Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 27, No. 4, pp. 374-378, December 2001.

이산시간 대기행렬시스템에 대한 분포적 Little의 법칙의 활용

김남기 · 채경철†

한국과학기술원 산업공학과

On the Discrete-Time Version of the Distributional Little's Law

Nam-Ki Kim · Kyung-Chul Chae

Department of Industrial Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Yousong, Taejon, 305-701

We present a discrete-time version of the distributional Little's law, of which the continuous-time version is well known. Then we extend it to the queue in which two or more customers may depart at the same time. As a demonstration, we apply this law to various discrete-time queues such as the standard Geom/G/1 queue, the Geom/G/1 queue with vacations, the multi-server Geom/D/c queue, and the bulk-service Geom/G^b/1 queue. As a result, we obtain the probability generating functions of the numbers in system/queue and the waiting times in system/queue for those queues.

Keywords : distributional Little's law, discrete-time queue, queue length, waiting time

1. 서 론

Little의 법칙($E(N)=\lambda E(W)$)은 대기행렬시스템에서 안정상태 고객수(N)와 체류시간(W)의 평균치 간의 관계를 나타내는 중요한 법칙이다(여기서 λ는 고객입력률이다). Little의 법칙을 이용하면, N과 W의 두 평균치 중 하나만 알면 다른 하나는 자동적으로 구해진다. 대기행렬시스템의 N과 W의 관계에 있어서, 이 일차 모멘트(즉, 평균치) 간의 관계에서 더 나아가서, 이차 이상의 모멘트들 간의 관계 및 분포들 간의 관계에 대한 연구가 진행되어 왔다. 그리하여 N과 W의 분포 간의 관계가 규명되기 시작하였으며 이를 '분포적 Little의 법칙(Distributional Little's Law)'이라고 한다. 상술하면, 포아송 도착과정을 가지며, 특정조건(비고1 참조)을 만족하는 대기행렬시스템에서 다음과 같은 분포적 Little의 법칙이 성립함이 Keilson and Servi(1988, 1990)에 의해 보여졌다.

$$N \sim Pois(\lambda W) \tag{1}$$

즉, 안정상태 시스템 내 고객수분포는 λW를 모수로 하는 포아송분포를 따른다. $P(z)$와 $W^*(\theta)$를 각각 N과 W의 PGF (Probability Generating Function)와 LST(Laplace Stieltjes Transform)이라 하자. 그러면 식 (1)의 변환형태는 다음과 같다.

$$P(z) = W^*(\lambda - \lambda z) \tag{2}$$

식 (2)를 z에 대해서 미분하여 '$z=1$'을 대입하면 원래의 Little의 법칙 '$E(N)=\lambda E(W)$'를 얻는다. 식 (1)과 (2)의 의의는 다음과 같다: 안정상태 고객수의 PGF와 체류시간의 LST 중 하나면 구하면 다른 하나는 즉각적으로 얻어진다. 이의 연장선상의 연구로, 분포적 Little의 법칙이 비단 포아송 도착과정뿐만 아니라, 재생도착과정이나 MAP (Markovian Arrival Process) 도착과정으로 확장되어 활용될 수 있음이 Bertsimas and Nakazato (1995), Takine(2001)에 의해 연구되었다. 기존 연구들이 모두 연속시간 대기행렬시스템을 대상으로 분포적 Little의 법칙을 활용한데 반하여, 본 논문에서는 분포적 Little의 법칙을 이산시간 대기행렬시스템에 대하여 정립하고, 이의 다양한 활용 가능성을 보인다.

최근, 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬모형에 대한 연구가 증대되고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 이산시간 대기행렬모형이 보다 잘 묘사할 수 있기 때문이고, 따라서

† 연락저자 : 채경철 교수, 305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 산업공학과, Fax : 042-869-3110, e-mail : kcchae@kaist.ac.kr
2001년 8월 접수, 1회 수정 후 2001년 9월 게재 확정.

연속시간 대기행렬모형을 통한 분석보다 좀 더 정확한 분석을 기대할 수 있기 때문으로 보인다. 이산시간 대기행렬모형에서는 시간축은 슬롯(slot)이라 불리는 기본단위의 등간격으로 나누어진다. 서비스 시간은 이 기본 슬롯의 정수배이며 서비스의 시작과 종료는 슬롯의 경계와 동기화된다. 고객의 도착은 슬롯의 중앙에서 발생하지만, 실제로는 슬롯의 경계에서만 시스템의 상태가 측정되므로, 슬롯의 경계에서 도착이 이루어지는 것으로 가정한다. 이때 한 슬롯동안 일어난 도착이 해당 슬롯의 맨 끝(슬롯 경계 직전)에 도착한 것으로 가정하는 모형을 후도착모형(Late Arrival System)이라 하고, 해당 슬롯의 맨 처음(슬롯 경계 직후)에 도착한 걸로 가정하는 것을 선도착모형(Early Arrival System)이라 한다(Takagi, 1993). 본 논문에서는 통신시스템에 보다 적합한 후도착모형을 가정하고 논의를 전개한다 (Bruneel and Kim, 1993).

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2절에서는 이산시간 대기행렬시스템에서 분포적 Little의 법칙을 정립하고, 분포적 Little의 법칙이 집단이탈 시스템에도 확장되어 적용될 수 있음을 보인다. 3절에서는 분포적 Little의 법칙을 활용하여 다양한 이산시간 대기행렬모형의 고객수와 체류시간의 PGF들과 그들 간의 관계를 유도할 수 있음을 보인다. 4절에서는 본 논문을 요약, 정리한다.

2. 이산시간 대기행렬시스템에서의 분포적 Little의 법칙

다음과 같은 조건을 만족하는 이산시간 대기행렬시스템을 고려하자.

조건 1. 고객은 모수가 λ인 베르누이 과정(Bernoulli Process)으로 시스템에 도착한다.

조건 2. 시스템에 도착한 모든 고객은 도착한 순서대로 시스템을 이탈한다(FIFO). (따라서, 고객손실이나, 중도이탈 등은 없다.)

조건 3. 임의 고객(TC, Test Customer)의 시스템 체류시간은 TC 도착이후의 도착과정과 독립이다.

$P(z)$와 $W(z)$를 각각 이산시간 대기행렬시스템의 안정상태 고객수와 체류시간의 PGF라 하자.

[정리 1] 분포적 Little의 법칙

조건 1~3을 만족하는 이산시간 후도착 대기행렬시스템에서는 다음이 성립한다.

$$P(z)=W((1-\lambda)+\lambda z) \tag{3}$$

[증명]

다음을 정의하자.

$P^A(z)$: TC가 도착시에 보는 시스템 내 고객수 PGF

$P^D(z)$: TC가 이탈시에 남기는 시스템 내 고객수 PGF(비고: 집단이탈시에는 집단 내에 TC 뒤쪽에 위치한 고객까지 TC가 남기는 것으로 간주한다. 즉, 집단이탈이 있는 경우라도 순간적으로 한 명씩 나가는 것으로 간주한다.)

집단도착/집단이탈의 경우라도 순간적으로 한 명씩 들어오고 한 명씩 나가는 것으로 간주하면 다음이 성립한다 (Wolff, 1989).

$$P^A(z)=P^D(z) \tag{4}$$

또한, BASTA (Bernoulli Arrivals See Time Averages (Takagi, 1993))에 의하여 다음이 성립한다.

$$P^A(z)=P(z) \tag{5}$$

TC가 이탈시에 남기는 고객수는 조건 2에 의하여 TC의 체류시간동안 도착한 고객수이다. 따라서, A_W를 W 동안 도착한 Bernoulli 도착수라고 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} P^D(z) &= E(z^{A_W})=E(E(z^{A_W}\mid W)) \\ &= E((1-\lambda)+\lambda z)^W) \quad (\because \text{조건 1과 3}) \\ &= W((1-\lambda)+\lambda z) \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5)와 (6)을 식 (4)에 대입하면 식 (3)을 얻는다.

[비고 1] 조건 1의 베르누이 과정을 포아송과정으로 바꾸면, 조건 1~3은 연속시간 대기행렬시스템에서 분포적 Little의 법칙이 성립하기 위한 조건이 된다. 여기에서 Keilson and Servi (1988, 1990)의 조건과 한 가지 다른 점은, 그들이 고객의 이탈이 반드시 한 명씩 이루어져야 한다고 제안한 점이다. 하지만 고객이 설령 집단으로 이탈하는 시스템이라 하더라도, 순간적으로 한 명씩 이탈하는 것으로 간주하면 분포적 Little의 법칙은 연속시간 대기행렬시스템이든 이산시간 대기행렬시스템이든 관계없이 집단이탈시스템으로 자연스럽게 확장된다.

서비스 장소를 제외한 대기장소(큐)만을 하나의 부분시스템(subsystem)으로 보자. 만일 큐가 조건 1~3을 만족한다면 큐에 대한 분포적 Little의 법칙을 고려할 수 있다. 즉, $P_Q(z)$와 $W_Q(z)$를 각각 안정상태 큐 내 고객수(N_Q)와 큐 내 체류시간(W_Q)의 PGF라고 하면 다음을 얻는다.

[따름정리 1]

큐가 조건 1~3을 만족하는 이산시간 후도착 부분시스템일 때, 다음이 성립한다.

$$P_Q(z)=W_Q((1-\lambda)+\lambda z) \tag{7}$$

[비고 2] 서비스를 받기 시작한 고객이 중단 없이 끝까지 서비

스를 받는 비축출형(nonpreemptive) 대기행렬시스템에서는 시스템 전체가 조건 1~3을 만족하면 큐도 자동으로 조건 1~3을 만족한다. 반면 축출형(preemptive) 대기행렬시스템에 식 (7)을 적용하기 위해서는 N_Q와 W_Q에 대한 추가적인 적절한 정의가 필요하다 (Keilson and Servi, 1988).

논의의 복잡성을 피하기 위해서 본 논문에서는 비축출형 대기행렬시스템만을 고려하자.

조건 4. 서비스를 받기 시작한 고객은 중단 없이(nonpreemptive) 끝까지 서비스를 받고 시스템을 떠난다.

$S(z)$를 서비스시간(S)의 PGF라고 하고 추가적으로 다음을 가정하자.

조건 5. 큐 내 체류시간(W_Q)과 서비스시간(S)은 독립이다.

[보조정리 1]

조건 1~5를 만족하는 이산시간 후도착 대기행렬시스템은 다음을 만족한다.

$$P(z)=P_Q(z)\cdot S((1-\lambda)+\lambda z) \tag{8}$$

[증명]

$$\begin{aligned} P(z)&=W((1-\lambda)+\lambda z) \quad (\because \text{정리 } 1) \\ &=W_Q((1-\lambda)+\lambda z)\cdot S((1-\lambda)+\lambda z)) \quad (\because \text{조건 1과 5}) \\ &=P_Q(z)\cdot S((1-\lambda)+\lambda z) \quad (\because \text{조건 4와 따름정리 1}) \end{aligned}$$

[비고 3] 조건 1~5를 만족하는 이산시간 후도착 대기행렬시스템에서, $P(z)$, $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$의 넷 중 하나만 구하면 정리 1, 따름정리 1, 보조정리 1로부터, 나머지 셋은 즉각적으로 구해진다. 이제 이 PGF들의 관계식에, 선형독립적인(linearly independent) 관계식을 하나 더 추가 할 수 있다고 가정하자(이 관계식은 해당 시스템에 따라 달라질 것이다(model dependent)). 이 관계식을 식 (3), (7), (8)과 연립하면, 단순한 연립방정식을 풂으로써 가장 중요한 성능척도들의 PGF를 모두 구할 수 있게 된다. 이는 다음 절에서 다양한 이산시간 대기행렬모형을 예제로 삼아 보여질 것이다.

3. 예제 시스템

이 절에서는 다양한 이산시간 대기행렬 모형에 대해, $P(z)$와 $P_Q(z)$ 사이의 관계식을 각각 하나씩 제공할 것이다. 이 관계식을 식 (3), (7), (8)과 연립하면 $P(z)$, $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$를 모두 구할 수 있다.

예제 1. 표준 Geom/G/1 모형

표준 Geom/G/1 모형은 고객이 베르누이 과정으로 도착하고, 서비스시간은 독립적이며 동일한(independent and identical) 일반분포를 따르며, 서버가 한 명 있는 이산시간 대기행렬 모형이다 (비고: 표준 Geom/G/1 모형은 조건 1~5를 만족한다). 표준 Geom/G/1 모형에서, N과 N_Q 간의 관계는 다음과 같다.

$$N=\begin{cases} N_Q+1, & \text{서버가 바쁘다는 조건하에서} \\ 0, & \text{서버가 유휴하다는 조건하에서} \end{cases} \tag{9}$$

서버가 유휴할(idle) 확률은 시스템에 아무도 없을 확률(P_0)과 같으므로, 식 (9)를 z-변환하면

$$P(z)=P_Q(z)\cdot z-P_0\cdot(z-1) \tag{10}$$

을 얻는다. 식 (10)을 식 (8)과 연립하면

$$\begin{aligned} P_Q(z)&=\frac{P_0\cdot(1-z)}{S((1-\lambda)+\lambda z)-z} \\ P(z)&=P_Q(z)\cdot S((1-\lambda)+\lambda z) \end{aligned} \tag{11}$$

을 얻는다. 식 (11)에서 $P(1)=1$로부터 $P_0=1-\rho$, $\rho=\lambda E(S)<1$을 얻는다. 그리고 정리 1, 따름정리 1로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} W_Q(z)&=P_Q\left(\frac{z-(1-\lambda)}{\lambda}\right) \\ W(z)&=P\left(\frac{z-(1-\lambda)}{\lambda}\right)=W_Q(z)\cdot S(z) \end{aligned}$$

예제 2. 휴가형 Geom/G/1 모형

휴가형 Geom/G/1 모형은 표준 Geom/G/1 모형과는 달리 서버가 미리 정해진 특정한 규칙에 따라 휴가를 떠나는 모형이다 (비고: 본 예제에서는 조건 1~5를 만족하는 휴가형 Geom/G/1 모형만을 고려한다). 휴가의 길이는 슬롯의 정수배이며 그 시작과 끝은 슬롯의 경계와 동기화된다. 서버가 휴가중인 경우 고객들은 큐 내에서 대기하므로 N과 N_Q 간의 관계는 다음과 같다.

$$N=\begin{cases} N_Q+1, & \text{서버가 바쁘다는 조건하에서} \\ N_Q, & \text{서버가 유휴하다는 조건하에서} \end{cases} \tag{12}$$

서버가 유휴할 확률을 P_I라고 하고 서버가 유휴할 조건하에서 큐 내 고객수의 PGF를 $P_I(z)$라고 하면, 식 (12)의 z-변환은 다음과 같다.

$$P(z)=P_Q(z)\cdot z-P_I\cdot P_I(z)\cdot(z-1) \tag{13}$$

이제 식 (13)을 식 (8)과 연립하면

$$P(z)=P_I(z)\cdot\frac{P_I\cdot(1-z)\cdot S((1-\lambda)+\lambda z)}{S((1-\lambda)+\lambda z)-z} \tag{14}$$

를 얻는다. 식 (14)에서 $P(1)=1$로부터 $P_I=1-\rho$, $\rho=\lambda E(S)<1$를 얻는다. 식 (14)의 우변에서 $P_I(z)$를 제외한 부분은 식 (11)과 일치한다. 즉, 휴가형 Geom/G/1 모형의 안정상태

고객수 PGF는 $P_I(z)$와 표준 Geom/G/1 모형의 안정상태 고객수 PGF와의 곱이다. 이를 휴가형 Geom/G/1 모형의 분해속성(decomposition property) (Takagi, 1993)이라 한다. 참고로 다양한 휴가모형에 따라 $P_I(z)$를 구하는 방법론은 Chang and Chae (2001)에 있으며, 예제 2의 연속시간 휴가형 M/G/1 버전(version)은 Keilson and Servi (1990)에 있다.

예제 3. 복수서버 Geom/D/c 모형

복수서버 Geom/D/c 모형은 서비스시간이 상수 D이며 서버의 수가 c명인 모형이다. 서비스시간이 고정되어 있기 때문에, 표준 Geom/D/c모형은 조건 1~5를 만족한다(비고: 서비스 시간이 고정되어 있지 않은 일반적인 Geom/G/c 모형은 조건 2를 위반한다). Geom/D/c 모형에서 N과 N_Q 간의 관계는 다음과 같다.

$$N=\begin{cases} N_Q+c, & N\geq c\text{인 조건하에서} \\ N, & N<c\text{인 조건하에서} \end{cases} \tag{15}$$

시스템에 n명 있을 확률을 P_n, $n\geq 0$이라고 하고, 식 (15)를 z-변환하면

$$\begin{aligned} P(z) &= z^c\cdot E(z^{N_Q}\,|\,N\geq c)P(N\geq c) \\ &\quad + E(z^N\,|N<c)P(N<c) \\ &= z^c\cdot\{(P_Q(z)-P(N<c)\}+\sum_{n=0}^{c-1}P_n z^n \end{aligned} \tag{16}$$

를 얻고, 이를 식 (8)과 연립하면

$$P(z)=((1-\lambda)+\lambda z)^D\cdot\frac{\sum_{n=0}^{c-1}(z^n-z^c)P_n}{((1-\lambda)+\lambda z)^D-z^c} \tag{17}$$

을 얻는다. 식 (17)의 미지수 P_n, $0\leq n\leq c-1$은 $P(z)$의 분모가 단위원의 내부 및 경계에 c개의 근을 갖는다는 사실을 이용하여 해결할 수 있다. 이에 대한 자세한 논의와 c개의 근을 이용한 수치적 분석은 Chaudhry *et al.* (2001)에 있다. 일단 $P(z)$가 구해지면 $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$는 정리 1, 따름정리 1, 보조정리 1로부터 즉각적으로 구해진다. 예제 3의 연속시간 M/D/c 버전은 Keilson and Servi(1990)에 있다.

예제 4. 집단 서비스 Geom/G^b/1 모형

집단 서비스 Geom/G^b/1 모형은 한 명의 서버가 동시에 b명까지 서비스할 수 있는 모형이다. 서비스 시작 시 시스템에 1명 이상 b명 미만 있을 때에는 서버는 시스템에 있는 고객들을 모두 동시에 서비스한다. b명 미만을 동시에 서비스하는 도중에 추가로 도착하는 고객은 진행중인 서비스에 포함시키지 않는다. N_S를 안정상태에 서비스 받고 있는 고객수라고 하자. 그러면 $N=N_S+N_Q$이고 N_S와 N_Q는 일반적으로 서로 종속이다. N과 N_Q 간의 관계를 N_S에 조건을 걸어 표현하면 다음과 같다.

$$N=\begin{cases} 0, & N_S=0\text{인 조건하에서} \\ N_S+N_Q, & 0<N_S<b\text{인 조건하에서} \\ b+N_Q, & N_S=b\text{인 조건하에서} \end{cases} \tag{18}$$

식 (18)을 z-변환하는데 있어서 다음의 사실이 매우 중요하다. 서비스 시작이래 경과된(elapsed) 슬롯수를 S_E라 하고 S_E 동안 도착한 고객을 A_{S_E}라 하자. 그러면 $0<N_S<b$인 경우에 N_Q는 A_{S_E}와 같고 N_S와는 독립이다. 이를 이용하여 식 (18)을 z-변환하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} P(z) &= P(N_S=0)\cdot z^0+P(0<N_S<b)\cdot \\ &\quad E(z^{N_S}\,|0<N_S<b)\cdot S_E((1-\lambda)+\lambda z)+ \\ &\quad P(N_S=b)\cdot z^b\cdot E(z^{N_Q}\,|N_S=b) \\ &= P(N_S=0)+P(0<N_S<b)\cdot E(z^{N_S}\,|0<N_S<b)\cdot \\ &\quad S_E((1-\lambda)+\lambda z)+z^b\cdot\{P_Q(z)- \\ &\quad P(N_S=0)-P(0<N_S<b)\cdot S_E((1-\lambda)+\lambda z)\} \\ &= P(N_S=0)(1-z^b)+P(0<N_S<b)\cdot \\ &\quad S_E((1-\lambda)+\lambda z)\cdot\{E(z^{N_S}\,|0<N_S<b)-z^b\}+ \\ &\quad P_Q(z)\cdot z^b \end{aligned} \tag{19}$$

식 (19)에서 '$S_E(z)=(1-S(z))/(E(S)(1-z))$'는 S_E의 PGF이다. 서비스 중인 고객수가 n, $0\leq n\leq b$명일 확률을 P_n^S라하고 식 (19)와 식 (8)을 연립하면 다음을 얻는다.

$$P(z)=S((1-\lambda)+\lambda z)\cdot\frac{P_0^S(1-z^b)+S_E((1-\lambda)+\lambda z)\cdot\sum_{n=1}^{b-1}(z^n-z^b)P_n^S}{S((1-\lambda)+\lambda z)-z^b} \tag{20}$$

[비고 4] 식 (20)은 Geom/G^b/1 모형의 임의시점 고객수 PGF에 대한(저자들이 아는 한) 최초의 명시적 표현이다. 식 (20)의 연속시간 M/G^b/1 버전은 다음과 같다.

$$P(z)=S^*(\lambda-\lambda z)\cdot\frac{P_0^S(1-z^b)+S_E^*(\lambda-\lambda z)\cdot\sum_{n=1}^{b-1}(z^n-z^b)P_n^S}{S^*(\lambda-\lambda z)-z^b} \tag{21}$$

식 (21)에서 $S^*(\theta)$, $S_E^*(\theta)=(1-S^*(\theta))/(\theta E(S))$는 각각 서비스시간과 경과서비스시간의 LST이다. 식 (21)에 대한 다른 표현은 Chaudhry and Templeton (1983)과 Lee(1998)에 있다.

식 (20)과 식 (21)의 미지수 P_n, $0 \le n \le c-1$은 다음과 같이 해결될 수 있다. 먼저, Rouché의 정리에 의하여 $P(z)$의 분모가 단위원의 내부 및 경계($|z| \le 1$)에서 c개의 근을 가짐을 보일 수 있다. 그런데 $P(z)$는 $|z| \le 1$에서 해석적(analytic)이어야 하므로 분모의 이 c개의 근은 분자의 근이 되어야 한다. 즉, 이 c개의 근을 분자에 대입하면 분자는 0이 되어야 한다. 이로부터 $P(z)$의 분자에 관련된 c개의 연립방정식을 세울 수 있고, 이 연립방정식을 풀어서 미지수 P_n, $0 \le n \le c-1$을 수치적으로 해결 할 수 있다 (Chaudhry and Templeton, 1983). 일단 $P(z)$가 구해지면 $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$는 정리 1, 따름정리 1, 보조정리 1로부터 즉각적으로 구해진다.

4. 결 론

고객의 도착과정이 베르누이과정을 따르는 대부분의 FIFO 이산시간 대기행렬시스템들은 분포적 Little의 법칙이 성립한다. 이들 시스템에 대해, 분포적 Little의 법칙을 활용하여 가장 중요한 성능척도들의 PGF인 $P(z)$, $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$에 관한 세 가지 불변의 관계식(invariance relation)을 얻을 수 있었다. 표준 Geom/G/1 모형, 휴가형 Geom/G/1 모형, 복수서버 Geom/D/c 모형, 집단서비스 Geom/G^b/1 모형을 예제로 삼아, 모형마다 달라지는 마지막 한 식을 제공하여 연립방정식을 풂으로써 $P(z)$, $W(z)$, $P_Q(z)$, $W_Q(z)$를 모두 얻을 수 있음을 보였다.

본 논문의 기여를 다음과 같이 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 본 논문은 분포적 Little의 법칙을 이산시간 대기행렬시스템으로 확장한(저자들이 아는 한) 최초의 시도이다. 둘째로 고객이 집단으로 이탈하더라도 여전히 분포적 Little의 법칙이 성립함을 보인 점이다. 셋째로 그 동안 모형의 복잡성으로 인해 문헌에 알려져 있지 않은 것으로 보이는, Geom/G^b/1 모형의 임의시점 고객수 분포 및 체류시간의 PGF를 분포적 Little의 법칙이 집단이탈의 경우에도 성립한다는 사실을 이용하여 해결한 점이다.

분포적 Little의 법칙은 본 논문에서 다룬 모형들뿐만 아니라 다양한 대기행렬시스템의 분석에 활용될 수 있을 것이다.

참고문헌

Bertsimas, D. and Nakazato, D. (1995), The Distributional Little's Law and Its Applications, *Operations Research*, **43**(2), 298-310.

Bruneel, H. and Kim, B. G. (1993), *Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2.

Chang, S. H. and Chae, K. C. (2001), Alternative Expressions for the Decomposition Property in the Geo/G/1 Queue with Generalized Vacations, *KORMS/KIIE conference 2001*, 148-151. (written in Korean)

Chaudhry, M. L., Kim, N. K. and Chae, K. C. (2001), Equivalence of Bulk-Service Queues and Multi-Server Queues and Their Explicit Distributions in Terms of Roots, *Tech. Rep.* 01-07, Dept. IE, KAIST.

Chaudhry, M. L. and Templeton, J. G. C. (1983), *A First Course in Bulk Queues*, John Wiley & Sons, New York, 182-184.

Keilson, J. and Servi, L. D. (1988), A Distributional Form of Little's Law, *Operations Research Letters*, **7**(5), 223-227.

Keilson, J. and Servi, L. D. (1990), The Distributional Form of Little's Law and the Fuhrmann-Cooper Decomposition, *Operations Research Letters*, **9**(4), 239-247.

Lee, H. W. (1998), *Queueing Theory*, Sigma Press, Seoul, Korea, 484(written in Korean).

Takagi, H. (1993), *Queueing Analysis, Vol 3: Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, 48, 90.

Takine, T. (2001), Distributional Form of Little's Law for FIFO Queues with Multiple Markovian Arrival Streams and Its Application to Queues with Vacations, Queueing Systems, **37**(1), 31-63.

Wolff, R. W. (1989), *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, New Jersey, 387.