

論文2001-38CI-6-4

블록 최적화 기법을 이용한 퍼지 제어기의 안정도 해석

(Stability Analysis of Fuzzy Control Systems via Convex Optimization)

金殷泰*, 李義振*

(Euntai Kim and Heejin Lee)

요 약

본 논문에서는 새로운 방식의 싱글톤 형태 퍼지 제어기의 안정도 해석 방식을 제안한다. 본 논문에서 제안되는 방식은 기존의 논문에서 찾을 수 있는 해석적 방식이 아니라 최적화 알고리즘을 이용한 수치적 접근 방식이다. 본 알고리즘은 크게 이차계획법과 선형 행렬 부등식으로 이루어져 있다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통해 타당성을 확인한다.

Abstract

In this paper, numerical stability analysis methodology for the singleton-type linguistic fuzzy control systems is proposed. The proposed stability analysis is not the analytical method but the numerical method using the convex optimization of Quadratic Programming (QP) and Linear Matrix Inequalities (LMI). Finally, the applicability of the suggested methodology is highlighted via simulation results.

I. 서 론

지난 10년간 퍼지 논리는 공학 및 자연과학 분야에서 중요한 연구 분야로 대두되었고 특히 제어 분야에서는 모델이 불확실한 경우나 언어적 제어가 가능한 분야를 중심으로 기존의 제어를 대체하는 방식으로 각광을 받고 있고 많은 응용예가 발표되고 있다.

그러나 이러한 실제적 응용의 예와 달리 이론 분야에서는 아직도 많은 문제가 남아있다. 퍼지 제어기의 안정도에 대한 해석은 이 같은 문제 중 가장 대표적이

고 중요한 문제로 퍼지 제어기의 안정도에 대하여 지금까지 보고된 결과는 크게 다음의 두 종류로 나눌 수 있다.

(i) TS(Takagi and Sugeno-type) 퍼지 제어기의 안정도 해석

(ii) 싱글톤 퍼지 제어기의 안정도 해석

전자의 경우, Tanaka등은 TS 퍼지 제어기의 안정도에 대하여 많은 연구 결과를 보고하였고, 최근에는 여러 다른 제어 학자들이 비슷한 문제를 다루게 되었다 [1-3].

후자의 경우, Wang이^[4]에서 적응 싱글톤 퍼지 제어기의 안정도를 해석하였고^[5]의 논문은 싱글톤 슬라이딩 퍼지 제어기에 대하여 안정도를 다루고 있다. 그러나 TS 퍼지 제어기의 안정도 해석과 비교할 때 일반적인 싱글톤 퍼지 제어기의 안정도에 대한 연구는 아직도 미비한 것이 사실이다.

따라서 본 논문에서는 싱글톤 퍼지 제어기에 대한

* 正會員, 國立 韓京大學校 制御計測工學科
(Dept. of Control and Instrumentation Engr
Hankyong National Univ.)

接受日字:1999年7月5日, 수정완료일:2001年10月9日

안정도 해석 방식을 새로이 제안하도록 한다. 제안한 방식은 해석적 방식이 아닌 수치적 방식으로 이차 계획법(Quadratic Programming, QP)과 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequalities, LMI)을 결합하여 퍼지 제어 시스템의 안정도를 해석한다. 제안한 방식은 기본적으로 다음의 세 가지 단계로 구성되어 있다.

- 1 단계 : 싱글톤 퍼지 제어기를 구역별로 등가의 양선형 (bilinear) 시스템으로 변환한다.
- 2 단계 : 등가의 양선형 시스템은 이차계획법에 의해 다형시스템(polytopic system)으로 변형된다.
- 3 단계 : 변형된 다형시스템의 안정도를 선형 행렬 부등식을 이용하여 결정한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 싱글톤 퍼지 제어기를 간단히 설명하고 3장에서는 퍼지 제어기를 등가의 양선형(bilinear) 시스템으로 변환한다. 4장과 5장에서는 퍼지 제어기 안정도 해석 방식을 설명하며 6장에는 제안한 알고리즘의 타당성을 모의 실험을 통하여 확인하도록 한다. 참고적으로 본 논문에서 일반 스칼라 변수는 굵지 않은 일반글씨체(non-boldface)로 표기하였고 벡터나 행렬 변수는 굵은 글씨체(boldface)로 표시하였다.

II. 싱글톤 퍼지 제어기와 퍼지 기저 함수

본 절에서는 편의상 2-입력 1-출력의 퍼지 제어기를 생각한다.

$$R^{nm} : \text{If } x_1 \text{ is } A_1^n(x_1) \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^m(x_2), \text{ then } u \text{ is } u^{nm} \quad (1)$$

($n=1, \dots, p$ 이고 $m=1, \dots, q$).

이때 싱글톤 퍼지화기와 추론의 T 논을 이용하면 퍼지 추론의 결과는 다음의 식(2)으로 주어진다.

$$u = Fuz(x) = Fuz(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^q \left\{ \frac{A_1^n(x_1)A_2^m(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)} \right\} u^{nm} = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^q \Omega^{nm}(x_1, x_2) u^{nm} \quad (2)$$

여기서 $\Omega^{nm}(x_1, x_2) = \frac{A_1^n(x_1)A_2^m(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)}$ 퍼지 기저함수

(371)

이다. 안정도 해석을 용이하게 하기 위하여 전진부 소속함수는 그림 1과 같은 비모순적 삼각형 함수를 이용하도록 한다.

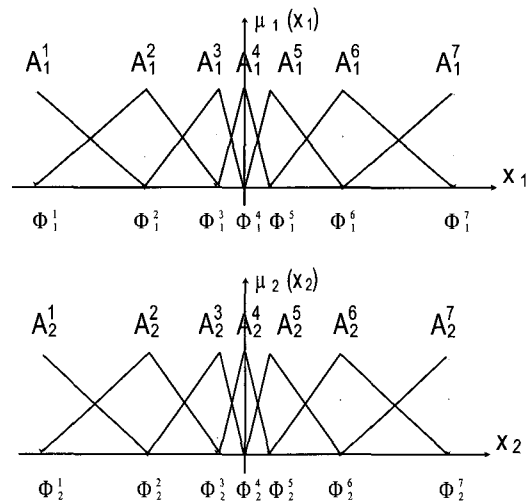


그림 1. 전진부 소속함수
Fig. 1. Premise membership functions.

이 경우 한 쌍의 데이터 (x_1, x_2) 에 대하여 4개의 퍼지 규칙만이 활성화되며 퍼지 시스템은 다음의 식 (3)과 같이 정리된다.

$$u = Fuz(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^q \Omega^{nm}(x_1, x_2) u^{nm} = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^q A_1^n(x_1) A_2^m(x_2) u^{nm} \quad (3)$$

III. 문제의 구성

$\phi_1^n \leq x_1 \leq \phi_1^{n+1}$, $\phi_2^m \leq x_2 \leq \phi_2^{m+1}$ 으로 나타나는 영역(편의상 (n, m) 영역이라 부른다)에서의 퍼지 제어기 출력은 다음의 보조정리에 의하여 양선형 식으로 표현될 수 있다.

보조정리 1^[6]

입력이 $\phi_1^n \leq x_1 \leq \phi_1^{n+1}$, $\phi_2^m \leq x_2 \leq \phi_2^{m+1}$ 인 경우 식(3)의 퍼지 제어기로부터의 출력은 다음과 같은 양선형의 특성을 갖는다.

$$Fuz(x_1, x_2) = C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \quad (4)$$

여기서 $C_{12}^{nm}, C_1^{nm}, C_2^{nm}, C_0^{nm}$ 는 $\phi_1^n, \phi_1^{n+1}, \phi_2^m, \phi_2^{m+1}, u^{nm}$ 등에 의존하는 상수이다. ■

(n, m) 영역에서 퍼지 제어기의 출력을 안정도 해석을 위하여 다음과 같이 영역별 섹터 유계(sector-bound)한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{nm} \mathbf{x} \leq \text{Fuz}(x_1, x_2) = C_{12}^{nm} x_1 x_2 \\ + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \leq \overline{\mathbf{K}}^{nm} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $\mathbf{K}^{nm} \equiv [k_1^{nm} \ k_2^{nm}]$, $\overline{\mathbf{K}}^{nm} \equiv [\overline{k}_1^{nm} \ \overline{k}_2^{nm}]$ 이다. 식(5)에서 \mathbf{K}^{nm} 과 $\overline{\mathbf{K}}^{nm}$ 를 유도하는 문제는 식 (6)의 $\gamma_1^{nm}, \gamma_2^{nm}, \overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}$ 를 유도하는 문제와 같은 것이다.

$$\begin{aligned} \gamma_1^{nm} x_1 + \gamma_2^{nm} x_2 \leq C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_0^{nm} \\ \leq \overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

즉, $\gamma_1^{nm}, \gamma_2^{nm}, \overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}$ 로부터 쉽게 \mathbf{K}^{nm} 과 $\overline{\mathbf{K}}^{nm}$ 을 유도할 수 있다. 이때 식 (6)은 x_1 과 x_2 가 유계되어 있기 때문에 무수히 많은 $\gamma_1^{nm}, \gamma_2^{nm}, \overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}$ 가 존재 가능하다. 그중 가장 비보수적인(unconservative) 안정도 해석을 위해서는 가장 엄격한 $\gamma_1^{nm}, \gamma_2^{nm}, \overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}$ 을 필요로 하게 된다. 다음 장에서는 이 같은 영역별 섹터 유계값을 구하는 문제를 이차계획법의 형태로 바꾸어 수치적으로 해석하도록 한다.

IV. 이차계획법에 의한 퍼지 시스템의 다형 시스템 변환

영역별로 가장 엄격한 섹터 유계값인 $\gamma_1^{nm}, \gamma_2^{nm}, \overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}$ 을 구하기 위하여 우선 다음의 정리를 필요로 한다.

정리 1 [증명은 부록 A]

다음의 함수를 생각한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, y) = C_x x + C_y y - C_{xy} xy - C_0 \quad \text{for } x \leq x \leq \overline{x} \\ \text{and } y \leq y \leq \overline{y}. \end{aligned}$$

(i) 영역 $x \leq \forall x_0 \leq \overline{x}, y \leq \forall y_0 \leq \overline{y}$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\mathcal{J}(x_0, y_0) = C_x x_0 + C_y y_0 - C_{xy} x_0 y_0 - C_0 \geq 0$$

$$\text{iff } \mathcal{J}(x, y) = C_x x + C_y y - C_{xy} xy - C_0 \geq 0$$

$$\mathcal{J}(x, \overline{y}) = C_x x + C_y \overline{y} - C_{xy} x \overline{y} - C_0 \geq 0$$

$$\mathcal{J}(\overline{x}, y) = C_x \overline{x} + C_y y - C_{xy} \overline{x} y - C_0 \geq 0$$

$$\mathcal{J}(\overline{x}, \overline{y}) = C_x \overline{x} + C_y \overline{y} - C_{xy} \overline{x} \overline{y} - C_0 \geq 0$$

(ii) 영역 $x \leq \forall x_0 \leq \overline{x}, y \leq \forall y_0 \leq \overline{y}$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\mathcal{J}(x_0, y_0) \leq 0$$

$$\text{iff } \mathcal{J}(x, y) \leq 0, \mathcal{J}(x, \overline{y}) \leq 0, \mathcal{J}(\overline{x}, y) \leq 0 \text{ and } \mathcal{J}(\overline{x}, \overline{y}) \leq 0. \quad \blacksquare$$

A. 엄격한 상한 섹터 유계 $\overline{\gamma}_1^{nm}$ 과 $\overline{\gamma}_2^{nm}$ 를 구하는 문제

가장 엄격한 상한 섹터 유계 $\overline{\gamma}_1^{nm}$ and $\overline{\gamma}_2^{nm}$ 를 구하는 문제는 다음의 조건 (C1)과 (C2)를 구하는 문제로 해석할 수 있다.

(C1) $\overline{\gamma}_1^{nm}$ 과 $\overline{\gamma}_2^{nm}$ 는 다음의 부등식을 만족하도록 한다.

$$\begin{aligned} \overline{f}^{nm}(x_1, x_2) \equiv (\overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2) - (C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_0^{nm}) \geq 0 \\ \text{for } \phi_1^n \leq \forall x_1 \leq \phi_1^{n+1} \text{ and } \phi_2^m \leq \forall x_2 \leq \phi_2^{m+1}. \end{aligned}$$

$$(C2) [\overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}] = \arg \min \overline{F}^{nm}(\overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm})$$

$$= \arg \min \frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^m}^{\phi_2^{m+1}} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \{\overline{f}^{nm}(x_1, x_2)\}^2 dx_1 dx_2$$

$$= \arg \min \frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^m}^{\phi_2^{m+1}} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \left\{ (\overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2) - (C_{12}^{nm} x_1 + C_0^{nm}) \right\}^2 dx_1 dx_2 \quad \text{여기서 } \overline{F}^{nm}(\overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}) \equiv$$

$$\frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^m}^{\phi_2^{m+1}} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \{\overline{f}^{nm}(x_1, x_2)\}^2 dx_1 dx_2.$$

정리 1의 (i)을 이용하면 조건 (C1)은 다음의 조건 (C3)과 동가라 할 수 있다.

$$(C3)$$

$$\overline{f}^{nm}(\phi_1^n, \phi_2^m) = (\overline{\gamma}_1^{nm} \phi_1^n + \overline{\gamma}_2^{nm} \phi_2^m) - (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^m + C_0^{nm}) \geq 0$$

$$\overline{f}^{nm}(\phi_1^n, \phi_2^{m+1}) = (\overline{\gamma}_1^{nm} \phi_1^n + \overline{\gamma}_2^{nm} \phi_2^{m+1}) - (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{m+1} + C_0^{nm}) \geq 0$$

$$\overline{f}^{nm}(\phi_1^{n+1}, \phi_2^m) = (\overline{\gamma}_1^{nm} \phi_1^{n+1} + \overline{\gamma}_2^{nm} \phi_2^m) - (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^m + C_0^{nm}) \geq 0$$

$$\overline{f}^{nm}(\phi_1^{n+1}, \phi_2^{m+1}) = (\overline{\gamma}_1^{nm} \phi_1^{n+1} + \overline{\gamma}_2^{nm} \phi_2^{m+1}) - (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{m+1} + C_0^{nm}) \geq 0$$

따라서 (C2)과 (C3)을 이용하면 가장 엄격한 $\overline{\gamma}_1^{nm}$,

$\bar{\gamma}_2^{nm}$ 을 구하는 문제는 다음의 최적화 문제로 해석할 수 있다.

$$[\bar{\gamma}_1^{nm}, \bar{\gamma}_2^{nm}] = \arg \min \bar{F}^{nm}(\bar{\gamma}_1^{nm}, \bar{\gamma}_2^{nm}) \quad (7)$$

$$= \arg \min \frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^n}^{\phi_2^{n+1}} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \left\{ (\bar{\gamma}_1^{nm} x_1 + \bar{\gamma}_2^{nm} x_2) - (C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_0^{nm}) \right\}^2 dx_1 dx_2$$

subject to

$$\begin{aligned} (\bar{\gamma}_1^{nm} \phi_1^n + \bar{\gamma}_2^{nm} \phi_2^n) - (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^n + C_0^{nm}) &\geq 0, \\ (\bar{\gamma}_1^{nm} \phi_1^n + \bar{\gamma}_2^{nm} \phi_2^{n+1}) - (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) &\geq 0, \\ (\bar{\gamma}_1^{nm} \phi_1^{n+1} + \bar{\gamma}_2^{nm} \phi_2^n) - (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^n + C_0^{nm}) &\geq 0, \\ (\bar{\gamma}_1^{nm} \phi_1^{n+1} + \bar{\gamma}_2^{nm} \phi_2^{n+1}) - (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) &\geq 0. \end{aligned}$$

이 최적화 문제에서 목적함수인 식 (7)은 다음과 같은 2차 함수의 형으로 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{F}^{nm}(\bar{\gamma}_1^{nm}, \bar{\gamma}_2^{nm}) &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{D}_{11}^{nm} \cdot (\bar{\gamma}_1^{nm})^2 + \bar{D}_{22}^{nm} \cdot (\bar{\gamma}_2^{nm})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \bar{D}_{12}^{nm} \bar{\gamma}_1^{nm} \bar{\gamma}_2^{nm} + 2 \bar{D}_1^{nm} \bar{\gamma}_1^{nm} + 2 \bar{D}_2^{nm} \bar{\gamma}_2^{nm} + 2 \bar{D}_0^{nm} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_1^{nm} \quad \bar{\gamma}_2^{nm}) \begin{pmatrix} \bar{D}_{11}^{nm} & \bar{D}_{12}^{nm} \\ \bar{D}_{12}^{nm} & \bar{D}_{22}^{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{nm} \\ \bar{\gamma}_2^{nm} \end{pmatrix} \\ &\quad + (\bar{D}_1^{nm} \quad \bar{D}_2^{nm}) \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{nm} \\ \bar{\gamma}_2^{nm} \end{pmatrix} + \bar{D}_0^{nm} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\gamma}^{nm})^T \bar{H}^{nm} \bar{\gamma}^{nm} + (\bar{C}^{nm})^T \bar{\gamma}^{nm} + \bar{D}_0^{nm} \end{aligned}$$

여기서

$$\bar{\gamma}^{nm} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{nm} \\ \bar{\gamma}_2^{nm} \end{pmatrix}, \quad \bar{H}^{nm} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11}^{nm} & \bar{D}_{12}^{nm} \\ \bar{D}_{12}^{nm} & \bar{D}_{22}^{nm} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}^{nm} = \begin{pmatrix} \bar{D}_1^{nm} \\ \bar{D}_2^{nm} \end{pmatrix}$$

\bar{D}_{11}^{nm} , \bar{D}_{22}^{nm} , \bar{D}_{12}^{nm} , \bar{D}_1^{nm} , \bar{D}_2^{nm} , \bar{D}_0^{nm} 값은 부록 B에 있다. 식 (7)의 최적화 제약 조건은 다음의 벡터 부등식으로 표현될 수 있다.

$$\bar{A}^{nm} \bar{\gamma}^{nm} \leq \bar{b}^{nm}$$

$$\text{여기서 } \bar{A}^{nm} = \begin{pmatrix} -\phi_1^n & -\phi_2^n \\ -\phi_1^n & -\phi_2^{n+1} \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^n \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^{nm} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{nm} \\ \bar{\gamma}_2^{nm} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\bar{b}^{nm} = \begin{pmatrix} -(C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^n + C_0^{nm}) \\ -(C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) \\ -(C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^n + C_0^{nm}) \\ -(C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) \end{pmatrix}$$

즉 상한 섹터 유계 $\bar{\gamma}_1^{nm}$ 과 $\bar{\gamma}_2^{nm}$ 을 유도하는 문제는 다음의 이차계획법 문제로 변형된다^[7].

$$\begin{aligned} [\bar{\gamma}_1^{nm}, \bar{\gamma}_2^{nm}] &= \arg \min \frac{1}{2} (\bar{\gamma}^{nm})^T \bar{H}^{nm} \bar{\gamma}^{nm} + (\bar{C}^{nm})^T \bar{\gamma}^{nm} \\ \text{subject to } \bar{A}^{nm} \bar{\gamma}^{nm} &\leq \bar{b}^{nm}, \end{aligned}$$

여기서 \bar{H}^{nm} 과 \bar{C}^{nm} 는 부록 B에 주어진다.

B. 엄격한 하한 섹터 유계 $\underline{\gamma}_1^{nm}$ 과 $\underline{\gamma}_2^{nm}$ 를 구하는 문제

엄격한 상한 섹터 유계 $\bar{\gamma}_1^{nm}$ and $\bar{\gamma}_2^{nm}$ 를 구한 것과 비슷한 방식으로 하한 섹터 유계를 수치적 최적화 기법에 의해 유도할 수 있다. 이 경우 문제는 다음의 이차계획법 문제로 표현된다.

$$\begin{aligned} [\underline{\gamma}_1^{nm}, \underline{\gamma}_2^{nm}] &= \arg \min \frac{1}{2} (\underline{\gamma}^{nm})^T \underline{H}^{nm} \underline{\gamma}^{nm} + (\underline{C}^{nm})^T \underline{\gamma}^{nm} \\ \text{subject to } \underline{A}^{nm} \underline{\gamma}^{nm} &\leq \underline{b}^{nm}, \end{aligned}$$

여기서 $\underline{\gamma}^{nm} = (\underline{\gamma}_1^{nm} \quad \underline{\gamma}_2^{nm})^T$, $\underline{H}^{nm} = \underline{H}^{nm}$,

$$\underline{C}^{nm} = \underline{C}^{nm},$$

$$\underline{A}^{nm} = \begin{pmatrix} \phi_1^n & \phi_2^n \\ \phi_1^n & \phi_2^{n+1} \\ \phi_1^{n+1} & \phi_2^n \\ \phi_1^{n+1} & \phi_2^{n+1} \end{pmatrix} \text{이고}$$

$$\underline{b}^{nm} = \begin{pmatrix} (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^n + C_0^{nm}) \\ (C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) \\ (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^n + C_0^{nm}) \\ (C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{n+1} + C_0^{nm}) \end{pmatrix} \text{이다.}$$

V. 선형 행렬 부등식을 이용한 퍼지 제어 시스템의 안정도 해석

본 장에서는 다음의 다형 선형 시스템(Polytopic Linear Differential Inclusions, PLDI)의 안정도에 대한 다음의 정리를 사용한다^[8].

정리 2. 다음의 다형 선형 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x, \\ A(t) &= \text{Co}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_L) \end{aligned} \quad (9)$$

이때 식 (10)의 부등식이 성립하면 식 (9)의 다형 선형 시스템은 이차적으로 안정(quadratically stable)하다.

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (i=1, \dots, L) \quad (10)$$

여기서 $\text{Co}(\cdot)$ 는 컨벡스헐(convex hull)을 나타낸다. ■

4장에서 언급한 바와 같이 싱글톤형 퍼지 제어기는 (n, m) 영역에서 다음의 식 (11)과 같이 영역별 섹터 유계된다.

$$\underline{K}^{nm} x \leq \text{Fuz}(x_1, x_2) \leq \overline{K}^{nm} x \quad (11)$$

이때 퍼지 제어기는 다음의 다형시스템으로 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Fuz}(x) &= \text{Co}\{\overline{K}^{11}, \overline{K}^{12}, \dots, \overline{K}^{(p-1)(q-1)}, \\ &\quad \underline{K}^{11}, \underline{K}^{12}, \dots, \underline{K}^{(p-1)(q-1)}\}x \end{aligned} \quad (12)$$

제어 대상이 다음의 식(13)과 같을 때 식 (12)의 퍼지 제어기로 구성된 시스템과 결합된 페루프 시스템은 식 (14)로 표현된다.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + B \text{Fuz}(x) = \\ &\text{Co}\{(A + B \overline{K}^{11}), (A + B \overline{K}^{12}), \dots, (A + B \\ &\quad \overline{K}^{(p-1)(q-1)}), (A + B \underline{K}^{11}), (A + B \underline{K}^{12}), \\ &\quad \dots, (A + B \underline{K}^{(p-1)(q-1)})\}x \end{aligned} \quad (14)$$

정리 2를 식 (14)의 다형시스템에 직접 적용하여 안정도를 판정하기 전에 정점(vertex)을 미리 구해내는 것이 수치최적화의 부담을 줄일 수 있다. 편의상 다형 퍼지 시스템의 선택된 정점을 다음의 식으로 나타내기로 한다.

$$K_1, K_2, \dots, K_l, \quad l \leq 2(p-1)(q-1)$$

이때 페루프 시스템은 다음과 같이 주어진다

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \\ &\text{Co}\{(A + B K_1), (A + B K_2), \dots, (A + B K_l)\}x. \end{aligned}$$

정리 2에 의하여 다음의 선형 행렬 부등식이 해가 존재한다면 식 (1)로 구성된 퍼지 제어기로 제어되는 퍼지 시스템은 이차적으로 안정하다.

VI. 컴퓨터 모의실험

본 절에서는 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 수치적 안정도 해석 알고리즘의 타당성을 확인한다. 본 장의 제어과제는 모터의 로우터를 원하는 위치로 회전하는 것이다. 제어대상은 Electrocraft Corporation사의 E530 직류 모터로 하도록 한다^[9].

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s} \quad (15)$$

여기서

θ (로우터 위치); e_a (아마추어 전압); $K_i=10.02$ oz-in./A;

$K_b = 7.41\text{V}/1000$ rpm = 0.0708 V/rad/s; $R_a = 2.64\Omega$

$L_a = 3.39$ mH; $J_m = 0.0038$ oz-in.-s²

$B_m = 0.1$ oz-in./1000rpm = 9.55×10^{-4} oz-in./rad/s

안정도 해석을 위하여 식 (15)의 E530 시스템을 (16)의 상태 변수 형태로 표현하도록 한다.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (16)$$

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T = [e, \dot{e}, \ddot{e}]^T, u = e_a$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(K_b K_i + R_a B_m)}{L_a J_m} & -\frac{(R_a J_m + B_m L_a)}{L_a J_m} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_i}{L_a J_m} \end{pmatrix}$$

여기서 $e = \theta - r$ 는 제어 오차를 나타내고 r 은 정해진 제어 기준점이다. 퍼지 제어기는 그림 2와 같이 사람의 경험에 의해 위치 오차와 그 미분값을 이용하여 설계된다.

퍼지 제어기는 표 1과 같고 전전부와 후전부는 그림 3, 표 2, 3과 같다.

앞에서 전술한 3 단계의 방식에 따라 플랜트 (16)이 표 1, 2, 3의 퍼지 제어기로 제어될 때의 안정도를 해석

하도록 한다. 1단계에서 설계된 퍼지 제어기를 영역별 양선형 시스템으로 변환하고 2 단계에서 이차 계획법에 의하여 다형 시스템으로 퍼지 제어기를 변환한다. 이 때 파라미터의 정점(vertices)은 다음과 같다.

$$K_3 = [-0.4000 \quad -0.1500 \quad 0],$$

$$K_1 = [-1.6000 \quad -0.0500 \quad 0]$$

$$K_2 = [-0.4000 \quad -0.0500 \quad 0],$$

$$K_4 = [-0.4000 \quad -0.2000 \quad 0]$$

이제 전체 폐루프 시스템은 다음의 다형 선형 시스템으로 표현된다.

$$\frac{dx}{dt} = Co\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}x$$

여기서 $G_i = A + B K_i, i=1,2,\dots,5$

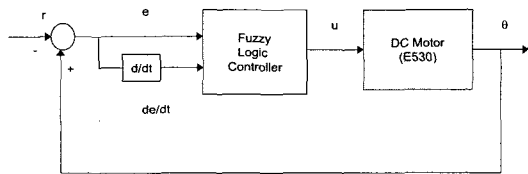


그림 2. 퍼지 제어기로 제어하는 직류 모터
Fig. 2. The DC motor controlled by the FLC.

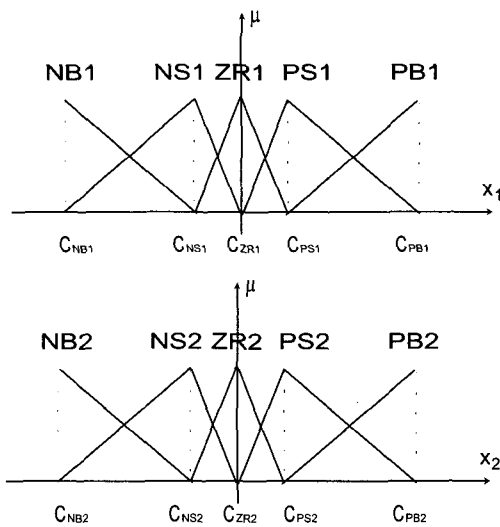


그림 3. 전건부 소속 함수
Fig. 3. The premise membership functions.

선형 행렬 부등식을 이용하면 식 (17)의 양한정 행렬 P를 찾을 수 있고 퍼지 제어 시스템은 이차적으로 안정하다.

표 1. 퍼지 제어기의 규칙표

Table 1. Rule table of FLC.

e	$NB1$	$NS1$	$ZR1$	$PS1$	$PB1$
$PB2$	U_{ZR}	U_{NS}	U_{NM}	U_{NB}	U_{NVB}
$PS2$	U_{PS}	U_{ZR}	U_{NS}	U_{NB}	U_{NB}
$ZR2$	U_{PM}	U_{PS}	U_{ZR}	U_{NS}	U_{NM}
$NS2$	U_{PB}	U_{PB}	U_{PS}	U_{ZR}	U_{NS}
$NB2$	U_{PVB}	U_{PB}	U_{PM}	U_{PS}	U_{ZR}

표 2. 퍼지 제어기의 전건부 파라미터

Table 2. Premise parameters of FLC.

x_1	C_{NB1}	C_{NS1}	C_{ZR1}	C_{PS1}	C_{PB1}
	-5	-2.5	0	2.5	5
x_2	C_{NB2}	C_{NS2}	C_{ZR2}	C_{PS2}	C_{PB2}
	-40	-20	0	20	40

표 3. 퍼지 제어기의 후건부 파라미터

Table 3. Consequent parameters of FLC.

u	U_{NVB}	U_{NB}	U_{NM}	U_{NS}	U_{ZR}	U_{PS}	U_{PM}	U_{PB}	U_{PVB}
	-9	-5	-2	-1	0	1	2	5	9

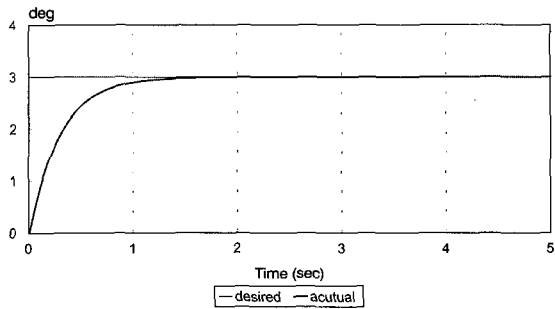


그림 4. 기준값 $r(t)=3$ 에 대한 모터 시스템의 응답
Fig. 4. Response of the motor system for the reference $r(t)=3$.

$$P = \begin{pmatrix} 36.589804317 & 0.218488988 & 0.000382688 \\ 0.218488988 & 0.033959599 & 0.000078815 \\ 0.000382688 & 0.000078815 & 0.00000569 \end{pmatrix} \quad (17)$$

그림 4는 제어 기준점이 $r=3$ (rad)일 때의 제어 결과이다.

VII. 결 론

본 논문에서는 싱글톤 퍼지 제어기에 대하여 수치적으로 안정도를 해석하는 방식을 제안하였고 직류 모터 시스템의 퍼지 제어기에 이를 적용하여 타당성을 확인하였다. 그러나 제안된 방식은 이미 만들어진 퍼지 제어기의 안정도 판정에는 우수한 성능을 보이는 반면 안정도가 보장되는 퍼지 제어기를 자동으로 생성하지는 못하는 단점을 갖는다. 이 같은 안정도가 보장되는 퍼지 제어기의 자동 생성은 추후과제로 남겨둔다.

부록 A

(\Rightarrow) 가정에서 명확하므로 생략

(\Leftarrow)

$x_0 = \underline{\alpha}x + \bar{\alpha}\bar{x}$, $y_0 = \underline{\beta}y + \bar{\beta}\bar{y}$ 로 놓는다. 여기서 $\underline{\alpha} + \bar{\alpha} = 1$, $\underline{\beta} + \bar{\beta} = 1$ 이고 $\bar{\alpha} \geq 0$, $\underline{\alpha} \geq 0$, $\bar{\beta} \geq 0$, $\underline{\beta} \geq 0$. 이 경우

$$\begin{aligned} \Upsilon(x_0, y_0) &= C_x x_0 + C_y y_0 - C_{xy} x_0 y_0 - C_0 \\ &= C_x (\underline{\alpha}x + \bar{\alpha}\bar{x}) + C_y (\underline{\beta}y + \bar{\beta}\bar{y}) - C_{xy} (\underline{\alpha}x + \bar{\alpha}\bar{x}) \\ &\quad (\underline{\beta}y + \bar{\beta}\bar{y}) - C_0 \\ &= \underline{\alpha}\underline{\beta} (C_x x + C_y y - C_{xy} xy - C_0) + \underline{\alpha}\bar{\beta} (C_x x \\ &\quad + C_y \bar{y} - C_{xy} x \bar{y} - C_0) + \bar{\alpha}\underline{\beta} (C_x \bar{x} + C_y y - C_{xy} \bar{x} y \\ &\quad - C_0) + \bar{\alpha}\bar{\beta} (C_x \bar{x} + C_y \bar{y} - C_{xy} \bar{x} \bar{y} - C_0) \\ &= \underline{\alpha}\underline{\beta} \Upsilon(x, y) + \underline{\alpha}\bar{\beta} \Upsilon(x, \bar{y}) + \bar{\alpha}\underline{\beta} \Upsilon(\bar{x}, y) + \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ &\quad \Upsilon(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

가정에서 $\Upsilon(x, y) \geq 0$, $\Upsilon(x, \bar{y}) \geq 0$, $\Upsilon(\bar{x}, y) \geq 0$, $\Upsilon(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ 이므로 $\Upsilon(x_0, y_0) \geq 0$

부록 B

$$\begin{aligned} &\overline{F}^{nm}(\overline{\gamma}_1^{nm}, \overline{\gamma}_2^{nm}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} \left\{ (\overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2) - (C_{12}^{nm} x_1 x_2 \right. \\ &\quad \left. + C_0^{nm}) \right\}^2 dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \overline{D}_{11}^{nm} \cdot (\overline{\gamma}_1^{nm})^2 + \overline{D}_{22}^{nm} \cdot (\overline{\gamma}_2^{nm})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \overline{D}_{12}^{nm} \overline{\gamma}_1^{nm} \overline{\gamma}_2^{nm} + 2 \overline{D}_1^{nm} \overline{\gamma}_1^{nm} + 2 \overline{D}_2^{nm} \overline{\gamma}_2^{nm} \right. \\ &\quad \left. + 2 \overline{D}_0^{nm} \right\} \end{aligned}$$

여기서

$$\overline{D}_{11}^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} x_1^2 dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{3} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^3 - (\underline{\phi}_1^n)^3 \} \{ \overline{\phi}_2^{m+1} - \underline{\phi}_2^m \}$$

$$\overline{D}_{22}^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} x_2^2 dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{3} \{ \overline{\phi}_1^{n+1} - \underline{\phi}_1^n \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^3 - (\underline{\phi}_2^m)^3 \}$$

$$\overline{D}_{12}^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} x_1 x_2 dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{4} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^2 - (\underline{\phi}_1^n)^2 \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^2 - (\underline{\phi}_2^m)^2 \}$$

$$\overline{D}_1^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} (-C_{12}^{nm} x_1^2 x_2 - C_0^{nm} x_1) dx_1 dx_2$$

$$= -\frac{1}{6} C_{12}^{nm} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^3 - (\underline{\phi}_1^n)^3 \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^2 - (\underline{\phi}_2^m)^2 \}$$

$$- \frac{1}{2} C_0^{nm} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^2 - (\underline{\phi}_1^n)^2 \} \{ \overline{\phi}_2^{m+1} - \underline{\phi}_2^m \}$$

$$\overline{D}_2^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} (-C_{12}^{nm} x_1 x_2^2 - C_0^{nm} x_2) dx_1 dx_2$$

$$= -\frac{1}{6} C_{12}^{nm} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^2 - (\underline{\phi}_1^n)^2 \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^3 - (\underline{\phi}_2^m)^3 \}$$

$$- \frac{1}{2} C_0^{nm} \{ \overline{\phi}_1^{n+1} - \underline{\phi}_1^n \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^2 - (\underline{\phi}_2^m)^2 \}$$

$$\overline{D}_0^{nm} = \int_{x_2=\underline{\phi}_2^{n+1}}^{\overline{\phi}_2^{n+1}} \int_{x_1=\underline{\phi}_1^{n+1}}^{\overline{\phi}_1^{n+1}} \left\{ \frac{1}{2} (C_{12}^{nm})^2 x_1^2 x_2^2 + C_{12}^{nm} C_0^{nm} x_1 x_2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (C_0^{nm})^2 \right\} dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{18} (C_{12}^{nm})^2 \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^3 - (\underline{\phi}_1^n)^3 \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^3 - (\underline{\phi}_2^m)^3 \}$$

$$+ \frac{1}{4} C_{12}^{nm} C_0^{nm} \{ (\overline{\phi}_1^{n+1})^2 - (\underline{\phi}_1^n)^2 \} \{ (\overline{\phi}_2^{m+1})^2 - (\underline{\phi}_2^m)^2 \}$$

$$+ \frac{1}{2} (C_0^{nm})^2 \{ \overline{\phi}_1^{n+1} - \underline{\phi}_1^n \} \{ \overline{\phi}_2^{m+1} - \underline{\phi}_2^m \}$$

참 고 문 헌

- [1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," Fuzzy Sets and Systems, vol. 45, No. 2, pp 135~156, 1992.
- [2] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 2, No. 2, pp 119~134, May 1994.
- [3] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, pp. 2469~2471,

Dec. 1994.

[4] L. X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 1, no. 2, pp 146~155, Feb 1993.

[5] C. Y. Su and Y. Stepanenko, "Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 2, no. 4, pp 285~294, Nov. 1994.

[6] E. Kim, H. Lee and M. Park, "Limit-cycle prediction of a fuzzy control system based on describing function method," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol 8, no. 1, pp. 11~22, 2000.

[7] P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, Practical Optimization, Academic Press : London, 1981.

[8] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM : Philadelphia, 1994.

[9] R. Klafter, T. Chmielewski and M. Negin, Robotic Engineering : An Integrated Approach, NJ : Prentice-Hall, Inc., 1989.

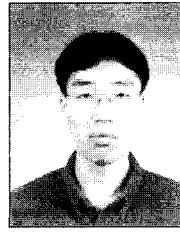
저 자 소 개



金 殷 泰(正會員)

1992년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사, 전체수석). 1994년 2월 : 연세대학교 전자공학과 석사과정 졸업(공학석사). 1999년 2월 : 연세대학교 전자공학과 박사과정 졸업(공학박사). 1998년~현재 :

IEEE TFS, IEEE SMC, IEEE CAS, FSS등에서 심의위원으로 활동중, 1999년~현재 : 국립한경대학교 제어계측공학과 조교수. <주관심분야> 소프트웨어(인공지능, 퍼지, 신경회로망, 진화이론), 로봇틱스와 메카트로닉스, 윈도우프로그램(C/C++/Visual C++), Java등 인터넷 프로그램



李 羲 振(正會員)

1987년 : 연세대학교 전자공학과 졸업. 1989년 : 연세대학교 전자공학과 석사과정 졸업. 1989년~1993년 : (주)대우통신 종합연구소 연구원. 1993년~1995년 : (주)에스원 종합연구소 연구원. 1998년 : 연세대학교 전자공학과 박사과정 졸업. 1998년~현재 : 국립한경대학교 제어계측공학과 교수. <주관심분야> 로봇틱스, 강인제어, 지능제어 등임

국립한경대학교 제어계측공학과 교수. <주관심분야> 로봇틱스, 강인제어, 지능제어 등임