

# 두 변수 탄성지반으로 지지된 불연속 변단면 수평 곡선부재의 자유진동

## Free Vibration of Stepped Horizontally Curved Members Supported by Two-Parameter Elastic Foundation

이 병 구<sup>1)</sup> · 이 태 은<sup>2)</sup> · 안 대 순<sup>3)</sup> · 김 무 영<sup>2)</sup>  
*Lee, Byoung Koo Lee, Tae Eun Ahn, Dae Soon Kim, Mu Young*

**요 약 :** 이 논문은 두 변수 탄성지반 위에 놓인 불연속 변단면 수평 곡선부재의 자유진동에 관한 연구이다. 회전관성과 전단변형효과를 고려하여 두 변수 탄성지반 위에 놓인 변단면 수평 곡선부재의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하였다. 변단면은 불연속 변단면으로 채택하였고, 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형 곡선보의 고유진동수를 산출하였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 곡선부재의 변수들 사이의 관계를 표 및 그림에 나타내었으며 진동형의 예를 그림에 나타내었다.

**ABSTRACT :** The main purpose of this paper is to present an analytical method for free vibration of stepped horizontally curved members on two-parameter elastic foundation. The ordinary differential equations governing the free vibration of such beams are derived as non-dimensional forms including the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing equations are solved numerically for the circular, parabolic, sinusoidal and elliptic curved beams with hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints. As the numerical results, the lowest four natural frequency parameters are presented as the functions of various non-dimensional system parameters. Also the typical mode shapes are presented.

**핵심용어 :** 수평 곡선부재, 자유진동, 진동형, 두 변수 탄성지반, 고유진동수, 회전관성, 전단변형

**KEYWORDS :** Curved Member, Free Vibration, Mode Shape, Two-Parameter Elastic Foundation, Natural Frequency, Rotatory Inertia, Shear Deformation

---

1) 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 교수

2) 원광대학교 대학원

3) 정회원, 신한건설 대표이사

---

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구 대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련된 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로 모형화될 수 있다.

최근까지 여러 가지 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 정·동적 거동에 관한 연구<sup>(1)~(11)</sup>가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구들에서 다루어지고 있는 대상 구조는 대부분 직선부재이다. 예를 들면 실제 구조인 파이프라인 등에는 곡선부재가 존재하며, 원형 띠기초, 유체 저장조 등은 주요 구조물의 기초로서 이용되고 있어<sup>(5)</sup> 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 대한 활발한 연구가 수행되어 많은 설계자료가 제시되어야 한다. Laura와 Maurizi<sup>(7)</sup>가 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재에 대한 유용한 연구결과들이 매우 부족한 실정이다. 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구는 구조 동역학 분야에서 기초적인 연구일 뿐만 아니라 곡선부재를 이용한 토목구조물의 설계자료를 제공할 수 있는 실질적인 연구이다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler<sup>(8)</sup>가 제안한 Winkler 지반모형이다. 이 모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 지반 문제들에서 이용되고 있다. Winkler 모형은 독립적인 스프링으로 구성되어 있기 때문에 하중 작용점의 처짐이 인접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 단점이 있다. 이러한 Winkler 모형의 문제점을 보완하기 위한 시도 즉 지반의 연속성을 고려하기 위하여 Pasternak가 Winkler 지반에 연속성 효과인 전단층 효과를 고려하여 두 개의 인자로 표현이 되는 탄성지반모형을 제안하였다.<sup>(9)</sup> 또한 단면을 변단면으로 하는 경우에 경

제적인 이점이 있을 뿐만 아니라 동하중을 받는 경우에 변단면을 사용하므로써 구조물의 자유진동을 제어할 수 있다.

이와 같은 연구배경으로부터 본 연구에서는 두 변수 탄성지반 위에 놓인 변단면 수평 곡선부재의 자유진동에 대한 수학적 모형을 전개하고, 해석모형으로부터 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 본 연구에서 변단면으로는 띠기초 등에서 자주 이용되는 불연속 변화단면 (stepped cross-section)을 채택하였고, 다양한 선형 및 단부조건에 따른 수평 곡선부재의 자유진동특성을 고찰하였다.

## 2. 수학적 모형

Fig. 1은 두 변수 탄성지반 위에 놓인 지간길이  $l$ , 수평높이  $h$ ,  $y=y(x)$ 의 임의선형을 갖는 수평 곡선부재의 기하학적 형상을 나타낸다. 이 곡선부재는 불연속 변단면을 갖고 있으며, 이 그림에서  $L_j$ 는  $j$ 번째 불연속 단면구간의 길이이며 모두  $t$ 개의 불연속 단면 구간을 갖고 있다.  $A_j$ ,  $I_j$ ,  $I_{\theta j}$ ,  $J_j$ 는 각각  $j$ 번째 구간의 단면적, 단면 2차모멘트, 단면 곡관성모멘트 및 단면 비틀림상수를 나타낸다. 이 곡선부재가 자유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다. 이 그림에서  $(x, y)$ 는 곡선부재의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며,  $\rho$  및  $\theta$ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및  $x$ 축과 곡률중심방향에 이루는 각도이며,  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\beta$  및  $\phi$ 는 각각 수직방향 변위, 휨에 의한 단면 회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이다. 한편  $R_v$ 와  $R_t$ 는 지반반력 성분으로 각각 단위길이당 수직반력과 비틀림반력이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 단면 회전각  $\psi$ 와  $\beta$ 를 수학적 모형에 고려함으로써 지베미분방정식에 회전관성과 전단변형 효과를 포함한다.

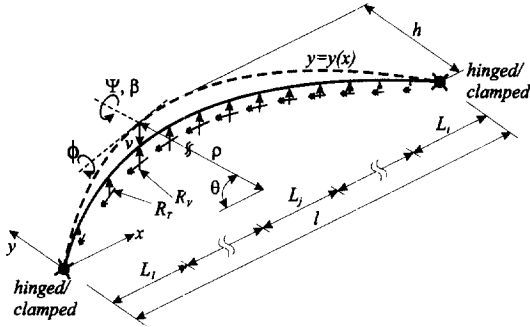


Fig. 1 Curved beam on two parameter elastic foundation and its variables

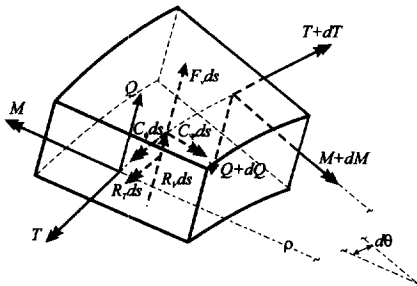


Fig. 2 Stress resultants, inertia forces and restoring forces

Fig. 2는 진동시 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고,  $F_v$ ,  $C_\psi$  및  $C_\phi$ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이다. 부재미소요소에 작용하는 합응력과 관성력 및 반력  $R_v$ ,  $R_t$ 사이의 동적 평형 방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho R_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi + \rho R_t = 0 \quad (3)$$

여기서 (')은  $d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

$j$ 번째 구간에서 부재 단면에 발생하는 합응력들  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 식 (4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$M = EI_j \rho^{-1} (\phi - \Psi') \quad (4)$$

$$T = GJ_j \rho^{-1} (\Psi + \phi') \quad (5)$$

$$Q = kA_j G \beta = kA_j G (\rho^{-1} v' - \Psi) \quad (6)$$

여기서  $E$ 와  $G$ 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수,  $k$ 는 단면형상에 따른 상수이다.

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향관성력  $F_v$ , 회전관성우력  $C_\psi$  및 비틀림관성우력  $C_\phi$ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -dA_j \omega^2 v \quad (7)$$

$$C_\psi = -dI_j \omega^2 \Psi \quad (8)$$

$$C_\phi = -dI_{\phi j} \omega^2 \phi \quad (9)$$

여기서  $d$ 은 부재 재료의 질량밀도,  $\omega$ 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식 (6)이 전단변형효과이고, 식 (8)이 회전관성효과이다. 식 (1)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 탄성지반 위에 놓인 수평 곡선부재의 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있으며, 단위길이당 수직반력  $R_v$ 와 비틀림반력  $R_t$ 는 연속성을 갖는 지반모형의 선택에 따라서 결정된다.

본 연구에서는 서론에서 언급한 바와 같이 연속성을 갖는 지반모형으로 두 개의 인자로 지반특성을 표현하는 두 변수 탄성지반 모형을 채택하였다. Fig. 3은 두 변수 탄성지반 위에 놓인 수평 곡선부재의 단면과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로  $B$ 는 지반과 접하는 단면폭,  $K$ 는 Winkler 지반계수,  $G_b$ 는 전단지반계수,  $r$ 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

부재와 지반이 접하는 면에서 압력과 처짐의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(3)</sup>

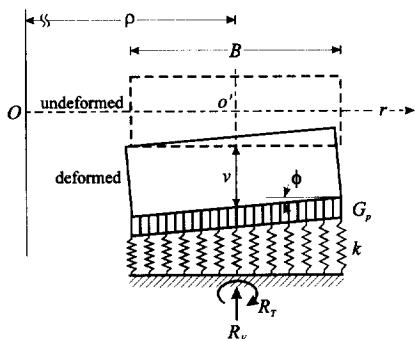


Fig. 3 Restoring forces of two-parameter elastic foundation

$$p(r, \theta) = Kz(r, \theta) - G_p \rho^{-2} d^2 z(r, \theta) / d\theta^2 \quad (10)$$

위의 식에서  $p(r, \theta)$ 는 곡선보축상 임의 단면에서 곡률중심방향의 압력변화이고  $z(r, \theta)$ 는 곡선보 단면을 따라 변화하는 면외방향 수직변위이다. 곡선보축상 임의점의 중심축에서 수직방향변위는  $v$ 이고,  $\phi$ 는 미소각이므로  $z(r, \theta)$ 는 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 이용하면 부재와 지반이 접하는 면에서 압력분포를 얻을 수 있으며, 이로부터 곡선부재 중심축에 대한 단위길이당 수직반력  $R_v$ 와 비틀림반력  $R_t$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = KBv - BG_p \rho^{-2} v'' \quad (12)$$

$$R_t = (1/12)B^3 (K\phi - G_p \rho^{-2} \theta'') \quad (13)$$

본 연구에서 불연속 변단면은 폭은  $B$ 로 일정하고  $j$ 구간에서 단면높이가  $H_j$ 인 이축 대칭단면인 직사각형 단면으로 정의하며, 띠기초 등에서 많이 사용하는 변단면 형식이다. 첫 번째 구간( $j=1$ )에서  $H_1$ 을 정의하기 위하여 다음의 무차원변수

식 (14)를 도입하고,  $j$ 번째 구간에서  $H_j$ 를 정의하기 위하여 다음의 무차원변수식 (15)를 도입한다.

$$m = H_1/B, \quad n = H_j/H_1 \quad (14,15)$$

구조물 거동에 대한 변수연구를 무차원으로 하는 경우에 광범위한 수치예제를 포함할 수 있으므로 지배 미분방정식을 무차원 형태로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad f = h/l \quad (16-18)$$

$$\zeta = \rho/l, \quad \eta = v/l, \quad \alpha_j = L_j/l \quad (19-21)$$

$$s = l/\sqrt{I_1/A_1}, \quad s_p = l/\sqrt{I_{p1}/A_1} \quad (22,23)$$

$$\epsilon = GJ_1/(EI_1), \quad \mu = kG/E \quad (24,25)$$

$$\lambda = Kl^5/(\pi^4 EI_1), \quad g = G_p l^3/(\pi^2 EI_1) \quad (26,27)$$

$$b = B/l \quad (28)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{dA_1/(EI_1)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (29)$$

여기서  $(\xi, \delta)$ 는 무차원 직교좌표계,  $f, \zeta, \eta, \alpha_j$ 는  $h, \rho, v, L_j$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것으로  $f$ 는 수평높이대 지간길이 비로 정의한다.  $s$ 와  $s_p$ 는 세장비 관련 변수,  $\epsilon$ 과  $\mu$ 는 강성변수와 전단변수,  $\lambda, g$  및  $b$ 는 무차원화한 Winkler지반계수, 전단지반계수 및 접촉면의 폭 비이며,  $c_i$ 는 무차원 고유진동수이고  $i$ 는 모드 번호이다.

식 (4), (5), (6)에서  $M', T', Q'$ 을 구하고, 이들 식과 합응력식 (4)~(6), 관성력식 (7)~(9), 및 지반반력식 (12), (13)을 동적 평형방정식 (1)~(3)에 대입하고 무차원 변수들인 식 (14)~(29)를 이용하면 Pasternak 지반 위에 놓인 수평 곡선부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1\eta' + (a_2 + a_3 c_i^2)\eta + a_4\Psi' \quad (30)$$

$$\Psi'' = a_5\Psi' + (a_6 + a_7 c_i^2)\Psi + a_8\phi' + a_9\eta' \quad (31)$$

$$\phi'' = a_{10}\phi' + (a_{11} + a_{12} c_i^2)\phi + a_{13}\Psi' + a_{10}\Psi \quad (32)$$

여기서,

$$a_1 = \zeta^{-1}\zeta'\mu s^2/(\mu s^2 + \pi^2 n^{-1}gb) \quad (33.1)$$

$$a_2 = \pi^4 \lambda b \zeta^2/(\mu n s^2 + \pi^2 gb) \quad (33.2)$$

$$a_3 = -\zeta^2/(\mu s^2 + \pi^2 n^{-1}gb) \quad (33.3)$$

$$a_4 = \zeta \mu s^2/(\mu s^2 + \pi^2 n^{-1}gb) \quad (33.4)$$

$$a_5 = \zeta^{-1}\zeta' \quad (33.5)$$

$$a_6 = \zeta^2 \mu n^{-2} s^2 + c_e \varepsilon \quad (33.6)$$

$$a_7 = -\zeta^2 s^{-2} \quad (33.7)$$

$$a_8 = 1 + c_e \varepsilon \quad (33.8)$$

$$a_9 = -\zeta \mu n^{-2} s^2 \quad (33.9)$$

$$a_{10} = 12\zeta^{-1}\zeta' c_e \varepsilon / (12c_e \varepsilon + \pi^2 n^{-3} g b^3) \quad (33.10)$$

$$a_{11} = (12 + \pi^4 \zeta^2 n^{-3} \lambda b^3) / (12c_e \varepsilon + \pi^2 n^{-3} g b^3) \quad (33.11)$$

$$a_{12} = -12\zeta^2 n^{-2} (1 + m^2)^{1/2} (1 + m^2 n^2)^{-1/2} \times s_p^{-2} / (12c_e \varepsilon + \pi^2 n^{-3} g b^3) \quad (33.12)$$

$$a_{13} = -12(1 + c_e \varepsilon) / (12c_e \varepsilon + \pi^2 n^{-3} g b^3) \quad (33.13)$$

윗 식에서  $c_e$ 는 식 (34.1)과 같이 정의되는 계수이며 식 (34.1)에서  $C_i(Z)$ 는 구형단면에서  $J_j = C_i(Z)BH_j^3$ 로 표시되는 상수이고 다음 식 (34.2)와 같이 정의되는  $Z(=B/H_j)$ 에 관한 함수이다.<sup>(10)</sup>

$$c_e = m^2 C_i(m^{-1}n^{-1})/C_i(n^{-1}) \quad (34.1)$$

$$C_i(Z) = 6.316 \times 10^{-2} + 1.105 \times 10^{-2}Z + 6.517 \times 10^{-4}Z^2 + 2.372 \times 10^{-5}Z^3 \quad (34.2)$$

본 연구에서 곡선부재의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (35)~(37) 및 (38)~(40)과 같다.

$$\eta = 0, \phi = 0, \Psi' = 0 \quad (35-37)$$

$$\eta = 0, \phi = 0, \Psi = 0 \quad (38-40)$$

### 3. 형상 함수

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수  $a_1 \sim a_{14}$ 에 포함되어 있는 형상함수  $\zeta$ ,  $\zeta'$ 가 정의되어야 한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. Fig. 2에서 주어진  $y = y(x)$ 의 선형식은 무차원 변수인 식 (16), (17)에 의하여 무차원 선형식  $\delta$  및 무차원 곡률반경  $\zeta$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \quad (41)$$

$$\zeta = \left( \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (42)$$

곡선보축상 임의점에서  $x$  축과 곡률중심방향이 이루는 각도  $\theta$ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{d\delta}{d\xi}\right) \quad (43)$$

나머지 곡률변화계수  $\xi'$ 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \quad (44)$$

이상의 식 (41)~(44)을 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화곡률항인  $\xi$ ,  $\xi'$ 를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선부재의 선형으로 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 곡선부재를 채택하였다.

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

이상에서 상미분방정식, 경계조건 및 형상 함수식이 유도되었으므로 주어진 곡선부재의 선형, 단부조건 및  $f$ ,  $s$ ,  $s_p$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $b$ 가 정의되면 무차원 고유진동수  $c_i$ 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고 고유치  $c_i$ 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법<sup>(11),(12)</sup>을 이용하였다.

이 연구의 수치해석 예에서 단면의 성질 및 재료의 성질로부터 결정되는  $s_p = m(1+m^2)^{-1/2}s$ ,  $\epsilon = 4.615 C_f(n^{-1})m^{-2}$ ,  $\mu = 0.35$ 로 결정하여 수치해석을 하였고, 나머지 무차원 변수  $f$ ,  $s$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $b$ 는 곡선부재의 변수연구에 이용하였다. 본 연구에서는  $m = 0.2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$  ( $t = 3$ ),  $n_3 = n_1 (=1)$ 로 하였으며 따라서 이 논문에서  $n = n_2$ 를 의미한다.

Table 1은 곡선부재의 단부조건별, 선형별로  $c_i$ 값을 비교한 것이다. 이 표에 보인 바와 같이 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건 순

서로  $c_i$  값이 큰 것을 알 수 있으며, 선형이 값에 미치는 영향은 크지 않고, 원호형 부재가 다른 부재에 비하여 작은 값을 보이고 있으나 제 2 모드의 경우에는 오히려 원호형 부재가 더 큰 값을 나타내고 있다.

Fig. 4~9는 곡선부재의 변수연구를 시행하고 이를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 수치해석에 사용한 선형, 단부조건 및 변수 값들을 그림 상단에 표시하였다. Fig. 4는  $c_i$ 와  $f$ 의 관계를 나타낸 것이다. 제 1, 2모드의 경우에  $f$ 값이 증가하면  $c_i$ 값은 증가하나 그 영향은 매우 작다.

Table 1 Comparisons of  $c_i$ \* by end constraint and type of curve

| End constraint    | Type of curve | Frequency parameter, $c_i$ |       |       |       |
|-------------------|---------------|----------------------------|-------|-------|-------|
|                   |               | $i=1$                      | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ |
| Hinged - hinged   | Circular      | 45.20                      | 57.70 | 69.45 | 97.39 |
|                   | Parabolic     | 47.14                      | 57.44 | 69.86 | 99.22 |
|                   | Sinusoidal    | 47.82                      | 57.40 | 69.89 | 99.75 |
|                   | Elliptic      | 46.25                      | 57.53 | 69.77 | 98.47 |
| Hinged - clamped  | Circular      | 45.37                      | 58.06 | 73.29 | 105.5 |
|                   | Parabolic     | 47.24                      | 57.93 | 73.54 | 106.2 |
|                   | Sinusoidal    | 47.91                      | 57.92 | 73.51 | 106.3 |
|                   | Elliptic      | 46.37                      | 57.97 | 73.52 | 106.0 |
| Clamped - clamped | Circular      | 45.54                      | 58.56 | 78.55 | 116.4 |
|                   | Parabolic     | 47.35                      | 58.59 | 78.28 | 117.7 |
|                   | Sinusoidal    | 48.00                      | 58.63 | 78.07 | 117.9 |
|                   | Elliptic      | 46.50                      | 58.57 | 78.49 | 117.2 |

\*  $f=0.2$ ,  $n=2$ ,  $s=50$ ,  $\lambda=2000$ ,  $g=100$ ,  $b=0.02$

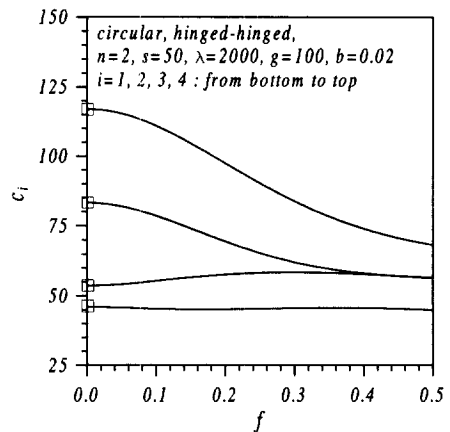


Fig. 4  $c_i$  versus  $f$  curves

한편 제 3, 4모드의 경우에는  $c_i$  값은 감소하고 있다. 제 2, 3모드의 경우에  $f$  값이 약 0.4 이상에서는  $c_i$  값이 매우 근접한 값들을 나타낸다. 또한  $f$  값이 0이면 직선 보이므로 □로 표시된  $c_i$  값들은 직선 보의  $c_i$  값들임을 알 수 있다.

Fig. 5는  $c_i$ 와  $s$ 의 관계를 나타낸 것이며  $s$  값이 증가함에 따라서  $c_i$  값도 증가함을 알 수 있다. 특히  $s$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 수평선에 수렴하며, 따라서 제 1모드의 경우에는  $s$  값이 약 50이상에서는  $c_i$  값에 미치는 영향이 매우 작은 것을 알 수 있다.

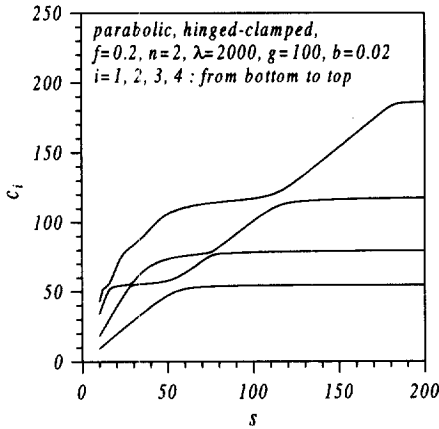


Fig. 5  $c_i$  versus  $s$  curves

Fig. 6은  $c_i$ 와  $\lambda$ 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이  $\lambda$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가한다. 그러나 제 1모드의 경우에는  $\lambda$  값이 약 2000이상에서는 그 영향이 매우 작은 것을 알 수 있다. 이 그림에서 제 2, 3모드가 서로 만나는 △로 표시한  $(f, c_i)$  점이 존재하며 이  $f$  값에서  $c_i$  값은 중복근을 갖게 되어 한 개의 고유진동수에서 두 개의 진동형이 가능하다.

Fig. 7은  $c_i$ 와  $g$ 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이  $g$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가하며 그 증가율은 저차모드에서

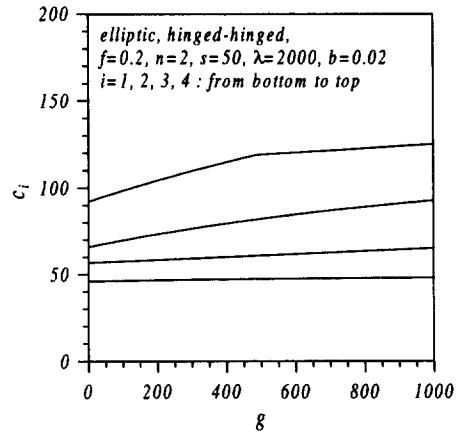


Fig. 7  $c_i$  versus  $g$  curves

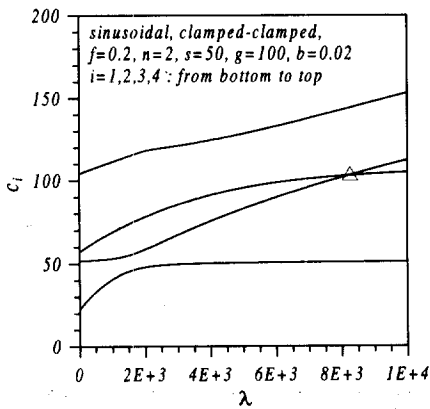


Fig. 6  $c_i$  versus  $\lambda$  curves

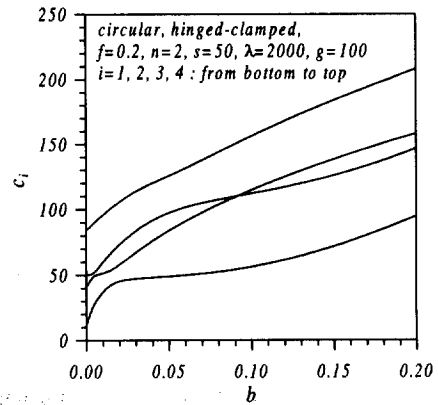


Fig. 8  $c_i$  versus  $b$  curves

보다 고차모드에서 그 영향력이 더 크다.

Fig. 8은  $c_i$ 와  $b$ 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이  $b$ 값이 증가함에 따라  $c_i$ 값은 증가한다. 이 그림에서도 Fig. 6에서와 같이 중복근을 갖는  $b$ 값이 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는  $c_i$ 와  $n$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 보는 바와 같이  $n$ 값이 증가함에 따라  $c_i$ 값은 일반적으로 증가하나  $n$ 값의 일부 구간에서는  $c_i$ 값이 오히려 감소하고 있다.

Fig. 10은 자유진동하는 곡선부재의 제 1, 2 모드의 진동형(mode shape)을 보여주며, 이 그림을 통하여 각 모드별로 상대진폭의 크기, 최대 진폭의 위치 및 무변위위치 등을 알 수 있다.

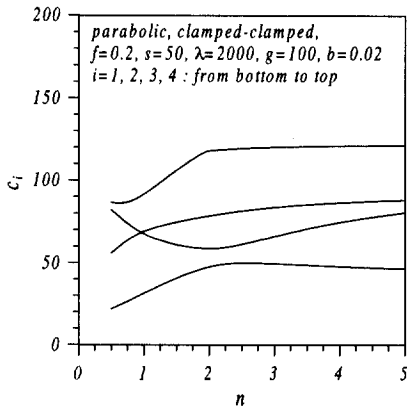


Fig. 9  $c_i$  versus  $n$  curves

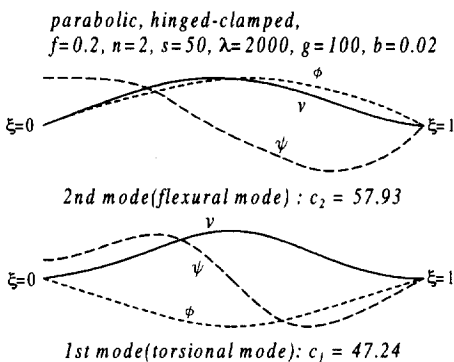


Fig. 10 example of mode shapes

## 5. 결론

이 논문은 두 변수 탄성지반 위에 놓인 불연속 변단면 수평 곡선부재의 자유진동에 관한 연구이다. 불연속 변단면을 단면높이가 불연속적으로 변화하는 구형단면으로 채택하여 곡선부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였다. 곡선부재의 선형으로는 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 4가지 선형을 채택하였으며, 단부조건으로는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 3가지 단부조건을 채택하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 상미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta법을 이용하고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi법을 이용하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 곡선부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계 및 진동형을 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 구조공학 및 기초공학 분야에서 그 유용성을 기대할 수 있다.

## 참고 문헌

1. E. Volterra, 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.20, pp.227-237.
2. T.M. Wang and J.E. Stephens, 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol.51, pp. 149-155.
3. M.S. Issa, 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol.127, pp.291-301.
4. C. Franciosi and A. Masi, 1993, "Free



- Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," Computer & Structures, Vol.47, pp.419-426.
5. M.A. De Rosa, 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.19, pp.1-4.
  6. 이병구, 오상진, 이재만, 1998, "탄성지반 위에 놓인 곡선형 Timoshenko 보의 자유진동," 한국전산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, pp.273-280.
  7. P.A.A. Laura and M.J. Maurizi, 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," The Shock and Vibration Digest, Vol.19, pp.6-9.
  8. E. Winkler, 1867, Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Domonocus.
  9. A.P.S. Selvaduari, 1979, Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier.
  10. E. Voltera and J.H. Gaines, 1971, Advanced Strength of Materials, Prentice-Hall.
  11. 모정만, 1997, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 박사학위 논문, 원광대학교 대학원.
  12. S.J. Oh, B.K. Lee and I.W. Lee, 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solid and Structures, Vol.37, No.6, pp.4871-4891.

(접수일자 : 2001년 7월 23일)