Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 27, No. 4, pp. 379-383, December 2001.

추가제약 최단경로문제를 위한 간단한 완전 다항시간 근사해법군

홍성필[1†] · 정성진[2] · 박범환[2]

[1] 중앙대학교 상경학부 / [2] 서울대학교 산업공학과

A Simple Fully Polynomial Approximation Scheme for the Restricted Shortest Path Problem

Sung-Pil Hong[1] · Sung-Jin Chung[2] · Bum Hwan Park[2]

[1]School of Business, Chung-Ang University, Ansong, 459-756
[2]Department of Industrial Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-742

The restricted shortest path problem is known to be weakly NP-hard and solvable in pseudo-polynomial time. Four fully polynomial approximation schemes (*FPAS*) are available in the literature, and most of these are based on pseudo-polynomial algorithms. In this paper, we propose a new *FPAS* that can be easily derived from a combination of a set of standard techniques. Although the complexity of the suggested algorithm is not as good as the fastest one available in the literature, it is practical in the sense that it does not rely on the bound tightening phase based on approximate binary search as in Hassin's fastest algorithm. In addition, we provide a review of standard techniques of existing works as a useful reference.

Keywords: restricted shortest path problem, fully polynomial approximation scheme

1. 서 론

추가제약 최단경로문제(restricted shortest path problem: *RSP* 문제)는, 그래프 $G=(V,E)$상에서 호의 비용 c_{ij}와 시간 t_{ij}가 주어졌을 때, 시간이 T를 넘지 않으면서, 최소의 비용을 갖는 경로를 찾는 문제이다. 이 문제는 일정한 서비스 수준을 유지하면서 최소의 비용으로 상품을 전달해야 하는 운송 시스템이나(Ahuja *et al.*, 1993), 통신망에서 사용자간의 트래픽 전송시간을 고려하면서 최소 비용으로 라우팅(routing)하는 문제(Roukas and Baldine, 1996) 등에 응용되고 있는 모형이다.

이 문제는 $NP-hard$ 문제(Garey and Johnson, 1976)로서 다항시간 계산시간을 갖는 알고리듬은 알려져 있지 않다. 그러나, 이 문제에 대한 유사 다항시간(pseudo-polynomial time)의 동적 계획법(dynamic programming)은 쉽게 유도해 낼 수 있으며(Lawler, 1976), 이와 본질적으로는 같다고 볼 수 있는 확대 그래프(expanded graph) (Ahuja *et al.*, 1993)를 이용해서도 유사 다항시간 알고리듬을 개발할 수 있다.

본 연구는, 위의 유사 다항시간 알고리듬을 이용한 $(1+\varepsilon)$-근사해법에 관한 것이다. $(1+\varepsilon)$-근사해법이란 최적해와의 비율이 $(1+\varepsilon)$ 이하인 해를 구하는 해법을 말하는데, 특히 주어진 모든 ε에 대해, 다항시간의 계산시간 안에 $(1+\varepsilon)$-근사해를 구할 수 있는 해법이 있다면, 그러한 모든 ε에 대한 근사해법들을 통칭하여, 다항시간 근사해법군(polynomial time approximation scheme: *PAS*)이라 한다. 본 연구는 이러한 다항시간 근사해법군 중에서도, 계산 복잡도(computational complexity)가 문제 크기(input size)와 $1/\varepsilon$의 다항식으로 표현되는, 완전 다항시간 근사해법군(fully polynomial time

이 연구는 1999년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음(KRF-99-041-E00125).
† 연락저자 : 홍성필 교수, 459-756 경기도 안성시 중앙대학교 상경학부, Fax : 031-676-8460, e-mail : sphong@cau.ac.kr
2000년 8월 접수, 2001년 8월 게재 확정.

approximation scheme: $FPAS$)을 다룬다.

RSP 문제에 대한 $FPAS$는 이미 여러 논문에서 제시되어 왔다(Warburton, 1987; Hassin, 1992; Phillips, 1993). Warburton (1987)의 알고리듬은 무환 그래프(acyclic graph)에만 적용되므로, 일반적인 그래프에서의 $FPAS$는 Hassin (1992)과 Phillips (1993)가 제시한 알고리듬뿐이다. 그러나 Phillips (1993)의 $FPAS$는 그것이 현재까지 가장 나은 계산시간을 갖는다라는 주장과는 달리, 훨씬 더 나빠진 계산 복잡도를 가짐을 우리는 보일 수 있었다.

본 논문은, 이들의 $FPAS$가 주로 기반하고 있는 비례 축소(scaling)방법을 보다 일반화하여, 그것이 유사 다항시간 알고리듬과 결합되었을 때, 어떻게 간단한 $FPAS$를 구성할 수 있는지를 보이고자 한다. 서술의 편의를 위하여, c_{ij}, t_{ij}는 항상 양의 값이라고 가정한다.

2. 완전 다항시간 근사해법의 표준 기법

2.1 유사 다항시간 알고리듬

RSP 문제에 대한 유사 다항시간 알고리듬은 동적 계획법에 기초한 것과 확대 그래프를 이용한 것 두 가지로 대별된다. 먼저 동적 계획법에 기초한 것은, 최단경로문제에 대한 그것을 간단히 수정하여 얻을 수 있다(Lawler, 1976). 먼저 $c_j(t)$를 노드 1부터 노드 j까지, t 이하의 시간을 갖는 경로들의 비용 중 최소값이라 하면, 다음과 같은 동적 계획법을 구성할 수 있다.

$$c_1(t)=0 \ \ \forall t\geq 0,\ c_j(0)=\infty,\ j=2,\cdots,n$$
$$c_j(t)=Min\,[c_j(t-1),\ Min_{k\mid t_{kj}\leq t}\{c_k(t-t_{kj})+c_{kj}\}]$$
$$j=2,\cdots,n,\quad t=1,\cdots,T. \tag{1}$$

따라서, $c_n(T)$가 최적해가 되므로, 총 계산시간은 $O(mT)$가 된다. 그러나 이러한 동적 계획법은 다음절에서 설명할 비례 축소에 기초한 근사해법의 개발에는 적합하지 않다. 근사해법은 전체 국면의 횟수를 다항시간으로 줄임과 동시에 근사해를 보장해야 하는 해법이므로, 이 동적 계획법의 전체 국면의 횟수를 줄이기 위해 t_{ij}를 비례 축소하면, 비록 국면의 횟수는 줄지만 경로 비용과는 전혀 무관하게 될 뿐만 아니라 가능해를 보장해 줄 수 없다. 그래서 Hassin (1992)은, 비용을 국면(phase)으로 하여 또다른 동적 계획법을 구성하였다. $t_j(c)$를 노드 1부터 노드 j까지, c 이하의 비용을 갖는 경로들의 시간 중 최소값이라 하면, 다음과 같은 동적 계획법을 구성할 수 있다.

$$t_1(c)=0 \ \ \forall c\geq 0,\ t_j(0)=\infty,\ j=2,\cdots,n$$
$$t_j(c)=Min[\,t_j(c-1),\ Min_{k\mid c_{kj}\leq c}\{t_k(c-c_{kj})+t_{kj}\}],$$
$$j=2,\cdots,n,\quad c=1,2,\cdots,OPT. \tag{2}$$

여기서, OPT는 RSP 문제의 최적값을 말하는데, $t_n(c)\leq T$가 되는 c가 나올 때까지 국면을 진행시키면, 그때의 c가 OPT가 된다. 따라서, 총 계산시간은 $O(mOPT)$가 된다.

또한, Phillips(1993)에서처럼, 동적 계획법이 아닌 확장 그래프를 이용해서도 유사 다항시간 알고리듬을 구성할 수 있다. 위의 동적 계획법처럼, 확장 그래프 또한 비용에 관한 확장 그래프를 만드느냐, 혹은 시간에 관한 확장 그래프를 만드느냐에 따라 두 개의 확장 그래프를 얻을 수 있다. 먼저 시간에 관한 확장 그래프는 그래프 $G=(V,E)$를 다음과 같이 변환시킨 그래프다.

$$V'=\{(i,t)\mid i\in V,\ t=0,1,\cdots T\}.$$
$$E'=\{\{(i,t),(j,t+t_{ij})\}\mid (i,j)\in E,\ \ 0\leq t\leq T-t_{ij}\} \tag{3}$$

그래프 $G'=(V',E')$상에서 c_{ij}에 대해, 최단경로문제를 풀면, RSP 문제에 대한 해를 구할 수 있다. 노드 $(1,0)$에서 노드 (n,t)로 가는 최단경로는, 경로의 시간이 t 이하인 최소 비용의 경로가 되어, 결국, $0\leq t\leq T$의 모든 t에 대한 최단경로 중 최소의 비용을 갖는 경로가 최적해가 된다. 이때, 피보나치 힙 (Fibonacci Heap) 구조를 이용한 Dijkstra 방법을 사용하면, 노드 개수가 nT 이고, 호의 개수가 mT이므로, 전체 계산시간은 $O(mT+nT\log nT)$가 된다(Ahuja *et al.*, 1993). 식 (1)이 근사해법의 개발에 부적합한 것과 같은 이유로, 시간에 대한 확장 그래프 또한 근사해법의 개발에는 적합하지 않다. 그러나 Phillips (1993)는, 이러한 시간에 대한 확장 그래프에서 비례 축소를 통해 $FPAS$를 개발하였다고 주장했는데, 이것은 다음에 제시할 비용에 대한 확장 그래프를 그것으로 착각했기 때문으로 생각된다. 다음은 비용에 대한 확장 그래프 $G''=(V'',E'')$를 나타낸 것이다.

$$V''=\{(i,c)\mid i\in V,\ \ c=0,1,\cdots U\}$$
$$E''=\{\{(i,c),(j,c+c_{ij})\}\mid (i,j)\in E,\ \ 0\leq c\leq U-c_{ij}\} \tag{4}$$

여기서, U는 RSP 문제의 최적해에 대한 상한(upper bound)이다. $G''=(V'',E'')$ 상에서도, G'에서처럼, t_{ij}에 대한 최단경로를 구하여, 노드 $(1,0)$에서 노드 (n,c)로 가는 최단경로들 중 경로의 시간이 T 이하가 되는 최소의 c를 취하면, 그것이 바로 최적해가 된다. 이때 소요되는 계산시간은 $O(mU+nU\log nU)$가 된다.

2.2 유사 다항시간 알고리듬과 비례 축소

지금까지 우리는 두 가지 종류의 유사 다항시간 알고리듬을 살펴보았다. 첫 번째 것은 동적 계획법에 기초한 것이고, 두 번째는 확장 그래프를 이용한 것이다. 두 종류의 알고리듬을 계산시간 측면에서 비교하면 동적 계획법에 기초한 알고리듬이 보다 나으며, 이것은 3장에서 제시할 $FPAS$에서도 마찬가지이다.

알려진 바와 같이, $FPAS$가 존재하면 유사 다항시간 알고

리듬은 항상 존재하지만 (Garey and Johnson, 1976), 유사 다항시간 알고리듬의 존재가 $FPAS$의 존재를 의미하지는 않는다. 그러나 Ibarra and Kim (1975)의 배낭문제(knapsack problem)에 대한 완전 다항시간 근사해법 이후, 유사 다항시간 알고리듬, 특히 동적 계획법에 기초한 유사 다항시간 알고리듬이 있을 경우, 비용의 비례 축소와 같은 방법을 사용하면 쉽게 $FPAS$를 얻을 수 있다고 여겨지고 있다.

앞에서도 보았듯이, 위의 유사 다항시간 알고리듬들의 계산 복잡도는 상한값(U) 자체를 포함하고 있다. 비례 축소란, 유사 다항시간 알고리듬을 적용했을 때 상한값이 문제크기의 다항시간이 되도록 c_{ij}를 일정한 수로 나누어 주는 것을 의미한다(c_{ij}를 일정한 수로 나눈 새로운 비용을 $\hat{c}_{ij}$라 하자). 이때 근사해를 구하기 위해서는, 새로운 비용 $\hat{c}_{ij}$에 대한 최적경로의 비용과 원래 문제의 최적경로 비용과의 비율이 $(1+\varepsilon)$이 되도록, c_{ij}를 나누는 값을 적절히 조정해야 한다.

결국, 비례 축소방법을 사용하여 유사 다항시간 알고리듬을 $FPAS$로 전환할 때 가장 핵심적인 부분은, 상한값(U)을 문제크기와 $1/\varepsilon$의 다항식 형태로 전환함과 동시에 최적해와의 비율이 $(1+\varepsilon)$이 되도록 c_{ij}를 나누는 값을 적절히 조정하는 것이라 할 수 있다.

아래 기본정리는 RSP 문제에 대해, 위와 같은 비례 축소방법을 보다 일반적인 틀로써 정리한 것이다.

[정리1] V를 0보다 큰 임의의 실수라고 하고, RSP 문제에 대한 최적경로를 P라고 하자. 그리고 c_{ij}를 비례 축소한 $\hat{c}_{ij}$를 $\lceil c_{ij}/(\varepsilon V/(n-1))\rceil$라 하고, $\hat{c}_{ij}$에 대한 최적경로를 P^*라 하면, 다음이 성립한다.

$$\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P})-\varepsilon V< c(P^*)\le\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P}) \quad (5)$$

$$c(P^*)\le c(\hat{P})< c(P^*)+\varepsilon V \quad (6)$$

[증명]

먼저, $0\le\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}_{ij}-c_{ij}<\varepsilon V/(n-1)$이 성립하고, 노드 1에서 노드 n까지의 모든 경로는 많아야 $n-1$개의 호를 사용하므로,

$$\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(P)-\varepsilon V< c(P)<\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(P) \quad (7)$$

가 성립한다.

여기서, $c(P)$는 $\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}$를 말한다. 또한 $\hat{P}$, P^*의 최적성에 의해 $\hat{c}(\hat{P})\le\hat{c}(P^*)$, $c(P^*)\le c(\hat{P})$가 성립한다. 이 관계를 식 (7)에 대입해 보면,

$$\begin{aligned}\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P})-\varepsilon V&\le\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(P^*)-\varepsilon V\\&< c(P^*)\le c(\hat{P})\le\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P})\end{aligned}$$

이므로 식 (5)와 $c(\hat{P})\le\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P})$가 성립한다. 또한 식 (5)에 의해

$$\{\varepsilon V/(n-1)\}\hat{c}(\hat{P})< c(P^*)+\varepsilon V$$

가 성립하므로, $c(\hat{P})< c(P^*)+\varepsilon V$가 성립한다.

따라서, $\hat{P}$를 완전 다항시간 안에 구할 수 있다면, [정리1]에 의해, V를 RSP 문제에 대한 하한(lower bound)으로 대체하면, $c(\hat{P})< c(P^*)+\varepsilon L\le(1+\varepsilon)c(P^*)$가 되어 $FPAS$를 얻을 수 있다. 아래 [정리 2]는 $\hat{P}$를 완전 다항시간 안에 구하기 위한 하나의 충분조건을 제시한 것이다.

[정리2] RSP 문제의 최적해에 대한 상한과 하한을 각각 U와 L이라 할 때, 어떤 양수 ρ에 대해 $U\le\rho L$을 만족하면, $O(mn\varepsilon^{-1}\rho)$ 시간 안에, $(1+\varepsilon)$ −근사해를 구할 수 있다.

[증명]

우선, 비용이 U 이상인 모든 호를 제거하고, 나머지 모든 호의 비용을 $\hat{c}_{ij}=\lceil c_{ij}/\{\varepsilon L/(n-1)\}\rceil$과 같이 비례 축소를 한다. 이렇게 비례 축소된 문제에 대해, 동적 계획법 식 (2)를 적용하여 구한 최적경로를 $\hat{P}$라 하면, [정리 1]에 의해

$$c(\hat{P})< c(P^*)+\varepsilon V\le(1+\varepsilon)c(P^*)$$

가 된다.

그리고 비례 축소된 문제의 최적값 ($\hat{c}(\hat{P})$)는

$$\begin{aligned}\hat{c}(\hat{P})\le\hat{c}(P^*)&=\sum_{(i,j)\in P^*}\hat{c}_{ij}\\&\le\frac{n-1}{\varepsilon L}\sum_{(i,j)\in P^*}c_{ij}+n-1\\&\le\frac{(n-1)U}{\varepsilon L}+n-1\le(n-1)\rho\varepsilon^{-1}+n-1\end{aligned}$$

이 성립하여, 식 (2)의 전체 국면 횟수는 $O(n\rho\varepsilon^{-1})$이 된다. 따라서, 식 (2)를 적용하는 데 걸리는 총 계산시간은 $O(mn\rho\varepsilon^{-1})$이 된다.

3. 간단한 완전 다항시간 근사해법군

위 기본정리에 제시된 것과 같은 U, L을 미리 알 수 있다면, $O(mn\varepsilon^{-1})$의 계산시간을 갖는 $FPAS$를 쉽게 얻을 수 있다. 일반적으로 이러한 U, L은 쉽게 주어지지 않지만, 다음과 같은 방법을 통해 위의 조건을 만족시키는 U, L을 구할 수 있다.

[정리 3] $c(P^*)$에 대한 상한과 하한 U, L이 주어져 있을 때 (예 : $L_0=1$, $U_0=(n-1)\max c_{ij}$), $O((\log(U_0/L_0))mn\varepsilon^{-1})$의 계산시간을 갖는 $FPAS$를 구성할 수 있다.

[증명]

먼저, $L \leftarrow L_0$, $U \leftarrow 2L_0$ 와 같이 값을 할당하여 [정리 1]과 같이 비례 축소된 RSP 문제를 풀자. 이때, 만약 가능해가 나오지 않으면, 다시 상한과 하한을 $L \leftarrow U$, $U \rightarrow 2U$와 같이 설정하여 다시 RSP 문제를 푼다. 이 과정은 식 (2)의 최적값이 U보다 작아질 때까지 반복된다. 이때 나온 최적값은 $c(P^*)$와 같게 된다. 그런데 상한과 하한을 항상 2씩 곱해 가는 방식을 취하므로, 주어진 U, L에 대해 $U \leq 2L$(즉, $\rho=2$)을 만족하여, [정리 2]에 의해 $O(mn\varepsilon^{-1})$ 만에 $(1+\varepsilon)$-근사해를 구할 수 있다. 이러한 과정을 많아야 $\log(U_0/L_0)$ 번 하므로, 전체 계산시간은 $O(\{\log(U_0/L_0)\}mn\varepsilon^{-1})$이 된다.

위의 정리를 이용하여 다음과 같은 $FPAS$를 얻을 수 있다.

알고리듬 FPAS-SCALING

단계1. $L=1, U=2$

단계2. $\hat{c}_{ij} = \lceil c_{ij}/\{\varepsilon L/(n-1)\} \rceil$라 두고, 식 (2) 적용.

단계3. $t_j(\hat{c}) \leq T$, $c \leq U$인 c가 존재하면, 끝. 그렇지 않으면 단계4로.

단계4. $L \leftarrow U$, $U \leftarrow 2U$라 두고, 단계2로.

앞의 절에서 설명한 비용에 대한 확대 그래프에도 비례 축소 방법을 적용하면 $FPAS$를 얻을 수 있다.

먼저, 각 호의 비용을 $\hat{c}_{ij} = \lceil c_{ij}/\{\varepsilon L/(n-1)\} \rceil$와 같이 비례 축소한 후, $\hat{c}_{ij}$에 대한 확대 그래프 $\hat{G}=(\hat{V}, \hat{E})$를 다음과 같이 구성한다.

$$\hat{V} = \{(i, c) \mid i \in V,\ c=0, 1, \cdots \hat{U}\}$$
$$\hat{E} = \{\{(i, c), (j, c+\hat{c}_{ij})\} \mid (i, j) \in E,\ 0 \leq c \leq \hat{U} - \hat{c}_{ij}\}.$$

여기서, $\hat{U} = \lceil U/\{\varepsilon L/(n-1)\} \rceil$이다. 이렇게 구성된 $\hat{G}$상에서, t_{ij}에 대한 최단경로문제를 풀어, 노드 $(1, 0)$에서 노드 $(n, \hat{c})$까지의 경로 중 T 이하의 시간을 갖는 최소의 $\hat{c}$가 비례 축소된 RSP 문제의 최적값이 된다. $\hat{c}$는 [정리1]에 의해 $(1+\varepsilon)$-최적해가 된다. 이에 대한 정확한 알고리듬은 위의 FPAS-SCALING의 단계2를 $\hat{G}$상에서, t_{ij}에 대한 최단경로문제를 푸는 것으로 대체한 것이 된다. 또한, $U < \rho L$이면, $\hat{U} = O(n\varepsilon^{-1}\rho)$가 되고, $\hat{G}$는 $O(n\hat{U})$개의 노드와 $O(m\hat{U})$개의 호를 갖게 되므로, $\hat{G}$상에서의 최단경로문제는

$$\begin{aligned} &O(m\hat{U} + n\hat{U}\log n\hat{U}) \\ &= O(mn\varepsilon^{-1}\rho + n^2\varepsilon^{-1}\rho\log(n^2\varepsilon^{-1}\rho)) \end{aligned}$$

의 계산시간을 필요로 한다. 또한, [정리 3]과 마찬가지로, U와 L을 두 배씩 증가시키는 방법을 사용하면, 전체 계산시간은

$$O(\log(U/L)\{mn\varepsilon^{-1} + n^2\varepsilon^{-1}\log(n\varepsilon^{-1})\})$$

가 된다. 그러나 이것은 동적 계획법에 기초한 $FPAS$의 계산복잡도 보다 좋지 않다.

앞에서 서술했듯이, Phillips (1993)는 호의 비용을 비례 축소하지 않고, 시간에 관한 확장 그래프상에서 호의 시간을 비례 축소하는 실수를 하였다. 뿐만 아니라, 일정한 비율을 갖는 상한과 하한을 구하기 위해 U, L을 두 배씩 증가시키는 방법을 사용하였으므로, $\log(U/L)$의 계산시간을 더 곱했어야 했다. 그러나 Phillips (1993)는 이것을 빠뜨림으로써 강성 다항시간 (strongly polynomial time)을 갖는 $FPAS$를 제시했다고 주장하는 실수를 하였다. 따라서, 알려진 바와 달리, Phillips (1993)의 $FPAS$가 가장 좋은 복잡도를 갖는 것은 아니다.

4. 결 론

지금까지 두 개의 유사 다항시간 알고리듬으로부터 간단한 비례 축소방법을 통해 어떻게 $FPAS$를 구성할 수 있는지를 보였다. 즉, 호의 비용을 비례 축소하여, 두 개의 유사 다항시간 알고리듬을 적용하고, 이때, 일정한 비율의 상한과 하한을 구하기 위해 두 배씩 늘려가는 방법을 사용함으로써 두 개의 $FPAS$를 구성할 수 있었다.

Hassin (1992)은 $U < 2L$을 만족하는 L과 U를, 근사 이진 탐색(approximate binary search)을 이용하여 $O(\log\log(U_0/L_0))$시간 만에 구하였다. 또한, 근사 이진 탐색을 이용한 구간 분할(interval partitioning) 방법에 의해 전체 계산시간이 입력값의 개수에만 연관되고, 입력값 그 자체와는 무관한 강성 다항식(strongly polynomial) 형태의 $FPAS$를 제시하였다.

그러나 본 논문에서 보였듯이, Hassin(1992)에서 제시한 복잡한 방법들을 사용하지 않고, 간단한 비례 축소만으로도 충분히 만족할 만한 계산시간의 $FPAS$를 구할 수 있었다.

참고문헌

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L. and Orlin, J. B. (1993), *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, New Jersey.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1976), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco.

Hassin, R. (1992), Approximation Schemes for The Restricted Shortest Path Problem, *Mathematics of Operations Research*, **17**(1), 36-42.

Ibarra, O. and Kim, C. (1975), Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subsets Problems, *Journal of ACM*, **22**, 463-468.

Lawler, E. L. (1976), *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Phillips, C. A. (1993), The Network Inhibition Problem, *Proceedings of the 25th ACM Symposium on the Theory of Computing*, 776-785.

Roukas, G. N. and Baldine, I. (1996), Multicast Routing with End-to-End Delay Variation Constraints, *Proceedings of IEEE INFOCOM 1996*, 353-360.

Warburton, A. (1987), Approximation of Pareto Optima in Multiple-Objective Shortest Path Problems, *Operations Research*, **35**(1), 70-79.