

1931년 오스트리아의 수학자 Gödel은 “자연수체계를 포함하는 무모순인 공리체계는 절대 완전할 수 없다. 즉 참인지 거짓인지 판정할 수 없는 명제가 반드시 존재한다”고 했다.

“나는 지금 거짓말을 하고 있다”  
이 말이 참말이라면 나는 지금 거짓말을 하고 있는 것이고, 이 말이 거짓말이라면 이 말은 참말이 된다. 이거 참...

어떤 명제가 참인지 거짓인지를 보이기 위해서는 옳고 그름을 가릴 수 있는 기준이 필요한데, 그 기준 중에서 가장 기본적인 기준을 공리라고 하고, 그 공리들을 모아 놓은 것을 공리계라고 한다. 그러니까 수학적 이론의 가장 근본이 되는 것이 공리계이다. 이런 공리계에는 모순이 없어야 한다. 즉, 주어진 공리들로부터 올바르게 추론하였더니  $0 \neq 0$ 와 같은 결론을 얻는 일이 없어야 한다는 말이다. 1백년 전 Hilbert라는 수학자는 모순이 없는 완벽한 논리체계를 만들 수 있을 것이라고 생각하였고, “완벽한 논리체계로 이루어진 기계를 만들면, 아무리 어려운 수학적 명제라도 그 기

## 「참말」과 「거짓말」

계에 입력하면 옳고 그름이 판정될 것”이라고 생각하였다. 이런 꿈은 Hilbert만이 해 보았을 것은 아니겠다. 컴퓨터 언어학자들은 그 언어로 짜인 프로그램이 bug를 갖지 않기를 바라고, 법률가들은 아무리 어려운 송사라도 해결할 수 있는 좋은 법을 꿈꿀 것이다. 그러나 이 꿈은 1931년 오스트리아의 수학자 Kurt Gödel에 의하여 산산조각이 났다. 그는 다음과 같은 것을 증명하였다.

“자연수 체계를 포함하는 무모순인 공리체계는 절대 완전할 수 없다. 즉, 참인지 거짓인지 판정할 수 없는 명제가 반드시 존재한다.”

수학을 축구경기에 비유한다면 논리의 옳고 그름을 판별하는 기준이 되는 공리계를 축구경기의 규칙으로 생각할 수 있는데, 축구경기 도중에 도대체 이것이 반칙인지 아닌지를 알 수 없는 경우가 생기게 된다는 것이다. 그러면 이 경기가 끝난 다음, FIFA는 회의를 할 것이고 결국 이런 것은 반칙이다 아니다를 정하여 경기규칙을 고쳐야 할 것이다. 하지만 새로 고친 규칙으로도 반칙인지 아닌지를 알 수 없는 경우는 또 나올 것이며, 이 경우를 반칙이라고 규정하더라도 역시 반칙인지 아닌지를 알 수 없는 경우는 발생하게 된다는 것이다.

게다가 Gödel은 다음과 같은 사실도 증명하였다.

“산술공리가 모순이 없다면, 그 공리계를 이용하여 그 공리계에 모순이 없다는 것을 증명하는 것은 불가능하다.”

이 사실은, 예를 들면, 컴퓨터 프로그램에 대한 다음과 같은 2가지 사실을 알려 준다.

1. 임의의 프로그램과 입력 자료가 주어졌을 때 이들이 유한시간 내에 작업을 마치지 않는다는 것을 유한시간 안에 판정하여 주는 그러한 알고리즘은 없다.

2. 컴퓨터의 OS를 변화시키지 않는 프로그램이면서 ‘컴퓨터 바이러스처럼 OS를 변화시키는 모든 프로그램’을 발견할 수 있는 프로그램은 만들 수 없다.

Gödel의 말의 요점은 자기 자신이 올바른지 자기 자신이 볼 수는 없다는 것이 아닐까? 남에 대한 이야기를 하는 것은 쉬워도 자기 자신을 돌보는 것이 얼마나 어려운지를 수학자들은 알고 있다.

그래서 수학자들이 다른 분야의 과학자들에 비하여 상대적으로 자기네의 목소리를 높이지 않고 조용한 지도 모르겠다. ①7

高城 殷 (건국대 수학과 교수)