

# Main Queue에 Threshold가 있는 M/G/1 Bernoulli Feedback 시스템 분석

임시영 · 허선<sup>†</sup>

한양대학교 산업공학과

## An Analysis on the M/G/1 Bernoulli Feedback System with Threshold in Main Queue

Si Yeong Lim · Sun Hur

Department of Industrial Engineering, Hanyang University, Ansan

We consider the M/G/1 with Bernoulli feedback, where the served customers wait in the feedback queue for rework with probability  $p$ . It is important to decide the moment of dispatching in feedback systems because of the dispatching cost for rework. Up to date, researches have analyzed for the instantaneous-dispatching model or the case that dispatching epoch is determined by the state of feedback queue. In this paper we deal with a dispatching model whose dispatching epoch depends on main queue. We adopt supplementary variable method for our model and a numerical example is given for clarity.

**Keywords** : Queueing, feedback, supplementary variable method, performance measure

### 1. 서론

일반적인 생산공정에는 재작업을 요구하는 경우가 많이 발생한다. 하나의 공정을 거쳐 나온 가공품들은 검사를 거쳐 재가공을 하기도 하는데, 이때 재가공을 위해 다시 서버로 돌아가는 제품들은 서버에게 새로운 로드를 제공하게 된다. 일반적으로 재가공을 하는 제품들은 새로운 제품보다 많은 서비스 시간을 요구하지만 새로운 제품보다 가치가 떨어지는 경우가 있다. 즉, 재가공이 필요한 제품들을 재가공하는 데 사용되는 시간 때문에 실제로 새롭게 도착해서 서비스받는 제품의 대기 시간이 늘어남으로써 새로운 제품을 생산하지 못하는 손해가 발생하게 된다.

본 논문에서는 이와 같은 경우에 대하여 다음과 같은 main queue에 threshold가 있는 M/G/1 feedback 모델을 제시하고 분석하고자 한다.

M/G/1 Bernoulli feedback 모형은 시스템에 도착하는 고객의

도착 간격이 지수분포를 따르며 서비스 시간이 일반 분포를 따르고, 서비스를 받은 고객이  $1-p$ 의 확률로 시스템을 떠나거나  $p$ 의 확률로 다시 서비스를 받기 위해 (재작업) 시스템으로 되돌아가는 (이를 dispatching 이라고 부른다) 모형이다. M/G/1 feedback 모형에서는 일반적으로 feedback된 고객은 바로 대기 공간에 합류하여 대기하는 형태를 취하는데 이 경우에는 dispatching이 자주 발생하게 되고 이로 인해 새로 도착하는 고객이 더 오래 기다리게 되는 문제가 발생한다. 따라서 dispatching 시점에 대해서 적절한 제어 정책(control policy)을 도입으로써 시스템의 경제성을 높이는 방법에 대한 연구가 필요하다.

M/G/1 feedback 모형은 최초로 Takacs(1962)에 의해 소개되었다. Disney, et al.(1980)은 embedded Markov chain과 Markov renewal process를 이용하여 Bernoulli feedback 시스템에서 내재된 고객수 과정을 연구하였다. Wortman, et al.(1991)은 feedback과 휴가 정책이 Bernoulli인 feedback을 갖는 휴가 시스템에서 이탈시점에서의 고객수 GF(Generating Function)를 구하였

<sup>†</sup> Corresponding author : Professor Sun Hur, Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University, 1271 Sa 1 dong, Ansan, Kyunggi-do, 425-791 Korea, Fax : +82-31-409-2423, e-mail : hursun@email.hanyang.ac.kr

다. Adve and Nelson(1994)은 서비스 시간의 변동 계수에 대하여 Bernoulli feedback과 고정된 feedback 정책을 비교하였다.

이상의 연구는 feedback되는 고객이 즉각적으로 대기 공간으로 가서 대기하는 모형들이었다. 이후 dispatching에 대한 제어정책의 연구로써 Lee and Seo(1997)는 feedback queue를 두고 feedback queue의 상황에 따라 dispatching되는 모형을 제시하고 부가 변수법을 사용하여 각각의 고객수 분포와 평균 고객수, 평균 대기 시간 등을 구하였다. 즉, feedback queue의 고객이 threshold 이상이 되면 그 고객들이 main queue로 dispatching되는 모델을 분석하였다. 그러나 Lee and Seo(1997)의 연구에서는 feedback queue의 상황에 따라 dispatching이 이루어져 서버에 대한 feedback된 고객의 부담이 커지게 된다. 즉, 새롭게 도착하는 고객들의 대기 시간이 feedback된 고객들에 의해 증가하게 되는 결과를 가져올 수 있다.

본 연구에서는 Lee and Seo(1997)의 제어 정책이 feedback queue에 의존함으로써 생기는 feedback 고객에 대한 서버의 부담을 줄이기 위해 main queue의 상황에 따라 dispatching이 이루어지는 모형을 제시한다. 이는 곧 새로운 고객이 어느 시점까지만 feedback되는 고객에 의해 대기하는 시간을 허용하는 셈이 된다. 본 모형을 분석하기 위해 지금까지와는 다른 부가 변수법의 적용을 필요로 한다. 일반적으로 부가변수법의 계산에 있어서 시스템 상태가 무한한 경우(Hokstad, 1975)와 유한한 경우(Baba, 1984)에 따라 다른 방법을 사용한다. 하지만 본 연구에서는 두 가지 경우가 모두 필요하므로 두 가지 경우를 함께 고려하는 새로운 적용법을 소개한다.

## 2. 모델 설명

### 2.1 시스템 설명

포아송 과정에 따라 도착한 고객은 main queue에 대기하고 있다가 서버가 비어있으면 일반 분포를 따르는 시간 동안의 서비스를 받고,  $1-p$ 의 확률로 시스템을 떠나거나  $p$ 의 확률로 feedback되어 feedback queue에서 대기하고 있다가 main queue의 대기 고객이  $T$ (threshold) 미만이면 하나씩 dispatching 된다. dispatching 시간은 무시할 수 있으며 feedback queue와 main queue의 용량은 무한하다고 가정한다. 본 연구에서 제시하는 모형을 다음 <그림 1>과 같이 나타내었다.

위의 가정을 통하여 시스템의 상태 다이어그램을 그리면 다음 <그림 2>와 같다.

본 모델에서 주시해야 할 점은 feedback된 고객이 dispatching 되기 위해서는 main queue의 고객이  $T$  미만이어야 하고, dispatching은 한 명씩 되기 때문에 main queue에 고객수가  $T-1$  이하인 경우에는 feedback queue에 고객이 있는 상태는 있을 수가 없다는 것이다. 따라서 본 시스템의 상태들을 <그림 2>

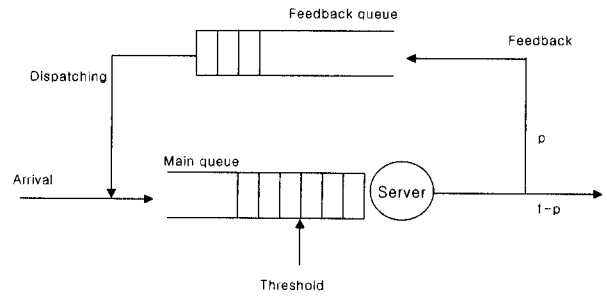


그림 1. 시스템 모형.

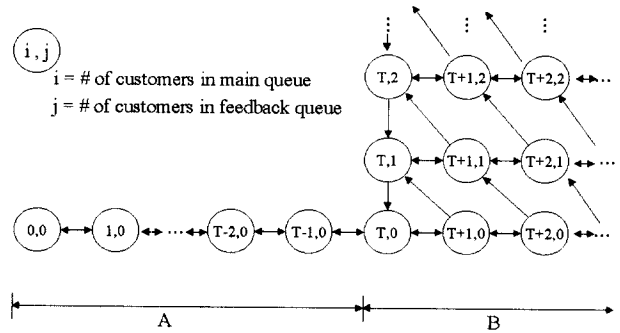


그림 2. 상태 다이어그램.

에서와 같이 나타낼 수 있으며 상태를 A, B 두 부분으로 나누어서 분석한다. 부가 변수법을 적용함에 있어 "A" 부분은 시스템 상태가 유한한 경우에 대한 방법을, "B" 부분은 시스템 상태가 무한한 경우에 대한 방법을 적용하여 두 가지 방법에 의한 결과로부터 본 시스템에 대한 성능치를 분석한다. 부가변수법의 적용에 대한 기본적인 설명은 관련서적(예를 들면 H. W. Lee, 1998)을 참고하기 바란다.

### 2.2 기호 설명

본 연구에서 사용하게 되는 기호를 정의하면 다음과 같다.

- $p$ : 고객의 feedback 확률
- $\lambda$ : 고객의 도착률
- $N_1(t)$ :  $t$ 시점에 main queue의 고객수
- $N_2(t)$ :  $t$ 시점에 feedback queue의 고객수
- $T$ : dispatching threshold (feedback queue로부터 dispatching을 하게 되는 main queue의 길이)
- $S, s(x), S(x)$ : 서비스 시간의 확률변수, 확률밀도함수 및 분포함수
- $S_R(t)$ :  $t$ 시점에서 잔여서비스 시간의 확률변수
- $Q_0(t) = \Pr[N_1(t) = 0, N_2(t) = 0]$
- $Q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_0(t)$
- $Q_i(x, t) dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = 0, S_R(t) \in (x, x + dx)], 1 \leq i \leq T-1$

$$Q_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(x, t)$$

$$P_{i,j}(x, t) dx = \Pr[N_1(t) = i, N_2(t) = j, S_R(t) \in (x, x + dx)], \\ T \leq i, 0 \leq j$$

$$P_{i,j}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,j}(x, t)$$

### 3. 고객수 분포 유도

#### 3.1 상태 방정식의 유도

2절에서 소개된 기호들과 가정들을 이용하면 다음과 같은 상태방정식을 유도하게 된다.

$$0 = -\lambda Q_0 + (1-p)Q_1(0) \quad (1)$$

$$-\frac{d}{dx} Q_1(x) = -\lambda Q_1(x) + \lambda Q_0 s(x) + pQ_1(0) s(x) \\ + (1-p)Q_2(0) s(x) \quad (2)$$

$$-\frac{d}{dx} Q_i(x) = -\lambda Q_i(x) + \lambda Q_{i-1}(x) + pQ_i(0) s(x) \\ + (1-p)Q_{i+1}(0) s(x), \quad 2 \leq i \leq T-2 \quad (3)$$

$$-\frac{d}{dx} Q_{T-1}(x) = -\lambda Q_{T-1}(x) + \lambda Q_{T-2}(x) + pQ_{T-1}(0) s(x) \\ + (1-p)P_{T,0}(0) s(x) \quad (4)$$

$$-\frac{d}{dx} P_{T,0}(x) = -\lambda P_{T,0}(x) + \lambda Q_{T-1}(x) + pP_{T,0}(0) s(x) \\ + (1-p)P_{T+1,0}(0) s(x) + (1-p)P_{T,1}(0) s(x) \quad (5)$$

$$-\frac{d}{dx} P_{T,j}(x) = -\lambda P_{T,j}(x) + pP_{T,j}(0) s(x) \\ + (1-p)P_{T+1,j}(0) s(x) + (1-p)P_{T,j+1}(0) s(x) \\ + pP_{T+1,j-1}(0) s(x), \quad 1 \leq j \quad (6)$$

$$-\frac{d}{dx} P_{i,0}(x) = -\lambda P_{i,0}(x) + \lambda P_{i-1,0}(x) \\ + (1-p)P_{i+1,0}(0) s(x), \quad T+1 \leq i \quad (7)$$

$$-\frac{d}{dx} P_{i,j}(x) = -\lambda P_{i,j}(x) + \lambda P_{i-1,j}(x) + (1-p)P_{i+1,j}(0) s(x) \\ + pP_{i+1,j-1}(0) s(x), \quad T+1 \leq i, 1 \leq j \quad (8)$$

위의 식 (2)~(8)에 Laplace transform을 취하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$(\lambda - \theta) Q_1^*(\theta) = \lambda Q_0 S^*(\theta) + pQ_1(0) S^*(\theta) \\ + (1-p)Q_2(0) S^*(\theta) - Q_1(0) \quad (9)$$

$$(\lambda - \theta) Q_i^*(\theta) = \lambda Q_{i-1}^*(\theta) + pQ_i(0) S^*(\theta) \\ + (1-p)Q_{i+1}(0) S^*(\theta) - Q_i(0), \quad 2 \leq i \leq T-2 \quad (10)$$

$$(\lambda - \theta) Q_{T-1}^*(\theta) = \lambda Q_{T-2}^*(\theta) + pQ_{T-1}(0) S^*(\theta) \\ + (1-p)P_{T,0}(0) S^*(\theta) - Q_{T-1}(0) \quad (11)$$

$$(\lambda - \theta) P_{T,0}^*(\theta) = \lambda Q_{T-1}^*(\theta) + pP_{T,0}(0) S^*(\theta) + (1-p) \\ P_{T+1,0}(0) S^*(\theta) + (1-p)P_{T,1}(0) S^*(\theta) - P_{T,0}(0) \quad (12)$$

$$(\lambda - \theta) P_{T,j}^*(\theta) = P_{T,j}(0) S^*(\theta) + (1-p)P_{T+1,j}(0) S^*(\theta) \\ + (1-p)P_{T,j+1}(0) S^*(\theta) + pP_{T+1,j-1}(0) S^*(\theta) \\ - P_{T,j}(0), \quad 1 \leq j \quad (13)$$

$$(\lambda - \theta) P_{i,0}^*(\theta) = \lambda P_{i-1,0}^*(\theta) + (1-p)P_{i+1,0}(0) S^*(\theta) \\ - P_{i,0}(0), \quad T+1 \leq i \quad (14)$$

$$(\lambda - \theta) P_{i,j}^*(\theta) = \lambda P_{i-1,j}^*(\theta) + (1-p)P_{i+1,j}(0) S^*(\theta) \\ + pP_{i+1,j-1}(0) S^*(\theta) - P_{i,j}(0), \quad T+1 \leq i, 1 \leq j \quad (15)$$

위 식에서 위첨자 \*는 Laplace transform을 나타내고,  $\theta$ 는 Laplace transform의 변수를 의미한다.

위의 식들을 분석하기 위해서는 <그림 2>에서와 같이 두 부분으로 나누어서 계산을 해야된다. 위 식에서 식 (1)과 식 (9)~(11)까지는 A 부분의 상태방정식을 나타내고, 식 (12)~(15)까지는 B 부분의 상태 방정식을 표현하고 있다.

#### 3.2 A 부분의 계산 (finite 한 부분의 계산)

위 식 (9)에  $\theta=0$ 과  $\theta=\lambda$ 를 대입하여 정리하면 각각 다음의 식을 얻는다.

$$Q_1^*(0) = \frac{1 - S^*(\lambda)}{(1-p)S^*(\lambda)} Q_0 \quad (16)$$

$$Q_2^*(0) = \frac{\lambda(1 - S^*(\lambda))}{(1-p)^2 S^*(\lambda)} Q_0 \quad (17)$$

식 (10)에  $\theta=0$ 과  $\theta=\lambda$ 를 대입하여 정리하면 각각 다음과 같은 식을 얻는다.

$$Q_i^*(0) = Q_{i-1}^*(0) + (1-p) \frac{Q_{i+1}(0) - Q_i(0)}{\lambda}, \quad 2 \leq i \leq T-2 \quad (18)$$

$$Q_{i+1}(0) = \frac{(1-p)S^*(\lambda)Q_i(0) - \lambda Q_{i-1}^*(\lambda)}{(1-p)S^*(\lambda)}, \quad 2 \leq i \leq T-2 \quad (19)$$

마찬가지의 방법으로 식 (11)을 이용하면  $Q_{T-1}^*(0)$ ,  $P_{T,0}(0)$ 을 구하는 식을 만들 수 있다. 식 (16), 식 (18)에서  $Q_i^*(0) = \int_0^\infty Q_i(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(N_1(t) = i, N_2(t) = 0)$ 는 안정 상태에서 main queue에  $i$ 명 ( $1 \leq i \leq T-1$ )이 있을 확률을 나타낸다. 이를 구하기 위해서는 식 (19)가 필요하고 식 (19)의  $Q_{i+1}(0)$ 을 얻기 위해서는  $Q_{i-1}^*(\lambda)$ 를 구해야 된다.

이제  $Q_{i-1}^*(\lambda)$ 를 구하기 위해 다음을 정의하자.

$$S^{*(n)}(\lambda) = \left[ \frac{d^n}{d\theta^n} S^*(\theta) \right]_{\theta=\lambda}$$

$$Q_i^{*(n)}(\lambda) = \left[ \frac{d^n}{d\theta^n} Q_i^*(\theta) \right]_{\theta=\lambda}$$

식 (9)를  $\theta$ 에 관해  $n+1$ 차 미분하고  $\theta=\lambda$ 를 대입한 후

식 (16), 식 (17)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$Q_1^{*(n)}(\lambda) = -\frac{1}{n+1} \frac{\lambda}{1-p} \frac{S^{*(n+1)}(\lambda)}{S^*(\lambda)} Q_0 \quad (20)$$

마찬가지로 식 (10)을  $\theta$ 에 관해  $n+1$ 차 미분하고,  $\theta = \lambda$ 를 대입한 후 정리하면 다음 식 (21)과 같다.

$$Q_i^{*(n)}(\lambda) = -\frac{1}{n+1} [\lambda Q_{i-1}^{*(n+1)}(\lambda) + p Q_i(0) S^{*(n+1)}(\lambda) + (1-p) Q_{i+1}(0) S^{*(n+1)}(\lambda)], \quad 2 \leq i \leq T-2 \quad (21)$$

위 식들을 축차적으로 계산하면  $Q_i^*(0)$ 을  $Q_0$ 로 표현할 수 있다.

### 3.3 B 부분의 계산(infinite 한 부분)

다음의 generating function  $\bar{P}^*(\theta, z, w)$ ,  $\bar{P}(0, z, w)$ ,  $\bar{P}(0, T, w)$ 를 정의하자.

$$\bar{P}^*(\theta, z, w) = \sum_{i=T}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}^*(\theta) z^i w^j$$

$$\bar{P}(0, z, w) = \sum_{i=T}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(0) z^i w^j$$

$$\bar{P}(0, T, w) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{T,j}(0) w^j$$

위의 식 (12)~(15)에  $z^i$ ,  $w^j$ 를 곱한 후  $i, j$ 에 관해 양변에 합을 취하여 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda z - \theta) \bar{P}^*(\theta, z, w) &= \bar{P}(0, z, w) \left[ \frac{S^*(\theta)}{z} (1-p+pw) - 1 \right] \\ &+ \bar{P}(0, T, w) \frac{z-w}{zw} S^*(\theta) (1-p+pw) z^T \\ &+ \lambda z^T Q_{T-1}^*(\theta) - \frac{1-p}{w} S^*(\theta) z^T P_{T,0}(0) \end{aligned} \quad (22)$$

위 식 (22)에  $\theta = \lambda - \lambda z$ 를 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{P}(0, z, w) \left[ \frac{S^*(\lambda - \lambda z)}{z} (1-p+pw) - 1 \right] \\ &+ \bar{P}(0, T, w) \frac{z-w}{zw} S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw) z^T \\ &+ \lambda z^T Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z) - \frac{1-p}{w} S^*(\lambda - \lambda z) z^T P_{T,0}(0) \end{aligned} \quad (23)$$

위 식 (23)에  $\frac{S^*(\lambda - \lambda z)}{z} (1-p+pw) - 1 = 0$ 을 만족하는  $z = \phi(w)$ 을 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{P}(0, T, w) \frac{\phi(w) - w}{\phi(w)w} S^*(\lambda - \lambda \phi(w)) (1-p+pw) \phi(w)^T \\ &+ \lambda \phi(w)^T Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda \phi(w)) \\ &- \frac{1-p}{w} S^*(\lambda - \lambda \phi(w)) \phi(w)^T P_{T,0}(0) \end{aligned} \quad (24)$$

이를  $\bar{P}(0, T, w)$ 에 대하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{P}(0, T, w) &= \frac{(1-p)}{(\phi(w) - w)} S^*(\lambda - \lambda \phi(w)) P_{T,0}(0) \\ &- \frac{\lambda w Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda \phi(w))}{(\phi(w) - w)} \end{aligned} \quad (25)$$

위 식 (25)를 식 (23)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{P}(0, z, w) &= \frac{(1-p) z^T S^*(\lambda - \lambda z) (z - \phi(w))}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} P_{T,0}(0) \\ &- \frac{\lambda z^T S^*(\lambda - \lambda z) (z - w) (1-p+pw) Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda \phi(w))}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \\ &+ \frac{\lambda z^{T+1} Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z)}{\{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \end{aligned} \quad (26)$$

위 식 (25), (26)을 식 (22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{P}^*(\theta, z, w) &= \frac{1}{-\theta + \lambda - \lambda z} \\ &\left[ \frac{(1-p) z^T (z - \phi(w)) \{S^*(\theta) - S^*(\lambda - \lambda z)\}}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} P_{T,0}(0) \right. \\ &- \frac{\lambda z^T (z - w) (1-p+pw) Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda \phi(w)) \{S^*(\theta) - S^*(\lambda - \lambda z)\}}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \\ &+ \frac{\lambda z^{T+1} \{Q_{T-1}^*(\theta) - Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z)\}}{\{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \\ &\left. + \frac{\lambda z^T (1-p+pw) \{S^*(\theta) Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z) - S^*(\lambda - \lambda z) Q_{T-1}^*(\theta)\}}{\{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

그런데  $(1-p) P_{T,0}(0)$ 은  $(T, 0)$ 상태에서 서비스를 마친 고객에 feedback되지 않고 시스템을 떠나는 rate를 나타내고,  $\lambda Q_{T-1}^*(0)$ 은 임의 시점에서  $(T-1, 0)$  상태일 때 고객이 도착하는 rate를 나타낸다. 상태  $(T-1, 0)$ 과 상태  $(T, 0)$  간에 <그림 3>과 같이 국부평형이 이루어져야 하므로 다음 식 (28)이 성립한다.

$$(1-p) P_{T,0}(0) = \lambda Q_{T-1}^*(0) \quad (28)$$

위 식 (27)에  $\theta = 0$ 을 대입하고 식 (28)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{P}^*(0, z, w) &= \frac{z^T}{\lambda - \lambda z} \left[ \frac{\lambda Q_{T-1}^*(0) (z - \phi(w)) (1 - S^*(\lambda - \lambda z))}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \right. \\ &- \frac{\lambda (z - w) (1-p+pw) Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda \phi(w)) (1 - S^*(\lambda - \lambda z))}{(\phi(w) - w) \{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \\ &+ \frac{\lambda (1-p+pw) \{Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z) - S^*(\lambda - \lambda z) Q_{T-1}^*(0)\}}{\{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \\ &\left. + \frac{\lambda z \{Q_{T-1}^*(0) - Q_{T-1}^*(\lambda - \lambda z)\}}{\{z - S^*(\lambda - \lambda z) (1-p+pw)\}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

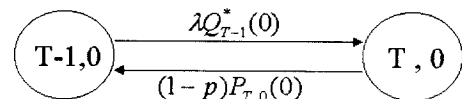


그림 3. 국부 평형.

위 식 (29)는 임의시점에서 main queue와 feedback queue에 대한 고객수의 결합 확률의 GF를 의미한다.

main queue의 고객수 분포를 알기 위해서는 위 식 (29)에  $w=1$ 을 대입하면 된다.  $\psi(w)$ 는  $\frac{S^*(\lambda-\lambda z)}{z} (1-p+pw) - 1=0$ 을 만족하는  $z$ 값을 의미하고  $|z| \leq 1$ 이어야 하므로  $\psi(1)$ 의 값은 1이 됨을 알 수 있다.  $\frac{S^*(\lambda-\lambda\psi(w))}{\psi(w)} (1-p+pw) - 1=0$ 을  $w$ 에 관해 미분하여  $w=1$ 를 대입하면  $\psi^{(1)}(1) = \frac{p}{1+\lambda S^{*(1)}(0)}$ 임을 알 수 있다. 이를 이용하여 main queue의 고객수의 GF를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \overline{P^*}(0, z, 1) = & z^T [(p-1-\lambda S^{*(1)}(0))(Q_{T-1}^*(0) - Q_{T-1}^*(\lambda-\lambda z)) \\ & - p(1-S^*(\lambda-\lambda z))(1+\lambda S^{*(1)}(0))Q_{T-1}^*(0) - \lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0)] \\ & / (p-1-\lambda S^{*(1)}(0))(S^*(\lambda-\lambda z) - z) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서  $Q_{T-1}^*(0)$ 은 식 (11)로부터 식 (18)과 같이 유도하여 식 (16), 식 (18)을 축차적으로 계산하면  $Q_0$ 의 식으로 표시된다. 또한  $Q_{T-1}^{*(1)}(0)$ 은 식 (20), 식 (21)과 같은 형태로 식 (11)을  $\theta$ 에 관해 2차 미분하고  $\theta=0$ 을 대입한 후 정리하면 마찬가지로  $Q_0$ 로 표현이 가능하다. 마지막으로  $Q_{T-1}^*(\lambda-\lambda z)$ 도 식 (9)~(11)에  $\theta = \lambda - \lambda z$ 를 대입한 후 축차적으로 정리하면  $Q_0$ 로 표현할 수 있다. 즉,  $\overline{P^*}(0, z, 1)$ 은  $Q_0$ 로 표현이 가능하다.

B 부분의 확률값을 계산하기 위해서 식 (30)에  $z=1$ 을 대입하면 다음과 같은 값을 얻을 수 있다.

$$\overline{P^*}(0, 1, 1) = \frac{(1-p)\lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0) + p\lambda S^{*(1)}(0)Q_{T-1}^*(0)}{p-1-\lambda S^{*(1)}(0)} \quad (31)$$

위 식 (31)은 B 부분, 즉 main queue에 고객이  $T$ 명 이상 있을 확률을 의미한다. 이제  $Q_0$ 를 구하면 식 (30)과 (31)뿐만 아니라 3.2절에서 구했던  $Q_i^*(0)$ 들의 값을 모두 계산할 수 있다.

지금까지의 방법과 동일하게 feedback queue의 고객수 분포를 구할 수 있다. 식 (29)로부터 마찬가지로의 방법을 사용하면 아래와 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{P^*}(0, 1, w) = & [\lambda S^{*(1)}(0)\{(p\psi(w) - pw - 1)Q_{T-1}^*(0) \\ & + (1-p+pw)Q_{T-1}^*(\lambda-\lambda\psi(w)) \\ & - \lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0)p(\psi(w) - w)\} / \{p(\psi(w) - w)\} \end{aligned} \quad (32)$$

### 3.4 $Q_0$ 의 계산

시스템이 비어 있는 상태를 나타내는  $Q_0$ , main queue에  $i$ 명 ( $1 \leq i \leq T-1$ )의 고객이 있는 상태를 나타내는  $Q_i^*(0)$ , main queue에  $T$  이상의 고객이 있는 상태를 나타내는  $\overline{P^*}(0, 1, 1)$ 을 모두 더하면 1이 되어야 한다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Q_0 + \sum_{i=1}^{T-1} Q_i^*(0) + \overline{P^*}(0, 1, 1) = 1 \quad (33)$$

그런데 3.2절과 3.3절에서 본 바와 같이  $Q_i^*(0)$ 과  $\overline{P^*}(0, 1, 1)$ 은 모두  $Q_0$ 로 표현이 가능하므로 위 식 (32)로부터  $Q_0$ 를 구할 수 있다.

또는  $Q_0$ 는 일반적인 G/G/1 모델에서  $\Pr\{idle\}$ 과 같으므로  $Q_0 = 1 - \rho$ 를 이용하여 구할 수 있다. 단 여기서  $\rho$ 는 feedback에 의해 증가되는 서비스 시간을 고려해야 한다.

### 3.5 평균 고객수

main queue의 평균 고객수를 구하기 위해서는 다음과 같은 식을 이용한다.

$$E(N_1) = \sum_{i=1}^{T-1} iQ_i^*(0) + \frac{d}{dz} \overline{P^*}(0, z, 1)|_{z=1} \quad (34)$$

즉, <그림 2>에서 보듯이  $\overline{P^*}(0, z, 1)$ 을 이용하여 B 부분에 대한 main queue의 평균 고객수와, 앞서 구한 A 부분의 확률을 이용한다. 위의 식 (30)을 이용하여  $\frac{d}{dz} \overline{P^*}(0, z, 1)|_{z=1}$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \overline{P^*}(0, z, 1)|_{z=1} = & [\lambda^2 Q_{T-1}^{*(2)}(0)(p-1-\lambda S^{*(1)}(0))Q_0 \\ & + \lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0)\lambda^2 S^{*(2)}(0) - p\lambda S^{*(2)}(0)Q_{T-1}^*(0) \\ & + 2T(1+\lambda S^{*(1)}(0))\{(1-p)\lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0) \\ & + p\lambda S^{*(1)}(0)Q_{T-1}^*(0)\} / \{2(1+\lambda S^{*(1)}(0)) \\ & (p-1-\lambda S^{*(1)}(0))\} \end{aligned} \quad (35)$$

이것은 B 부분에서의 main queue의 평균 고객수를 의미한다. feedback queue의 평균 고객수를 구하기 위해서는 B 부분만을 고려하면 된다. 곧 식 (32)를  $w$ 에 관해 미분한 뒤  $\frac{d}{dw} \overline{P^*}(0, 1, w)|_{w=1}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \overline{P^*}(0, 1, w)|_{w=1} = & p\lambda S^{*(1)}(0) [-pQ_{T-1}^*(0)\{\lambda^2 S^{*(2)}(0) \\ & - 2\lambda S^{*(1)}(0)(1+\lambda S^{*(1)}(0))\} + \lambda Q_{T-1}^{*(1)}(0)\{\lambda^2 S^{*(2)}(0) \\ & + 2(1-p)(1+\lambda S^{*(1)}(0))\} + \lambda^2 Q_{T-1}^{*(2)}(0) \\ & (p-1-\lambda S^{*(1)}(0))] / \{2(1+\lambda S^{*(1)}(0)) \\ & (p-1-\lambda S^{*(1)}(0))^2\} \end{aligned} \quad (36)$$

## 4. 수치 예제

본 연구에서는 main queue의 상황에 따라 dispatching이 일어나는 M/G/1 Bernoulli feedback 시스템에 대하여 상태 확률과 평균값을 구하였다. 제3절에서 보듯이 시스템의 상태를 두 가지

로 나누어 각각 다른 방법을 적용함으로써 각 상태의 확률을 구하였다. 하지만 본 연구에서의 결과물은 그 과정이 복잡하여 마지막 결과물을 얻는 데 계산량이 많다. 따라서 본 장에서는 실제 수치를 예를 들어 본 과정을 보다 명확하게 보여주고자 한다.

수치 분석을 위한 데이터로 서비스 시간의 분포는 Erlang (2, 0.4)로 하도록 한다. 고객의 도착은 도착률이 1인 포아송 과정을 따르도록 한다( $\lambda=1$ ). 또한 서비스 받은 고객은 0.1의 확률로 feedback되도록 한다( $p=0.1$ ). 마지막으로 main queue의 길이가 4이면 dispatching이 되도록 한다( $T=4$ ).

위의 데이터를 이용하여 실제 확률 값을 구하는 과정은 다음과 같다.

먼저 finite한 부분의 확률값을 계산해보도록 하자(3.2절 참조).

식 (16)을 이용하여  $Q_1^*(0)$ 을  $Q_0$ 의 식으로 표현하면 다음의 값을 얻을 수 있다.

$$Q_1^*(0) = 1.06667Q_0$$

다음으로 식 (17)를 이용하여  $Q_2(0)$ 을  $Q_0$ 의 식으로 표현하면 다음의 값을 얻을 수 있다.

$$Q_2(0) = 1.18519Q_0$$

식 (19)를 이용하여  $Q_3(0)$ 을  $Q_0$ 의 식으로 표현하기 위해서는  $Q_1^*(\lambda)$ 의 값이 필요하다. 이는 식 (20)을 이용하면 구할 수 있다.

$$Q_1^*(\lambda) = 0.634921Q_0$$

위 식을 식 (19)에 대입하여  $Q_3(0)$ 을  $Q_0$ 의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$Q_3(0) = 1.06667Q_0$$

식 (18)을 이용하여  $Q_2^*(0)$ 을  $Q_0$ 의 식으로 표현하면 다음과 같다

$$Q_2^*(0) = 0.96Q_0$$

마찬가지로  $P_{4,0}(0)$ 를  $Q_0$ 의 식으로 표현하기 위해서는  $Q_2^*(\lambda)$ 의 값이 필요하다. 이를 위해서 식 (21)을 이용하면 되는데 이때 다시  $Q_1^{*(1)}(\lambda)$ 의 값이 필요하게 된다. 이는 식 (20)을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$Q_1^{*(1)}(\lambda) = -0.272109Q_0$$

이를 식 (21)에 대입하면 다음과 같은 값을 얻을 수 있다.

$$Q_2^*(\lambda) = 0.586546Q_0$$

위 값을 이용하면 다음과 같이  $P_{4,0}(0)$ 를  $Q_0$ 의 식으로 표현할 수 있다.

$$P_{4,0}(0) = 0.927078Q_0$$

식 (18)에 의해  $Q_3^*(0)$ 를  $Q_0$ 의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$Q_3^*(0) = 0.83437Q_0$$

다음으로 infinite한 부분의 확률 값을 구하기 위해서 식 (31)에 데이터와 위에서 구한 값들을 대입하면 다음과 같이  $Q_0$ 의 식으로 표현된다(3.3절 참조).

$$\bar{P}^*(0, 1, 1) = 5.13896Q_0$$

위에서 보는 바와 같이 모든 상태들을  $Q_0$ 의 식으로 표현을 하였다.

이제 식 (32)를 이용하여  $Q_0$ 의 값을 구하면 다음과 같다(3.4절 참조).

$$Q_0 = 0.111111$$

앞서 언급한 바와 같이 위 값을 feedback에 의해서 증가되는 서비스 시간을 고려한 일반적인 G/G/1 모델에서의  $P\{idle\} = 1 - \rho$ 를 이용하여 구하면 다음과 같다. feedback에 의해서 고객의 서비스 시간은 기하적으로 증가를 하므로 feedback을 고려한 고객의 평균 서비스 시간은  $0.8 * \frac{1}{1-0.1}$  이 된다. 따라서 이를 이용하여  $P\{idle\} = 1 - \rho$ 를 구하면 위와 같은  $Q_0$ 의 값을 구할 수 있다.

위의 값을 다시 앞 식에 대입하면 finite한 부분에서 상태의 확률 값들을 계산할 수 있다.

즉,

$$Q_1^*(0) = 0.118518$$

$$Q_2^*(0) = 0.106667$$

$$Q_3^*(0) = 0.092707$$

의 값을 얻을 수 있다.

마지막으로 위의 GF를 미분하여  $\frac{d}{dz} \bar{P}^*(0, z, 1)|_{z=1}$ 를 구하면 다음과 같은 값을 얻는다.

$$\frac{d}{dz} \bar{P}^*(0, z, 1)|_{z=1} = 3.978$$

앞에서 구한 확률값들과 위의 값을 이용하여 식 (33)에 대입함으로써 main queue의 평균 고객수를 구할 수 있다(3.5절 참조).

$$E(N_1) = 4.587973$$

feedback queue의 평균 고객수는 위 식 (36)을 이용하여 구하면 된다.

$$E(N_2) = 1.812$$

본 모델의 타당성검증을 위해 Takacs(1962)에서 제시된 instantaneous feedback 모형(feedback queue가 없이 즉시 dispatching이 되는 모형)의 평균 고객수 분포와 비교를 하고자 한다. 본 모델에서의 main queue와 feedback queue의 평균 고객수의 합은 Takacs(1962)에서 구한 평균 고객수와 같아야 된다. Takacs(1962)의 식을 이용하면 평균 고객수는 6.4명이 되는 데 이는 위에서 구한 평균 고객수의 합( $E(N_1) + E(N_2)$ )과 일치한다.

## 5. 결론

본 연구에서는 M/G/1 Bernoulli feedback의 모형에서 main queue의 상태에 따라서 dispatching이 일어나는 정책에 대한 분석을 하였다. 지금까지의 feedback queue에 대한 정책은 priority를 주는 경우나 feedback queue의 상태에 따라 dispatching이 이루어지는 모형을 다루었다. 이는 경제적인 면에 대한 고려가 적거나 feedback된 고객에 대한 서버의 부담이 커지므로 feedback보다는 새롭게 도착하는 고객에 초점이 맞추어진 모형에는 적합하지 않다. 따라서 main queue의 상태를 주시함으로써 feedback되는 고객이 서버에 주는 부담을 줄이고 경제적인 면을 고려하기 위해서 <그림 1>과 같은 모형을 제시하였다. 또한 위의 모형을 푸는 과정에서 기존의 부가 변수법의 적용 방법을 한 차원 더 높일 수 있는 방법을 제시하였다. 즉, 모형의 분석에 있어서 시스템의 상태를 유한한 경우와

무한한 경우로 나누어서 각각에 부가 변수법의 다른 풀이법을 적용하였다. 이를 통해 각 상태의 확률과 평균 대기 고객수를 구하였다.

추후 연구과제로 비용구조를 도입하여 시스템 운영을 최적화 하는 threshold를 찾는 방법이 필요하고 main queue와 feedback queue에 모두 threshold가 존재하는 two-threshold 모형에 대한 연구가 필요하다.

## 6. 참고 문헌

- Lee, H. W. (1998), *Queueing Theory*, Sigma Press, Seoul, Korea.  
 Lee, H. W. and Seo, D. W. (1997), Design of a Production System with a Feedback Buffer, *Queueing Systems*, **26**, 187-202.  
 Takacs, L. (1962), A Single-Server Queue with Feedback, *Bell Syst. Tech. J.*, **42**, 505-519.  
 Wortman, M. A., Disney, R. L. and Kiessler, P. C. (1991), The M/G/1 Bernoulli Feedback Queue with Vacations, *Queueing Systems*, **9**, 353-364.  
 Hokstad, P. (1975), A Supplementary Variable Technique Applied to the M/G/1 Queue, *Scand. J. Statist.*, **2**, 95-98.  
 Disney, R. L., McNickle, D. C. and Simon, B. (1980), The M/G/1 Queue with Instantaneous Bernoulli Feedback, *Naval Res. Logist. Quarterly*, **27**, 635-644.  
 Adve, V. S. and Nelson, R. (1994), The Relationship Between Bernoulli and Fixed Feedback Policies for The M/G/1 Queue, *Oper. Res.*, **42**(2), 380-385.  
 Baba, Y. (1984), The M<sup>x</sup>/G/1 Queue with Finite Waiting Room, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **27**(3), 260-272.