \frac{R\Omega^F}{c\rho} B^P \rho_e \\
&= -\frac{B^P}{8\pi^2\rho R}\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\Delta^*\Psi + \frac{B^P}{8\pi^2\rho R}\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2\frac{2}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{B^P}{8\pi^2\rho R}\frac{\Omega^F}{c^2}\nabla\Omega^F\cdot\nabla\Psi
\end{aligned}$$

가 되므로 결국 식 (4-6)은

$$\begin{aligned}
&-|\nabla\Psi|\Big\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)' - \frac{B^T}{\rho R}(\eta L)' + \frac{v^T B^T}{\rho}\eta' - \frac{P}{\rho k_B}s'\Big\} + \frac{B^P}{4\pi R}\nabla\kappa^2\cdot\nabla\Psi \\
&- \frac{B^P}{8\pi^2\rho R}\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\Delta^*\Psi + \frac{B^P}{16\pi^2\rho c^2 R^3}\nabla\{R^4(\Omega^F)^2\}\cdot\nabla\Psi = 0
\end{aligned}$$

가 된다. 이를 정돈하면

$$\begin{aligned}
&\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\Delta^*\Psi - \frac{1}{2c^2R^2}\nabla\{R^4(\Omega^F)^2\}\cdot\nabla\Psi - \frac{M_A^2}{\kappa}\nabla\kappa\cdot\nabla\Psi \\
&= -\frac{4\pi^2R^2M_A^2}{\kappa^2}\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)'\} + 16\pi^3 RB^T\{(\eta L)' - Rv^T\eta'\} + 16\pi^3R^2\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned} \tag{4-7}$$

또는

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\nabla\Psi\right] + \frac{\Omega^F}{c^2}\nabla\Omega^F\cdot\nabla\Psi + \frac{1}{R^2}\left(\nabla M_A^2 - \frac{M_A^2}{\kappa}\nabla\kappa\right)\cdot\nabla\Psi \\
&= -\frac{4\pi^2M_A^2}{\kappa^2}\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)'\} + \frac{16\pi^3}{R^2}RB^T\{(\eta L)' - Rv^T\eta'\} + 16\pi^3\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned} \tag{4-8}$$

가 된다. 식 (4-7), (4-8)에서

$$M_A^2 \equiv \frac{4\pi\eta^2}{\rho} = 4\pi\rho\kappa^2 = \frac{4\pi\rho(v^P)^2}{(B^P)^2} \tag{4-9}$$

은 Alfvenic Mach 수이다.

식 (4-7), (4-8)이 바로 우리가 추적해온 제트 방정식으로서 Okamoto(1975)에 의해 처음 제안되었고 최근까지 수많은 사람들에 의하여 여러 가지 방법으로 유도되고 수치해석적으로 풀렸다(e.g., see Heinemann & Olbert 1978; Blandford & Payne 1982; Lovelace et al. 1986; Mestel & Shibata 1994).

5. 결론

식 (4-7), (4-8)에 식 (2-14), (3-11), (4-9)를 대입하여 각각 정돈하면

$$\begin{aligned}
&\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\Delta^*\Psi - \frac{1}{2c^2R^2}\nabla\{R^4(\Omega^F)^2\}\cdot\nabla\Psi - \frac{M_A^2}{\kappa}\nabla\kappa\cdot\nabla\Psi \\
&+ \frac{4\pi^2R^2M_A^2}{\kappa^2}\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)'\} + \frac{16\pi^2 I}{c^2}\left\{I' + \frac{cM_A^2}{2\kappa}(Rv^T)'\right\} - 16\pi^3R^2\frac{P}{k_B}s' = 0
\end{aligned} \tag{5-1}$$

과

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega^F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\nabla\Psi\right] + \frac{\Omega^F}{c^2}\nabla\Omega^F\cdot\nabla\Psi - \frac{M_A^2}{R^2}\left(2\nabla M_A^2 + \frac{1}{\kappa}\nabla\kappa\right)\cdot\nabla\Psi \\
&+ \frac{4\pi^2M_A^2}{\kappa^2}\{E' - (\Omega^F L)' + Rv^T(\Omega^F)'\} + \frac{16\pi^2 I}{c^2R^2}\left\{I' + \frac{cM_A^2}{2\kappa}(Rv^T)'\right\} - 16\pi^3\frac{P}{k_B}s' = 0
\end{aligned} \tag{5-2}$$

가 된다.

식 (5-1), (5-2)은 각각 논문 I의 식 (3-21), (3-22)에 해당된다. 논문 I의 두 식에 오타가 있음에 주의하라. 식

(5-1), (5-2)에서 극한 $M_A^2 \to 0$, $s \to 0$ 을 취하면 식 (2-19), (2-20)이 되는 것은 물론이다. 그리고 $M_A^2 \to 0$, $s \to 0$인 경우 integration of motion 중에서 $\eta=\eta(\Psi)$, $s=s(\Psi)$는 자동으로 사라지고 식 (2-19), (2-20)에서 보는 바와 같이 $\Omega^F=\Omega^F(\Psi)$, 그리고 $L=L(\Psi)$, $E=E(\Psi)$ 대신 $I=I(\Psi)$, 이렇게 두 개밖에 남지 않게 되는 것이다.

제트 방정식 (4-7), (4-8), (5-1), (5-2)는 이후 상대론적인 경우에도 완벽하게 적용되도록 더욱 발전되었다. 그리하여 Cornell 대학 그룹에 의해 우선 Schwarzschild 블랙홀 자기권에서 적용되도록 연구되었다(Lovelace et al. 1986; Mobarry & Lovelace 1986; Lovelace et al. 1987; Sulkanen & Lovelace 1990; Lovelace et al. 1991; Contopoulos & Lovelace 1994; Contopoulos 1994, 1995, 1996). 그리고 결국 일본과 러시아의 연구자에 의해 Kerr 블랙홀 자기권에서 완벽하게 적용되도록 만들어지기에 이른다(Nitta et al. 1991; Beskin & Pariev 1993; Beskin 1997). 이에 대한 자세한 내용은 논문 I에 정리되어 있다.

참고문헌

Beskin, V. S. 1997, Phys. Usp., 40, 659

Beskin, V. S., & Pariev, V. I. 1993, Phys. Usp., 36, 529 (BP)

Blandford, R. D., & Payne, D. G. 1982, MNRAS, 199, 883

Chandrasekhar, S. 1956, ApJ, 124, 232

Contopoulos, J. 1994, ApJ, 432, 508

Contopoulos, J. 1995, ApJ, 446, 67

Contopoulos, J. 1996, ApJ, 460, 185

Contopoulos, J. & Lovelace, R. V. E. 1994, ApJ, 429, 139

Goldreich, P., & Julian, W. H. 1969, ApJ, 157, 869 (GJ)

Heinemann, M., & Olbert, S. 1978, J. Geophys. Res., 83, 2457

Julian, W. H. 1973, ApJ, 183, 967

Lovelace, R. V. E., Berk, H. L., & Contopoulos, J. 1991, ApJ, 379, 696

Lovelace, R. V. E., Mehanian, C., Mobarry, C. M., & Sulkanen, M. E. 1986, ApJS, 62, 1

Lovelace, R. V. E., Wang, J. C. L., & Sulkanen, M. E. 1987, ApJ, 315, 504

Mestel, L. 1961, MNRAS, 122, 473

Mestel, L., & Shibata, S. 1994, MNRAS, 271, 621

Michel, F. C. 1973, ApJL, 180, 133

Mobarry, C. M., & Lovelace, R. V. E. 1986, ApJ, 309, 455

Nitta, S., Takahashi, M., & Tomimatsu, A. 1991, Phys. Rev. D, 10, 1680

Okamoto, I. 1974, MNRAS, 167, 457

Okamoto, I. 1975, MNRAS, 173, 357

Park, S. J. 2000, 천문학논총, 15, 1

Scharlemann, E. T., & Wagoner, R. V. 1973, ApJ, 182, 951

Sulkanen, M. E. & Lovelace, R. V. E. 1990, ApJ, 350, 732