

편심축하중을 받는 비대칭 박벽보의 엄밀한 동적강도행렬

Exact Dynamic Stiffness Matrix of Nonsymmetric Thin-walled Beams Subjected to Eccentrically Axial Forces

김 문 영¹⁾ · 윤 희 태²⁾

Kim, Moon Young Yun, Hee Taek

요 약 : 비대칭단면을 갖는 박벽 직선보의 3차원 자유진동해석을 수행하기 위하여 엄밀한 요소강도행렬을 유도한다. 단면이 균일한 비대칭 박벽 단성보에 대하여 운동방정식, 힘-변위 관계식을 유도하고 엄밀한 동적강도행렬을 수치적으로 산정하는 방법을 제시한다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식을 1차 연립미분방정식으로 바꾸고, 비대칭행렬을 갖는 선형 고유치문제의 해를 복소수영역에서 구한다. 이를 이용하여 절점변위에 대한 처짐함수를 엄밀히 구하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 동적요소강도행렬을 산정한다. 본 방법의 타당성을 보이기 위하여 비대칭 박벽보의 고유진동수를 계산하고, 해석해, 혹은 3차 Hermitian 다항식을 사용한 보요소 및 ABAQUS를 사용한 유한요소 해석결과와 비교한다.

ABSTRACT : Derivation procedures of exact dynamic stiffness matrices of thin-walled straight beams subjected to eccentrically axial forces are rigorously presented for the spatial free vibration analysis. An exact dynamic stiffness matrix is established from governing equations for a uniform beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. First this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, the displacement functions of displacement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using element force-displacement relationships. The natural frequencies of nonsymmetric thin-walled straight beams are evaluated and compared with analytical solutions or results by thin-walled beam element using the cubic Hermitian polynomials and ABAQUS's shell elements in order to demonstrate the validity of this study.

핵심용어 : 박벽보, 동적강도행렬, 고유치문제, 처짐함수, 해석해

KEYWORDS : thin-walled beam, dynamic stiffness matrix, eigenvalue problem, displacement function, analytical solution

1) 정희원, 성균관대학교 토목환경공학과 교수
2) 한국철도기술연구원 선임연구원

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

구조공학의 다양한 응용분야에서 박벽보는 가장 널리 사용되고 있는 구조 요소이다. 특히 I형, 채널, 앵글단면 형태를 가지는 박벽보 구조는 단위 중량에 대한 강성이 매우 높아 실무에서 활발히 적용되고 있다.

박벽보에 관한 연구는 1960년대에 Vlasov⁽¹⁾와 Timoshenko⁽²⁾ 등에 의해 시작된 이후, 최근까지도 국내외에서 많은 발전이 이루어지고 있다. 그러나 비대칭단면을 갖는 박벽보 요소는 구조적 거동이 복잡하여 단순한 경계조건이 주어지지 않는 한, 고유진동수와 진동모우드 등의 동적 특성과 좌굴하중과 같은 정적 특성에 대한 엄밀한 해석이 어렵다. 이러한 이유로 직선 박벽보 요소의 자유진동 및 안정성 해석을 위한 대부분의 연구^{(3)~(7)}에서는 Hermitian다항식 등을 형상함수로 사용함으로써 근사적인 요소 강도행렬을 산정하였다. 1985년 Friberg⁽⁸⁾는 Vlasov이론을 바탕으로 비대칭 박벽보 요소의 엄밀한 동적 강도행렬을 유도하였으며, Banerjee와 Williams⁽⁹⁾ 그리고 Banerjee 등⁽¹⁰⁾은 각각 구속된 뒹(warping)효과를 무시한 경우와 이를 고려한 경우에 축하중을 받는 Timoshenko 보요소의 휨-비틀 동적강도행렬을 얻었다. 그러나 동적강도행렬에 대한 기존의 연구들은 대칭 또는 일축대칭 단면을 갖는 경우에 동적강도행렬을 유도하거나, 유도과정이 일반적이지 못하여 복잡하게 연계된 연립미분방정식 해를 구하기 곤란한 경우가 발생할 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 박벽보 구조의 동적해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 정식화 기법을 제시한다. 변분법을 이용하여 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 총포텐셜에너지로부터 운동방정식과 힘-변위 관계식을 유도한다. 이러한 지배방정식은 고차의 연립미분방정식이므로 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환하

고, 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 풀어서 엄밀한 처짐함수를 얻는다. 여기에 재단력-변위 관계식을 적용하므로써 엄밀한 동적 14×14 요소강도행렬을 유도한다.

형상함수를 도입하여 요소의 강도행렬을 산정하는 기존의 유한요소법과 비교할 때, 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단순지지, 캔틸레버 박벽보 구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해, 혹은 3차 Hermitian 다항식을 사용한 보요소 및 ABAQUS⁽¹¹⁾의 쉘요소를 이용한 결과와 비교한다.

2. 비대칭 박벽보의 운동방정식과 힘-변위 관계식

그림 1은 도심에서 정의한 7개의 변위파라미터를 나타낸다. U_x , U_y , U_z 와 $\omega_1 (= \theta)$, $\omega_2 (= -U_z')$, $\omega_3 (= U_y')$ 는 각각 x_1 , x_2 , x_3 방향으로의 강체 이동변위와 강체회전변위를 나타내며, $f (= -\theta')$ 는 x_1 방향으로의 뒹을 정의하는 파라미터이다. 문헌⁽¹⁾의 결과에 의하면, 전단변형효과를 무시하는 비대칭 단면을 갖는 박벽보의 총포텐셜에너지

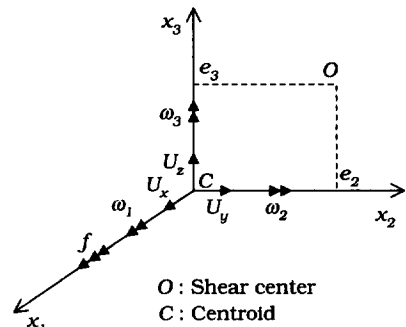


그림 1. 박벽보의 변위장

Π 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_M - \Pi_{ext} \quad (1a)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_0^l [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 \\ & + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 \\ & + 2EI_{3\phi} U_y'' \theta'' + 2EI_{2\phi} U_z'' \theta''] dx_1 \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^l [{}^oF_1 (U_y'^2 + U_z'^2) + {}^oM_P \theta'^2 \\ & + {}^oF_2 U_z' \theta - {}^oF_3 U_y' \theta \\ & + {}^oM_1 (U_z' U_y'' - U_z'' U_y') \\ & + {}^oM_2 (U_y'' \theta - U_y' \theta') \\ & + {}^oM_3 (U_z'' \theta - U_z' \theta')] dx_1 \end{aligned} \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_M = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l [A (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) \\ & + I_o \theta^2 + I_3 U_y'^2 + I_2 U_z'^2 + I_\phi \theta'^2 \\ & + 2I_{3\phi} U_y' \theta' + 2I_{2\phi} U_z' \theta'] dx_1 \end{aligned} \quad (1d)$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} U_e^T F_e \quad (1e)$$

그리고 E 는 탄성계수이고 G 는 전단탄성계수이며, A 는 단면적, $I_2, I_3, I_\phi, I_{2\phi}, I_{3\phi}$ 는 도심에서 정의되는 단면상수들이며, 구체적인 계산식은 참고문헌⁽⁷⁾를 참조할 수 있다. J 는 비틀림상수를 나타내며, ρ, ω 는 각각 부재의 밀도와 진동수를 나타낸다. (')은 x 에 대한 미분을 표시낸다. 또한, ${}^oF_1, {}^oM_1, {}^oM_2, {}^oM_3, {}^oM_\phi$ 는 각각 단면의 도심에 작용하는 초기축하중, 초기비틀림 및 휨모멘트, Wagner effect를 나타내는 초기단면력을 나타내며, ${}^oF_2, {}^oF_3$ 는 초기전단력을 의미한다. U_e, F_e 는 각각 부재양단의 절점변위 및 절점력벡터를 나타낸다. (그림 2, 3 참조) 또한, ${}^oM_\phi$ 는 다음 식

으로 산정한다.

$${}^oM_P = \beta_1 {}^oF_1 + \beta_2 {}^oM_2 + \beta_3 {}^oM_3 + \beta_\phi {}^oM_\phi \quad (2)$$

여기서 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_\phi$ 는 단면상수들이며 구체적인 계산식은 문헌⁽¹²⁾을 참조할 수 있다.

식 (1)은 전단력 및 구속된 비틀림모멘트에 의한 전단변형(shear deformation) 효과는 무시하지만, 비대칭 단면에 대한 휨-비틀림의 영향은 고려한다. 또한 회전관성이 고려되며, 초기 휨과 비틀림모멘트의 에너지식은 semitangential rotation에 근거하여 회전각의 2차항을 일관성있게 고려하여 유도되었으며, 결과적으로 semitangential moment에 대응하는 포텐셜에너지를 나타낸다. 식 (1)을 이용한 유한요소 해석법은 문헌⁽⁷⁾를 참조할 수 있다. 본 연구는 전단력, 비틀림모멘트 그리고 바이모멘트가 각각 영(${}^oF_2 = {}^oF_3 = {}^oM_1 = {}^oM_\phi = 0$)이어서 축력, 휨모멘트 그리고 비틀림모멘트가 부재 축을 따라서 일정한 경우에 동적강도행렬을 산정한다.

이제 U_x, U_y, U_z 와 θ 에 대하여 식 (1)의 변분을 취하면 아래와 같이 비대칭 박벽보의 운동방정식과 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$EA U_x'' + \rho \omega^2 A U_x = 0 \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} EI_3 U_y'''' + EI_{3\phi} \theta'''' - \rho \omega^2 (A U_y - \\ I_3 U_y'' - I_{3\phi} \theta'') - {}^oF_1 U_y'' + {}^oM_2 \theta'' = 0 \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} EI_2 U_z'''' + EI_{2\phi} \theta'''' - \rho \omega^2 (A U_z - \\ I_2 U_z'' - I_{2\phi} \theta'') - {}^oF_1 U_z'' + {}^oM_3 \theta'' = 0 \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} EI_\phi \theta'''' - GJ \theta'' + EI_{3\phi} U_y'''' + EI_{2\phi} U_z'''' \\ - \rho \omega^2 (I_o \theta - I_\phi \theta'' - I_{2\phi} U_z'' - I_{3\phi} U_y'') \\ - {}^oM_\phi \theta'' + {}^oM_2 U_y'' + {}^oM_3 U_z'' = 0 \end{aligned} \quad (3d)$$

그리고

$$F_1 = EA U_x' \quad (4a)$$

$$F_2 = -EI_3 U_y''' - EI_{3\phi} \theta''' - \rho \omega^2 I_3 U_y' - \rho \omega^2 I_{3\phi} \theta' + {}^o F_1 U_y' - {}^o M_2 \theta' \quad (4b)$$

$$F_3 = -EI_2 U_z''' - EI_{2\phi} \theta''' - \rho \omega^2 I_2 U_z' - \rho \omega^2 I_{2\phi} \theta' + {}^o F_1 U_z' - {}^o M_3 \theta' \quad (4c)$$

$$M_1 = -EI_\phi \theta''' + GJ\theta' - EI_{3\phi} U_y''' - EI_{2\phi} U_z''' - \rho \omega^2 I_\phi \theta' - \rho \omega^2 I_{2\phi} U_z' - \rho \omega^2 I_{3\phi} U_y' + {}^o M_\phi \theta' - 0.5 {}^o M_2 U_y' - 0.5 {}^o M_3 U_z' \quad (4d)$$

$$M_2 = EI_2 U_z'' + EI_{2\phi} \theta' + 0.5 {}^o M_3 \theta \quad (4e)$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{3\phi} \theta' + 0.5 {}^o M_2 \theta \quad (4f)$$

$$M_\phi = EI_\phi \theta' + EI_{3\phi} U_y'' + EI_{2\phi} U_z'' \quad (4g)$$

이렇게 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 운동방정식은 휨과 비틀림의 연계효과로 인하여 식 (3)과 같이 4계 연립 상미분방정식의 형태를 나타내며, 단순한 하중이나 경계조건이 주어지지 않는 한 엄밀해를 구하는 것은 매우 어렵다. 이러한 경우 지금까지 직선 박벽보 요소의 자유진동 해석을 위한 대부분의 연구에서는 Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 사용하므로써 근사적으로 요소 강도행렬을 산정하였다.

3. 박벽보의 동적 요소강도행렬(dynamic element stiffness matrix)

본 장에서는 식 (3)의 엄밀해를 구하고, 이를 이용하여 비대칭 직선 박벽보 요소의 동적강도행렬을 산정하는 방법을 제시한다.

3.1 엄밀한 변위함수의 유도

먼저 운동방정식(3)을 1계 연립미분방정식 형태로 전환하기 위하여, 14개의 변위성분으로 구성되는 변위벡터를 다음과 같이 도입한다.

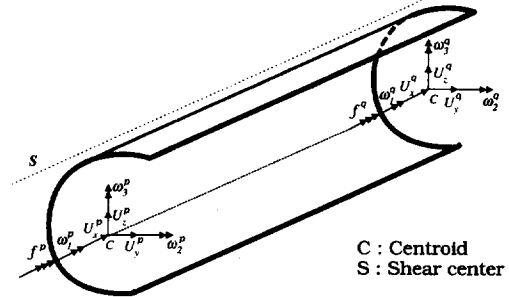


그림 2. 박벽보 요소의 질점 변위

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{x}) &= \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, \\ & \quad d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \\ &= \langle U_x, U_x', U_y, U_y', U_y'', U_y''', U_z, \\ & \quad U_z', U_z'', U_z''', \theta, \theta', \theta'', \theta''' \rangle^T \end{aligned} \quad (5)$$

이제 식 (5)를 식 (3)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 14개의 미분방정식을 얻는다.

$$d_1' = d_2 \quad (6a)$$

$$EA d_2' = -\rho \omega^2 A d_1 \quad (6b)$$

$$d_3' = d_4 \quad (6c)$$

$$d_4' = d_5 \quad (6d)$$

$$d_5' = d_6 \quad (6e)$$

$$EI_3 d_6' + EI_{3\phi} d_{14}' = \rho \omega^2 A d_3 - \rho \omega^2 I_3 d_5 - \rho \omega^2 I_{3\phi} d_{13} + {}^o F_1 d_5 - {}^o M_2 d_{13} \quad (6f)$$

$$d_7' = d_8 \quad (6g)$$

$$d_8' = d_9 \quad (6h)$$

$$d_9' = d_{10} \quad (6i)$$

이제 식 (7)의 일반해는 고유치해석 결과를 이용하여 복소 지수함수의 일차결합(linear combination)으로 표시할 수 있다.

$$d(x) = \sum_{i=1}^{14} a_i Z_i e^{\lambda_i x} = X(x) a \quad (10)$$

여기서 X 와 a 는 각각 14개의 고유치 해를 이용하여 x 에 관한 복소 지수함수로 이루어진 14×14 행렬함수 및 적분상수벡터를 나타낸다.

$$X(x) = \begin{bmatrix} Z_1 e^{\lambda_1 x}; Z_2 e^{\lambda_2 x}; Z_3 e^{\lambda_3 x}; Z_4 e^{\lambda_4 x}; \\ Z_5 e^{\lambda_5 x}; Z_6 e^{\lambda_6 x}; Z_7 e^{\lambda_7 x}; Z_8 e^{\lambda_8 x}; \\ Z_9 e^{\lambda_9 x}; Z_{10} e^{\lambda_{10} x}; Z_{11} e^{\lambda_{11} x}; \\ Z_{12} e^{\lambda_{12} x}; Z_{13} e^{\lambda_{13} x}; Z_{14} e^{\lambda_{14} x} \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$a = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \\ a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \rangle^T \quad (11b)$$

복소계수 a 를 그림 2에 보이는 박벽보 요소 양단의 14개의 절점변위성분으로 표시할 필요가 있다. 이를 위하여 다음과 같이 절점변위벡터를 정의한다.

$$E = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} & z_{1,5} & z_{1,6} & z_{1,7} & z_{1,8} & z_{1,9} & z_{1,10} & z_{1,11} & z_{1,12} & z_{1,13} & z_{1,14} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} & z_{3,4} & z_{3,5} & z_{3,6} & z_{3,7} & z_{3,8} & z_{3,9} & z_{3,10} & z_{3,11} & z_{3,12} & z_{3,13} & z_{3,14} \\ z_{7,1} & z_{7,2} & z_{7,3} & z_{7,4} & z_{7,5} & z_{7,6} & z_{7,7} & z_{7,8} & z_{7,9} & z_{7,10} & z_{7,11} & z_{7,12} & z_{7,13} & z_{7,14} \\ z_{11,1} & z_{11,2} & z_{11,3} & z_{11,4} & z_{11,5} & z_{11,6} & z_{11,7} & z_{11,8} & z_{11,9} & z_{11,10} & z_{11,11} & z_{11,12} & z_{11,13} & z_{11,14} \\ z_{8,1} & z_{8,2} & z_{8,3} & z_{8,4} & z_{8,5} & z_{8,6} & z_{8,7} & z_{8,8} & z_{8,9} & z_{8,10} & z_{8,11} & z_{8,12} & z_{8,13} & z_{8,14} \\ z_{4,1} & z_{4,2} & z_{4,3} & z_{4,4} & z_{4,5} & z_{4,6} & z_{4,7} & z_{4,8} & z_{4,9} & z_{4,10} & z_{4,11} & z_{4,12} & z_{4,13} & z_{4,14} \\ z_{12,1} & z_{12,2} & z_{12,3} & z_{12,4} & z_{12,5} & z_{12,6} & z_{12,7} & z_{12,8} & z_{12,9} & z_{12,10} & z_{12,11} & z_{12,12} & z_{12,13} & z_{12,14} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} & y_{1,5} & y_{1,6} & y_{1,7} & y_{1,8} & y_{1,9} & y_{1,10} & y_{1,11} & y_{1,12} & y_{1,13} & y_{1,14} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & y_{3,4} & y_{3,5} & y_{3,6} & y_{3,7} & y_{3,8} & y_{3,9} & y_{3,10} & y_{3,11} & y_{3,12} & y_{3,13} & y_{3,14} \\ y_{7,1} & y_{7,2} & y_{7,3} & y_{7,4} & y_{7,5} & y_{7,6} & y_{7,7} & y_{7,8} & y_{7,9} & y_{7,10} & y_{7,11} & y_{7,12} & y_{7,13} & y_{7,14} \\ y_{11,1} & y_{11,2} & y_{11,3} & y_{11,4} & y_{11,5} & y_{11,6} & y_{11,7} & y_{11,8} & y_{11,9} & y_{11,10} & y_{11,11} & y_{11,12} & y_{11,13} & y_{11,14} \\ y_{8,1} & y_{8,2} & y_{8,3} & y_{8,4} & y_{8,5} & y_{8,6} & y_{8,7} & y_{8,8} & y_{8,9} & y_{8,10} & y_{8,11} & y_{8,12} & y_{8,13} & y_{8,14} \\ y_{4,1} & y_{4,2} & y_{4,3} & y_{4,4} & y_{4,5} & y_{4,6} & y_{4,7} & y_{4,8} & y_{4,9} & y_{4,10} & y_{4,11} & y_{4,12} & y_{4,13} & y_{4,14} \\ y_{12,1} & y_{12,2} & y_{12,3} & y_{12,4} & y_{12,5} & y_{12,6} & y_{12,7} & y_{12,8} & y_{12,9} & y_{12,10} & y_{12,11} & y_{12,12} & y_{12,13} & y_{12,14} \end{bmatrix}$$

$$U_e = \langle U^p, U^a \rangle^T \quad (12a,b)$$

$$U^a = \langle u^a, v^a, w^a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, f^a \rangle^T, \quad (12c)$$

$$a = p, q$$

여기서

$$U^p = \langle U_x(o), U_y(o), U_z(o), \theta(o), \\ -U_z'(o), U_y'(o), -\theta'(o) \rangle^T \quad (13a)$$

$$U^a = \langle U_x(l), U_y(l), U_z(l), \theta(l), \\ -U_z'(l), U_y'(l), -\theta'(l) \rangle^T \quad (13b)$$

부재양단의 좌표($x = 0, l$)를 식 (10)에 대입하여 정리하면, 절점변위벡터 U_e 는 적분상수 벡터 a 로 나타낼 수 있다.

$$U_e = E a \quad (14a)$$

$$a = E^{-1} U_e \quad (14b)$$

여기서 E 의 각 요소는 $X(x)$ 로부터 부재 양단의 x 좌표를 대입하여 쉽게 구할 수 있으며 결과식은 다음과 같다. 이때 복소수 형태의 역행렬은 IMSL subroutine DLINCG⁽¹³⁾를 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned}
s_1 &= EA, \quad s_2 = -\rho\omega^2 I_3 + {}^oF_1, \\
s_3 &= EI_3, \quad s_4 = -\rho\omega^2 I_{3\phi} - {}^oM_2, \\
s_5 &= EI_{3\phi}, \quad s_6 = -\rho\omega^2 I_2 + {}^oF_1, \\
s_7 &= EI_2, \quad s_8 = -\rho\omega^2 I_{2\phi} - {}^oM_3, \\
s_9 &= EI_{2\phi}, \quad s_{10} = -\rho\omega^2 I_{3\phi} - 0.5 {}^oM_2, \\
s_{11} &= -\rho\omega^2 I_{2\phi} - 0.5 {}^oM_3, \\
s_{12} &= GJ - \rho\omega^2 I_\phi + {}^oM_\phi, \quad s_{13} = EI_\phi, \\
s_{14} &= 0.5 {}^oM_3, \quad s_{15} = 0.5 {}^oM_2
\end{aligned}$$

요소의 절점변위를 나타내는 식 (15)를 식 (17)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위파라미터 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = SX(x)E^{-1}U_e \quad (18)$$

한편 부재양단의 절점력벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \quad (19a)$$

여기서

$$\begin{aligned}
F^\alpha &= \langle F_1^\alpha, F_2^\alpha, F_3^\alpha, M_1^\alpha, M_2^\alpha, \\
&\quad M_3^\alpha, M_\phi^\alpha \rangle^T, \quad \alpha = p, q
\end{aligned} \quad (19b)$$

이제 식 (18)을 이용하여 부재 양단($x = 0, l$)의 부재력을 구하면 다음과 같다.

$$F^p = -f(0) = -SX(0)E^{-1}U_e \quad (20a)$$

$$F^q = f(l) = SX(l)E^{-1}U_e \quad (20a)$$

마지막으로 박벽 직선보의 엄밀한 동적 요소강

도행렬 $K(\omega)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_e = K(\omega)U_e \quad (21a)$$

여기서,

$$K(\omega) = \begin{bmatrix} -SX(0)E^{-1} \\ SX(l)E^{-1} \end{bmatrix} \quad (21b)$$

박벽보 구조의 고유진동수는 동적 강도행렬의 행렬식이 영이 되는 조건으로 산정할 수 있다.

$$\det |K(\omega)| = 0 \quad (22)$$

4. 수치해석

본 연구에서 제안한 수치해석 기법의 정확성을 검증하기 위하여 단순지지, 캔틸레버 박벽 보구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해나 ABAQUS 를 사용한 유한요소법의 결과와 비교한다.

4.1 편심축하중을 받는 단순지지 박벽보의 고유진동수

축력이 도심 외에 작용하는 비대칭, 단순지지 박벽보의 고유진동수와 좌굴하중의 해석해는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 이 경우의 변위함수는 아래와 같은 단순조화함수로 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
U_y &= A_n \sin(\lambda_n x_1) e^{i\omega t} \\
U_z &= B_n \sin(\lambda_n x_1) e^{i\omega t}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}
\end{aligned} \quad (23)$$

$$\omega_1 = C_n \sin(\lambda_n x_1) e^{i\omega t}$$

식 (23)을 식 (3)에 대입하여 정리하면, 아래와 같은 고유치문제가 구해진다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{11} &= EI_3 \lambda_n^4 - \rho I_3 \lambda_n^2 \omega^2 + ({}^oF_1 \lambda_n^2 - \rho A \omega^2) \\ K_{13} &= {}^oF_1 e_3 \lambda_n^2 - \rho A e_3 \omega^2 - {}^oM_2 \lambda_n^2 \\ K_{22} &= EI_2 \lambda_n^4 - \rho I_2 \lambda_n^2 \omega^2 + {}^oF_1 \lambda_n^2 - \rho A \omega^2 \\ K_{23} &= -{}^oF_1 e_2 \lambda_n^2 + \rho A e_2 \omega^2 - {}^oM_3 \lambda_n^2 \\ K_{31} &= {}^oF_1 e_3 \lambda_n^2 - \rho A e_3 \omega^2 - {}^oM_2 \lambda_n^2 \\ K_{32} &= -{}^oF_1 e_2 \lambda_n^2 + \rho A e_2 \omega^2 - {}^oM_3 \lambda_n^2 \\ K_{33} &= EI_\phi \lambda_n^4 - \rho I_\phi \lambda_n^2 \omega^2 + GJ \lambda_n^2 \\ &\quad - \rho A \omega^2 \beta_1 + {}^oM_p \lambda_n^2 \\ {}^oM_p &= \beta_1 {}^oF_1 + \beta_2 {}^oM_2 + \beta_3 {}^oM_3, \\ {}^oM_2 &= {}^oF_1 \bar{x}_3, \quad {}^oM_3 = -{}^oF_1 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

\bar{x}_2 와 \bar{x}_3 는 도심으로부터 축력 oF_1 이 작용하는 점까지의 편심거리이다. 식 (24)로부터 다음과 같은 특성방정식을 구할 수 있으며, 이로부터 비대칭 단면을 가지는 단순지지 박벽보의 고유진동수나 좌굴하중을 구할 수 있다.

$$\det \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

표 1은 아래와 같은 단면제원을 가지는 단순지지 비대칭 박벽보에 대하여 본 연구에서 제안한 방법과 식 (25)의 해석해를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 두 해석결과는 서로 정확히 일치함을 알 수 있다. 엄밀해(closed-form solution)는

양단이 단순지지된 보의 변위함수를 단순조화함수로 가정하여 운동방정식에 대입하여 얻어진 식 (24)의 고유치문제로부터 산정한 반면에, 본 연구의 해는 운동방정식, 힘-변위관계식의 엄밀한 관계식으로부터 동적강도행렬을 산정하고 단순지지 경계조건을 적용하는 수치적으로 엄밀한 산정 방법(numerically exact method)을 적용한 결과때문이라고 판단된다.

$$\begin{aligned} E &= 10000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G = 5000.0 \text{ N/cm}^2, \\ A &= 30.0 \text{ cm}^2, \quad J = 10.0 \text{ cm}^4, \quad L = 100.0 \text{ cm} \\ \rho &= 0.00785 \text{ kg/cm}^3, \quad I_2 = 100.0 \text{ cm}^4, \\ I_3 &= 800.0 \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 83750.0 \text{ cm}^6, \\ I_{2\phi} &= 600.0 \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi} = -8000.0 \text{ cm}^5, \\ \beta_1 &= 166, \quad \beta_2 = 5, \quad \beta_3 = -10 \end{aligned}$$

표 1. 단순지지된 보요소의 횡-비틀 고유진동수 (radian/sec)²

mode	zero axial force		${}^oF_1 = -200\text{N}$ at (\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-5, 7)	
	Present study	Closed-form solution	Present study	Closed-form solution
n=1	1.17287	1.17287	0.290794	0.290794
n=2	5.46156	5.46156	5.11979	5.11979
n=3	136.963	136.963	134.184	134.184

4.2 비대칭단면을 갖는 박벽 캔틸레버보의 고유진동수

일반적으로 비대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽보의 고유진동수에 대한 해석하는 이용할 수 없으므로 본 연구에 의한 결과와 5개 및 10개의 3차 Hermitian 다항식을 사용한 보요소⁽¹⁴⁾ 및 9절점 감차적분을 사용한 600개의 ABAQUS의 셸요소(S9R5)를 이용한 유한요소 해석결과와 비교한다. 캔틸레버보의 단면제원은 아래에 제시하였으며, 캔틸레버와 비대칭단면의 형상은

그림 4에 나타내었다.

$$E = 30000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G = 11500.0 \text{ N/cm}^2,$$

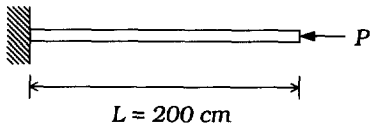
$$A = 8.0 \text{ cm}^2, \quad J = 0.6667 \text{ cm}^4, \quad L = 200 \text{ cm},$$

$$\rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3, \quad I_2 = 114.87204 \text{ cm}^4,$$

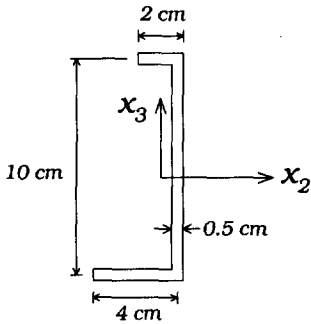
$$I_3 = 7.54463 \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 408.33314 \text{ cm}^6$$

$$I_{2\phi} = 182.41335 \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi} = 18.97565 \text{ cm}^5,$$

$$\beta_1 = 24.14957, \quad \beta_2 = 5.60731, \quad \beta_3 = 9.10787$$



(a) 축하중이 작용하는 캔틸레버 보



(b) 비대칭 채널 단면의 형상

그림 4. 비대칭 단면을 갖는 캔틸레버 보의 형상

표 2. 캔틸레버보의 힘-비틀 고유진동수 (radian/sec)²

mode	Present Study	5 Beam Element	10 Beam Element	ABAQUS
1	0.027	0.027	0.027	0.028
2	0.336	0.337	0.336	0.331
3	0.707	0.709	0.707	0.696
4	1.074	1.076	1.075	1.074
5	4.859	4.880	4.860	4.766
6	7.186	7.232	7.189	7.083
7	18.22	18.45	18.24	17.95
8	20.15	20.26	20.16	19.36
9	24.39	24.73	24.42	23.58
10	47.34	48.77	47.54	46.52

표 2는 본 연구의 엄밀한 동적강도행렬과 보요소 및 ABAQUS⁽¹¹⁾의 쉘요소를 이용한 해석 결과 가장 작은 10개의 고유진동수를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 해석결과가 비교적 서로 잘 일치함을 알 수 있으며, 본 연구에서는 동적강도행렬 산정시 전단변형 효과를 무시했기 때문에 ABAQUS 쉘요소를 사용한 유한요소해와 비교하여 10번째 모드에서 1.7% 정도 다소 큰 값을 나타내고 있다.

5. 결론

비대칭 단면을 가지는 직선 박벽보의 3차원 자유진동해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 동적강도행렬을 유도하였다. 요소강도행렬을 이용하여 단순지지, 캔틸레버 보구조에 대한 고유진동수와 좌굴하중을 산정하고, 해석해나 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다.

Hermitian다항식과 같은 형상함수를 도입하여 요소강도행렬을 산정하는 기존의 방법과는 달리, 본 연구에서 구한 요소강도행렬은 경계조건의 제약을 받지 않는다. 또한, 기존의 유한요소해석과 비교할 때, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

1. Vlasov, V. Z. *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961
2. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961

3. Argyris, J. H., Hilpert, O., Malejannakis, G. A. and Scharpf, D. W. 'On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistent v. w. approach', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1979, **20**, 105-131
4. Barsoum, R. W. and Gallagher, R. H. 'Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems', *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1970, **2**, pp335-352
5. Bradford, M. A. and Cuk, P. E. 'Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams', *J. Struct. Eng. ASCE* 1988, **114(5)**, 977-995
6. Chang, S. P., Kim, S. B. and Kim, M. Y. 'Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches', *J. Eng. Mech. ASCE* 1996, **112(9)**, 844-854
7. Kim, S. B. and Kim, M. Y. 'Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames', *Engineering Structures* 2000, **22(5)**, 446-458
8. Banerjee, J. R. 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements', *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1989, **28**, 1283-1298
9. Banerjee, J. R. and Williams, F. W. 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element', *Int. J. Solids Structures* 1994, **31(6)**, 749-762
10. Banerjee, J. R., Guo, S. and Howson, W. P. 'Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping', *Computers and Structures* 1996, **59(4)**, 613-621
11. ABAQUS, *User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992
12. Chen, W. F. and Atsuta, T., *Theory of beam-columns, Vol. 2, Space behavior and design*, McGraw-Hill, New York, 1977.
13. Microsoft, *Fortran PowerStation Programmer's Guide*, Microsoft Corporation, 1995
14. Kim MY, Chang SP, Kim SB. Spatial stability analysis of thin-walled space frames. *Int J Num Meth Engng* 1996; 39:499-525.

(접수일자 : 2001년 4월 13일)