Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 27, No. 1, pp. 25-29, March 2001.

확장된 일반상한제약을 갖는 이차원 선형계획 배낭문제 연구

원 중 연†

경기대학교 첨단산업공학부

On a Two Dimensional Linear Programming Knapsack Problem with the Extended GUB Constraint

Joong-Yeon Won

Department of Industrial Engineering, Kyonggi University, Suwon

We present a two dimensional linear programming knapsack problem with the extended GUB constraint. The presented problem is an extension of the cardinality constrained linear programming knapsack problem. We identify some new properties of the problem and derive a solution algorithm based on the parametric analysis for the knapsack right-hand-side. The solution algorithm has a worst case time complexity of order O(n^2logn). A numerical example is given.

Keywords : Two Dimensional LP Knapsack Problem, Extended GUB Constraint, Computational Complexity

1. 서 론

본 연구에서는 다음과 같이 표현되는 이차원 선형계획 배낭문제를 제시하고 그 특성과 효율적인 해법에 대해 연구한다.

$$\text{(P)} \quad \text{Maximize} \ \textstyle\sum_{j \in N} q_j x_j \qquad (1)$$

$$\text{subject to} \ \textstyle\sum_{j \in N} a_j x_j \leq T \qquad (2)$$

$$\textstyle\sum_{j \in N} x_j = r, \qquad (3)$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \ \ \forall\, j \in N. \qquad (4)$$

여기서 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, $0<q_j$, $0<a_j \leq T$, $j \in N$, 그리고 $0<r$이다.

제약식 (3)은 선형계획이나 정수계획 등의 여러 문제에서 빈번히 발생하고 있는 제약 형태이며, r의 값에 따라 다양한 이름으로 불리우고 있다. $r=1$인 경우에는 다중선택제약(Pisinger, 1995), 일반상한제약(Glover and Klingman, 1979)으로, r이 정수값인 경우에는 일반 다중선택제약(Won, 1995), 확장된 정수우변의 일반상한제약(Won, 1997), 選數제약(cardinality constraint)(Campello and Maculan, 1987; Dudzinski, 1989)으로, r이 실수값을 갖고 부등식의 제약형태인 경우에 상자형 제약(Bagchi *et al.*,1996)으로 불리우고 있다. 본 연구에서는 제약식 (3)을 확장된 일반상한제약이라 부르고, 이때 r은 실수값을 갖는다.

문제 (P)와 동일한 제약구조 및 목적함수를 갖고 다만 r이 정수인 경우의 문제는 選數제약 선형계획 배낭문제 (C)라 불리우며, Campello and Maculan(1987)과 Dudzinski(1989)에 의해 연구되었다. Campello and Maculan(1987)은 문제 (C)의 기저가능해가 갖는 정수특성들을 파악하고 최악 상황하에서 계산복잡도 $O(n^3)$에 최적해를 찾는 방법을 제시하였다. Dudzinski (1989)는 문제 (C)를 n개의 선형계획 배낭문제로 변환하고 각 변환된 문제들로부터 얻어지는 최적 목적치들을 비교함으로써 해를 구하는 $O(n^2)$의 해법을 제시하였다. 문제 (C)의 기저가능해가 갖는 특성은 두 개의 변수가 동시에 분수값을 갖고, 그 합은 항상 1이 된다는 것이다. 이 특성은 제시된 해법들의 기반이 되고 있다.

그러나 문제 (P)에서는 r이 정수가 아닌 실수값을 취할 수 있다. 이 경우 분수값을 취하는 변수의 수는 한 개나 두 개가

---

† 연락저자 : 원중연 교수, 경기도 수원시 팔달구 이의동 산 94-6 경기대학교 산업공학과, Fax : 031-244-3534, e-mail : jywon@kuic.kyonggi.ac.kr
1999년 5월 접수, 2회 수정 후, 2000년 12월 게재 확정.

가능하다. 또한, 두 변수가 분수값을 취하는 경우에도 그 합은 1이 아닌 특정 값들로 나타나고 있다. 본 연구에서는 먼저 문제 (P)에 성립하는 확장된 기저특성을 파악하고, 다음으로 이에 기반하여 배낭제약식 (2)의 우변상수에 대한 모수분석 특성을 제시한 후, 최적해를 효율적으로 찾는 해법을 개발한다. 아울러 최악상황하에서 해법의 계산복잡도가 $O(n^2 \log n)$임을 분석하고, 마지막으로 해법을 적용한 수치예제를 보인다.

2. 해법 및 분석

문제 (P)에서 우변상수 T가 $\overline{T}$일 때의 기저가능해를 $\overline{x}=(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, 목적함수치를 $z(\overline{T})$, 분수값을 취하는 변수들의 지수집합을 F, 1의 값을 취하는 변수들의 지수집합을 J라 하자. 즉, $F\equiv\{j \mid 0<\overline{x_j}<1\}$, $J\equiv\{j \mid \overline{x_j}=1\}$이라 정의하고, 상수 f는 $f\equiv r-[r]$이라 하자. 여기서, $[r]$은 r을 넘지 않는 최대 정수값을 의미한다.

$f=0$인 경우, 즉 r이 정수값인 경우의 문제 (P)에 대한 기저가능해 특성은 다음의 보조정리와 같다.

보조정리. (Campello & Maculan) 문제 (P)에서 r이 정수일 때의 한 기저가능해를 $\overline{x}$라 하자. 집합 F를 $F=\{j \mid 0<\overline{x_j}<1\}$라 하면 $|F|=0$ 또는 2이며, $|F|=2$일 때 $\sum_{j\in F}\overline{x_j}=1$이 성립한다.

그러나 $f\neq 0$인 경우의 문제 (P)에는 다음과 같은 확장특성이 성립한다.

정리 1. 문제 (P)에서 r이 정수가 아닐 때의 한 기저가능해를 $\overline{x}$라 하자. 그러면 $|F|=1$ 또는 2이며, $|F|=1$인 경우 $\overline{x_j}=f,\ j\in F$이고, $|F|=2$인 경우 $\sum_{j\in F}\overline{x_j}=f$ 또는 $1+f$가 성립한다.

(증명) 문제 (P)의 기저변수는 제약식 (2) 및 (3)에 하나씩 존재하므로 $|F|\le 2$이다. 또한, 제약식 (3)에서 우변상수 r은 $r=[r]+f$이므로 적어도 한 개의 기저변수는 분수값을 갖고 따라서 $|F|\ge 1$이다. 이상으로부터 $|F|=1$ 또는 2이고, $\sum_{j\in F}\overline{x_j}<2$가 성립한다. 이 부등식으로부터 $\sum_{j\in F}\overline{x_j}+\sum_{j\in J}\overline{x_j}<2+\sum_{j\in J}\overline{x_j}$이다. 여기서, 좌변은 제약식 (3)에 의해 r과 같으므로 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{j\in J}\overline{x_j} > r-2 \tag{5}$$

또한, 집합 J의 정의로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\sum_{j\in J}\overline{x_j} \le [r] \tag{6}$$

식 (5), (6)으로부터 $r-2<\sum_{j\in J}\overline{x_j}\le[r]$이다. $\sum_{j\in J}\overline{x_j}$는 정수이므로 $\sum_{j\in J}\overline{x_j}$의 값은 $[r]-1$이거나 $[r]$이어야 한다.

(1) $\sum_{j\in J}\overline{x_j}=[r]-1$이면 제약식 (3)으로부터 $\sum_{j\in F}\overline{x_j}=1+f$가 성립한다. 이때 $0<f<1$이므로 $|F|=2$가 된다.

(2) $\sum_{j\in J}\overline{x_j}=[r]$이면 $\sum_{j\in F}\overline{x_j}=f$가 성립한다. 이 경우 $|F|=1$ 또는 2이며, 특히 $|F|=1$인 경우에는 $\overline{x_j}=f,\ j\in F$이다. 이상으로부터 정리가 성립한다. ■

먼저 문제 (P)의 각 변수들에 대해서 임의의 두 지수 $i,\ j$가 $i<j$이면 $a_i\le a_j$가 되도록 변수들을 재배열한다. 해 $\overline{x}$에서 두 기저변수의 지수를 $i,\ j\ (i<j)$라 하고 제약식 (2) 및 (3)에 해당하는 축소 기저행열 B를 정의하자. 그러면 우변상수 $\overline{T}$가 ΔT만큼 더 증가할 때 목적함수치의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z(\overline{T}+\Delta T) &= z(\overline{T})+\Delta T c_B B^{-1} e \\ &= z(\overline{T})+\Delta T(q_j-q_i)/(a_j-a_i) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $c_B=(q_i,q_j)$, $e=(1,0)^t$이다. $\theta(i,j)$를 $\theta(i,j)\equiv(q_j-q_i)/(a_j-a_i)$으로 정의하면, 목적함수치는 우변상수가 증가함에 따라 비율 $\theta(i,j)$에 비례하여 증가한다. 여기서 $a_i=a_j$인 경우는 $\theta(i,j)\equiv\infty$ (매우 큰 값)으로 정의한다.

제약식 (2)의 우변상수가 증가할 때 발생하는 기저가능해들은 다음 정리 2에 의해 손쉽게 찾을 수 있다. 우선, 정리 2에 적용할 초기 최적 기저가능해 x^0는 다음과 같이 설정한다.

$$x_j^0=1,\ j\in J^0,\ x_j^0=f,\ j\in F^0,\ x_j^0=0,\ j\in N\setminus J^0\setminus F^0$$

여기서, J^0는 계수 a_j가 가장 작은 $[r]$개의 변수들의 지수집합이며, F^0는 계수 a_j가 $[r]+1$번째로 작은 변수의 지수집합이다. 여기서 계수 a_j가 가장 작은 $[r]+1$개의 변수들을 선정했을 때 이 변수들 중 같은 a_j값을 갖는 변수가 여러 개 있으면, 이들 중에서 가장 큰 q_j값을 갖는 변수들에 우선적으로 1의 값을 설정한다.

초기해 x^0에 해당하는 우변상수를 $T^0=\sum_{j\in N}a_j x_j^0$이라 하자. 우변상수 T^0는 제약식 (3) 및 (4)가 성립하면서 제약식 (2)의 우변 T가 가장 작아지는 값이다. 따라서, $T<T^0$이면 제약식 (3) 및 (4)가 성립되면서 동시에 제약식 (2)를 만족시키는 가능해는 존재하지 않으므로 문제 (P)는 비가해 문제가 된다. 그러나 T가 증가하여 $T=T^0$가 되면 이때의 해 x^0는 가능해가 되면서 최대의 목적함수값을 가지므로 바로 최적해가 된다. $T>T^0$인 경우에는 초기 최적해 x^0에서 시작하여 우변상수가 T에 이를 때까지 다음 정리 2를 반복 적용해서 최적해를 구한다.

정리 2. 문제 (P)의 한 기저가능해 $\overline{x}$의 우변상수값을 $\overline{T}$라 하고 집합 F는 $F=\{p\}$이라 하자. 우변상수가 $\overline{T}$로부터 증

가함에 따라 발생되는 기저변수의 지수 i^*, j^*는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta(i^*, j^*) = \max[\max_{i\in J,\, i<p} \max_{p\in F} \{\theta(i,p)\},\ \max_{p\in F} \max_{j\in N\setminus J,\, j>p}\{\theta(p,j)\}]$$

(증명) 정리 1에 의하여 $x_p = f$이고, 이외의 변수들은 0이나 1의 값을 취하고 있다. 적절히 작은 우변상수의 증가에 대하여 변수 x_p는 계속 기저변수로 남아 있는다. 제약식 (3)에 의해 변수들의 합은 항상 r이므로 우변상수 값의 증가에 따라 다른 한 변수가 0이나 1로부터 분수값을 갖게 되며 기저에 도입된다. 이때 다음의 두 가지 경우가 가능하다.

(1) $i<p$인 한 변수 x_i가 기저에 도입된다고 하자. 즉, 우변상수가 증가하게 되면 집합 F는 $F=\{i, p\}$가 된다. 여기서 $0 < a_i < a_p$이므로 우변상수 증가분에 따른 변수값의 변동은 x_p가 현재의 값 f보다 커지고 대신 x_i의 값은 적어질 수 밖에 없다. 따라서 i는 현재 1의 값을 갖고 있는 변수들의 집합 J에서 선택되어야 하며, 이 경우에 두 변수 x_i, x_p값의 합은 $1+f$가 된다. J에 속한 여러 지수들 중 목적함수치를 최대로 증가시키는 지수 i^*는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta(i^*, p) = \max_{i\in J,\, i<p} \max_{p\in F}\{\theta(i,p)\} \tag{8}$$

(2) $j>p$인 한 변수 x_j가 기저에 도입된다고 하자. 우변상수가 증가하게 되면 집합 F는 $F=\{p, j\}$가 된다. 여기서 $a_j > a_p > 0$이므로 우변상수 증가분에 따른 변수값의 변동은 x_p가 현재의 값 f보다 작아지고 대신 x_j의 값이 커질 수밖에 없다. 따라서 j는 현재 0의 값을 갖고 있는 변수들의 지수집합 $N\setminus J$에서 선택되어야 하며 이 경우에 두 변수 x_p, x_j값의 합은 f가 된다. 집합 $N\setminus J$에 속한 여러 지수들 중 목적함수치를 최대로 증가시키는 지수 j^*는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta(p, j^*) = \max_{p\in F} \max_{j\in N\setminus J,\, j>p}\{\theta(p,j)\} \tag{9}$$

이상의 두 경우로부터 구해진 식 (8), (9) 중에서 더 큰 증가를 갖는 기저변화가 최적이므로 정리의 식이 성립한다. ■

정리 2에서 기저를 결정할 때 동일한 계수 a_j값을 갖는 변수가 여러 개 있어도, 정리의 최대비율 계산에 의해서 더 큰 목적함수의 계수 q_j를 갖는 변수가 기저에 도입된다. 또한 기저의 변화는 T가 증가할 때만 발생하므로 진입변수의 선택은 $a_i < a_p$이거나(증명의 (1) 참조), $a_j > a_p$가 되는(증명의 (2) 참조) x_i나 x_j들 중에서 이루어진다. 정리 2에서 결정된 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 구간은 $p=j^*$ 일 때는 $[\overline{T},\ \overline{T}+(1-f)(a_j-a_i)]$이다. 우변상수가 증가하여 $\overline{T}+(1-f)(a_j-a_i)$가 되면 해는 $x_{i^*}=f$, $x_p=1$가 되므로, $F=\{i^*\}$로 변경된다. $p=i^*$ 일 때의 우변상수 구간은 $[\overline{T},\ \overline{T}+f(a_j-a_i)]$이고 우변상수가 증가하여 $\overline{T}+f(a_j-a_i)$가 되면 해는 $x_p=0$, $x_{j^*}=f$가 되므로 $F=\{j^*\}$로 변경된다.

문제 (P)에서 우변 T가 증가하면서 얻어지는 최적 목적함수는 부분선형(piecewise linear)으로 증가하면서 위로 볼록한 함수(concave function)로 나타난다. 즉, 최적 목적함수를 구성하는 부분선형 선분의 기울기는 T가 증가함에 따라 작아진다. 이 기울기는 비율값 $\theta(i,j)$로 계산되어 비증가 순으로 비율목록에 저장된다. 따라서 T가 증가하면서 선택한 비율값이 다음에 얻어지는 새 최적비율보다 일단 커질 경우에는 최적여부를 판단하기 위해 다시 고려할 필요가 없다. 따라서 계산의 편의성을 위해 목록에서 제거할 수 있다.

본 연구에서는 정리 2의 기저결정을 효율적으로 처리하기 위하여 모든 지수 i, j에 대한 비율 $\theta(i,j)$들을 먼저 계산하고, 비증가 순으로 정리한 후, 큰 비율부터 차례로 선택하여 기저진입 가능여부를 판단한다. 여기서, 비율이 음수인 경우는 목적함수의 값이 오히려 감소하는 경우이므로 음수의 비율은 미리 제거한다. 다음 제시하는 해법에서 기저변화 및 수정은 지수집합 J및 F를 통하여 이루어진다. 그리고 이들 집합에 속한 지수들을 미리 비감소 순으로 배열, 유지함으로써 이 후의 단계에서 필요한 지수첨가 및 삭제작업을 효율적으로 처리하고 있다.

해법

1. 임의의 두 지수 i, j에 대해 $i<j$이면 $a_i \le a_j$가 되도록 변수들을 재배열한다. $L \leftarrow \phi$, $J \leftarrow \{1, \ldots, [r]\}$, $F \leftarrow \{[r]+1\}$, $f = r-[r]$, $\overline{T} \leftarrow \sum_{j\in J} a_j + \sum_{j\in F} a_j f$를 계산한다.

2. $\overline{T} = T$ 이면, 최적해는 다음과 같다. 과정을 끝낸다.

   $$x_j = 1,\ j\in J,\ x_j = f,\ j\in F,\ x_j = 0,\ j\in N\setminus J\setminus F$$

   $\overline{T} > T$ 이면, 문제 (P)는 비가해이다. 과정을 끝낸다.
   $\overline{T} < T$ 이면, 단계 3으로 간다.

3. 다음과 같이 모든 비율 $\theta(i,j)$를 계산하고 비율목록 L에 크기의 비증가 순으로 정리한다.

   $$\theta(i,j) = (q_j - q_i)/(a_j - a_i),\ i<j,\ i\in N,\ j\in N$$

4. 목록 L에서 첫번째 위치한 가장 큰 비율 $\theta(i,j)$를 선택한다. $L=\phi$이면, 문제 (P)는 비가해이다. 과정을 끝낸다.
   $i\in J$이고 $j\in F$이면, 단계 5로 간다.
   $i\in F$이고 $j\in N\setminus J$이면, 단계 6으로 간다.
   이 외의 경우에는 단계 7로 간다.

5. $\overline{T} \leftarrow \overline{T} + (1-f)(a_j - a_i)$를 계산한다.

$\overline{T} < T$이면, $J \leftarrow J \cup \{j\} \setminus \{i\}$, $F \leftarrow F \cup \{i\} \setminus \{j\}$라 하고 단계 7로 간다.

$\overline{T} \geq T$이면, $i^* \leftarrow i$, $j^* \leftarrow j$, $\overline{e} \leftarrow \overline{T} - T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

$$x_{i^*} = f + \overline{e}/(a_{j^*} - a_{i^*}),\ x_{j^*} = 1 - \overline{e}/(a_{j^*} - a_{i^*}),$$
$$x_k = 1,\ k \in J \setminus \{i^*\},\ x_k = 0,\ k \in N \setminus J \setminus F.$$

6. $\overline{T} \leftarrow \overline{T} + f(a_j - a_i)$를 계산한다.

$\overline{T} < T$이면, $F \leftarrow F \cup \{j\} \setminus \{i\}$라 하고 단계 7로 간다.

$\overline{T} \geq T$이면, $i^* \leftarrow i$, $j^* \leftarrow j$, $\overline{e} \leftarrow \overline{T} - T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

$$x_{i^*} = \overline{e}/(a_{j^*} - a_{i^*}),\ x_{j^*} = f - \overline{e}/(a_{j^*} - a_{i^*}),$$
$$x_k = 1,\ k \in J,\ x_k = 0,\ k \in N \setminus J.$$

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(i,j)\}$라 하고, 단계 4로 간다.

해법의 단계 5나 6에서 최적해 조건이 성립되었을 때 선택된 최적 비율값과 같은 크기를 갖는 비율이 여러 개 존재하면 다수 최적해가 발생한다. 이 경우 해당 비율들의 지수 i, j를 적용하여 모든 최적해를 파악할 수 있다.

정리 3. 문제 (P)의 최적해를 구하는 해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 변수들을 계수크기의 비감소 순으로 재배열하는 데 $O(n\log n)$이 소요된다. 지수집합 J 및 F를 구하는 데 이진탐색법을 사용하면 $O(\log n)$의 계산이 소요된다 (Kronsjö, 1979). 따라서 단계 1에서는 최대 $O(n\log n)$의 계산이 소요된다. 단계 2는 상수회에 계산된다. 단계 3에서는 모든 비율들을 계산하는 데 $O(n^2)$이 소요되고 목록 L에 비증가 순으로 배열하는 데 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 4, 5, 6, 7은 해법의 주 회전단계이다. 주 회전단계에서 검토되는 비율들의 수는 총 $O(n^2)$ 개이므로 주 회전단계의 최대 회전수는 $O(n^2)$이다. 한 회전 안에서 단계 4 및 7은 상수회에 판단되며, 단계 5 및 6에서 집합 J 및 F에 지수를 첨가하고 삭제하는 데 이진탐색법을 적용하면 각각 $O(\log[r]) \leq O(\log n)$의 계산이 소요된다(Kronsjö, 1979). 따라서 주 회전단계인 4, 5, 6, 7의 최대 회전에 따른 계산양은 $O(n^2 \log n)$이 된다. 이상의 단계 3 및 주 회전단계 4, 5, 6, 7로부터 해법에 소요되는 최대계산은 $O(n^2 \log n)$이다. ■

3. 수치예제

다음의 문제에 해법을 적용하여 최적해를 구한다.

$$\text{maximize} \quad \sum_{j \in N} q_j x_j$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{j \in N} a_j x_j \leq 9.5,$$
$$\sum_{j \in N} x_j = 1.6,$$
$$0 \leq x_j \leq 1,\ \forall j \in N = \{1, \ldots, 6\}.$$

여기서, 계수 q_j 및 a_j의 값은 다음의 표와 같다.

q_j, a_j \ j	1	2	3	4	5	6
q_j	2	8	7	10	5	11
a_j	2	3	5	5	6	7

〈1회〉

1. $L \leftarrow \phi$, $J=\{1\}$, $F=\{2\}$, $f=0.6$, $\overline{T}=2+0.6(3)=3.8$
2. $\overline{T} < T(=9.5)$이므로 단계 3으로 간다.
3. $L = \{\theta(3,4)=\infty$, $\theta(1,2)=\theta(5,6)=6$, $\theta(1,4)=2.667$, $\theta(3,6)=2$, $\theta(1,6)=1.8$, $\theta(1,3)=1.667$, $\theta(2,4)=1$, $\theta(1,5)=\theta(2,6)=0.75$, $\theta(4,6)=0.5\}$
4. $\theta(3,4)$를 선택한다. $3 \notin J$이고 $3 \notin F$이므로 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(3,4)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈2회〉

4. $\theta(1,2)$를 선택한다. $1 \in J$이고 $2 \in F$이므로 단계 5로 간다.
5. $\overline{T} = 3.8 + (1-0.6)(3-2) = 4.2$

$\overline{T} < T$이므로 $J=\{2\}$, $F=\{1\}$이라 하고 단계 7로 간다.

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,2)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈3회〉

4. $\theta(5,6)$를 선택한다. $5 \notin J$, $5 \notin F$이므로 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(5,6)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈4회〉

4. $\theta(1,4)$를 선택한다. $1 \in F$, $4 \in N \setminus J$이므로 단계 6으로 간다.
6. $\overline{T} = 4.2 + (0.6)(5-2) = 6.0$

$\overline{T} < T$이므로 $J=\{2\}$, $F=\{4\}$이라 하고 단계 7로 간다.

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,4)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈5회〉

4. $\theta(3,6)$를 선택한다. $3 \notin J$, $3 \notin F$이므로 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(3,6)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈6회〉

4. $\theta(1,6)$를 선택한다. $1 \notin J$, $1 \notin F$이므로 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,6)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈7회〉

4. $\theta(1,3)$를 선택한다. $1 \notin J$, $1 \notin F$이므로 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,3)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

〈8회〉

4. $\theta(2,4)$를 선택한다. $2 \in J$이고 $4 \in F$이므로 단계 5로 간다.
5. $\overline{T} = 6.0 + (1-0.6)(5-3) = 6.8$

$\overline{T} < T$ 이므로 $J=\{4\}$, $F=\{2\}$이라 하고 단계 7로 간다.

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(2,4)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

⟨9회⟩

4. $\theta(1,5)$를 선택한다. $1 \notin J$, $1 \notin F$ 이므로 단계 7로 간다.

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,5)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

⟨10회⟩

4. $\theta(2,6)$를 선택한다. $2 \in F$, $6 \in N \setminus J$ 이므로 단계 6으로 간다.

6. $\overline{T} = 6.8 + (0.6)(7-3) = 9.2$

$\overline{T} < T$ 이므로 $J=\{4\}$, $F=\{6\}$이라 하고 단계 7로 간다.

7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(2,6)\}$이라 하고 단계 4로 간다.

⟨11회⟩

4. $\theta(4,6)$를 선택한다. $4 \in J$이고 $6 \in F$ 이므로 단계 5로 간다.

6. $\overline{T} = 9.2 + (1-0.6)(7-5) = 10.0$

$\overline{T} > T(=9.5)$ 이므로 최적해는 다음과 같다($i^*=4$, $j^*=6$, $\overline{e} = 10. - 9.5 = 0.5$)

$$x_4 = 0.6 + 0.5/(7-5) = 0.85,$$
$$x_6 = 1 - 0.5/(7-5) = 0.75,$$
$$x_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 5.$$

4. 결론 및 토의

본 연구에서는 확장된 일반상한제약을 포함하여 두 제약식을 갖고 목적함수 및 제약식의 계수가 양의 값을 취하는 이차원 선형계획 배낭문제를 연구하였다. 이 문제는 일반상한 제약식의 우변상수가 임의의 실수값을 취할 수 있다는 점에서 選數制約 선형계획 배낭문제(Campello and Maculan, 1987; Dudzinski, 1989)의 확장문제라 할 수 있다.

선수제약이나 정수우변의 일반상한제약(Campello and Maculan, 1987)은 확장된 일반상한제약과 동일한 제약구조의 형태를 갖으나 우변상수가 정수값 만을 취할 수 있다. 이들 문제의 해법에 기반이 되는 기저가능해의 특성은 분수값을 취하는 두 기저변수의 합이 항상 1이 된다는 것이다. 그러나 본 문제에서는 분수값을 갖는 두 기저변수의 합은 1이 아닌 다른 특정한 값들이 된다는 것을 보였다. 본 연구에서는 이러한 확장된 기저특성을 새로이 찾아내고 이를 이용하여 최적해를 효율적으로 찾는 해법을 개발하였다. 개발된 해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$으로 분석되었다.

본 연구에서는 편의상 확장된 일반상한제약의 우변상수가 정수가 아닌 경우로 한정하여 문제 (P)의 기저가능해 특성 및 효율적인 해법을 연구하였다. 그러나, 문제 (P)에서의 확장된 일반상한제약에는 정수도 포함된다. 이러한 경우에는 2절에 제시한 보조정리와 연계하여 정리 2의 기저결정 기준을 두 경우로 분류함으로써 문제 (P)의 최적해를 동일한 계산복잡도안에 찾을 수 있다.

참고문헌

Bagchi, A., Bhattacharyya, N. and Chakravarti, N. (1996), LP Relaxation of the Two Dimensional Knapsack Problem with Box and GUB Constraints, *European J. Opnl. Res.* **89**, 609-617.

Campello, R. E. and Maculan, N. F. (1987), Lagrangean Relaxation for a Lower Bound to a Set Partitioning Problem with Side Constraints: Properties and Algorithms, *Discrete Appl. Math.* **18**, 119-136.

Dudzinski, K. (1989), On a Cardinality Constrained Linear Programming Knapsack Problem, *Opns. Res. Letters* **8**, 215-218.

Glover, F. and Klingman, D. (1979), An O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints, *Math. Progr.* **29**, 345-361.

Kronsjö, L. I. (1979), *Algorithms: Their Complexity and Efficiency*, Wiley, N.Y.

Pisinger, D. (1995), A Minimal Algorithm for the Multiple-choice Knapsack Problem, *European J. Opnl. Res.* **83**, 394-410.

Won, J. Y. (1995), A Fast Algorithm for the Generalized Multiple Choice Linear Knapsack Problem, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers* **21**(4), 519-527.

Won, J. Y. (1997), An $O(n^2 logn)$ Algorithm for the Linear Knapsack Problem with SUB and GUB Constraints, *Journal of the Korean OR/MS Society* **22**(3), 1-9.