

論文2001-38CI-3-1

순방향 2층 신경망의 연결강도 분포 특성 분석 및 연결강도 초기화에 적용

(Analysis of Weight Distribution of Feedforward Two-Layer Neural Networks and its Application to Weight Initialization)

高 纘 穢 *, 朴 玟 用 *, 洪 大 植 *, 李 哲 熙 *

(Jinwook Go, Mignon Park, Daesik Hong, and Chulhee Lee)

요 약

본 논문에서는 순방향 2층 신경망의 연결강도(weight) 분포 특성을 분석한다. 일반적으로 신경망의 학습은 많은 시간이 소요되지만, 현재 학습 알고리즘으로는 새로운 문제가 주어질 때 이전에 수행된 학습 정보의 도움 없이 새로이 학습과정을 수행해야 하는 문제점이 있다. 본 논문에서는, 신경망의 학습을 주어진 문제를 해결할 수 있는 연결강도 공간(weight space)상의 한 점(point)을 찾는 과정으로 이해하고, 연결강도 공간에서 이러한 해(solution)가 되는 점들의 분포를 조사하여 이를 새로운 문제의 학습 시 초기 연결강도의 선정에 적용하는 방법을 제안한다. 제안된 연결강도 분포를 이용한 초기화 방법을 패턴분류 문제에 적용하였고, 기존의 무작위 초기화보다 학습 성능을 향상시킬 수 있음을 확인하였다.

Abstract

In this paper, we investigate and analyze weight distribution of feedforward two-layer neural networks with a hidden layer in order to understand and improve time-consuming training process of neural networks. Generally, when a new problem is presented, neural networks have to be trained again without any benefit from the previous training process. In order to address this problem, training process is viewed as finding a solution point in the weight space and the distribution of solution points is analyzed. Then we propose to initialize neural networks using the information of the distribution of the solution points. Experimental results show that the proposed initialization using the weight distribution provides a better performance than the conventional one.

I. 서 론

순방향 다층 신경망(feedforward multi-layer neural

* 正會員, 延世大學校 電氣·電子工學科

(Dept. Electrical and Electronic Eng., Yonsei University)

※ 본 연구는 한국과학재단 연구비 지원으로 이루어졌습니다.

接受日字:2000年6月19日, 수정완료일:2001年4月9日

networks)은 패턴 인식, 통신 시스템, 동적 시스템 제어와 같은 많은 비선형 신호 처리 문제에 성공적으로 적용되었다^[1]. 특히, 순방향 다층 신경망의 학습을 위한 대표적 알고리즘인 오류 역전파(error backpropagation) 알고리즘은 신경망 관련 연구를 활성화시키는 계기를 마련하였다. 오류 역전파 알고리즘은 출력층(output layer)의 각 뉴런의 자승 오차의 합인 오차함수(error function)의 크기를 감소시키도록 뉴런간의 연결강도를 변경시키는 학습 방법이다. 여기서 신경망의 모든 연결강도를 구성 요소로 갖는 벡터를 연결강도 벡터(weight

vector)라고 정의하면, 연결강도 벡터는 연결강도 공간(weight space)상의 한 점(point)으로 생각할 수 있다. 이러한 관점에서 신경망의 학습은 주어진 문제를 해결할 수 있는 연결강도 공간(weight space)상의 한 점(point)을 찾는 과정으로 이해할 수 있다. 연결강도 공간에서 주어진 문제의 해(solution)가 될 수 있는 연결강도 점(weight point)들이 밀집되어 분포된 영역을 해영역(solution region)으로 정의하면 신경망의 학습은 해영역의 외부 영역에서 추측된 초기 연결강도 점을 해영역의 내부로 이동시키는 과정으로 생각할 수 있다^[2]. 이러한 해영역은 신경망의 입력 패턴이 동일하다 할지라도 다른 초기 연결강도의 선정에 따라 연결강도 공간 상에 다양하게 분포될 수 있다. 이는 동일한 문제에 대해서 신경망을 다른 초기 연결강도로부터 학습시킬 때 출력 패턴은 유사하지만 최종적으로 얻는 연결강도 벡터는 서로 다른 경우가 발생할 수 있음을 의미한다.

순방향 다층 신경망의 학습 과정(training process)과 분류 능력(classification capability)의 분석을 위한 연구는 80년대 후반부터 폭넓게 이루어졌다^[3-6]. Mirchandani는 입력 차원, 은닉층 뉴런의 개수, 그리고 은닉층의 각 뉴런의 hyperplane에 의해 형성될 수 있는 입력 공간의 분할가능영역의 개수간의 관계식을 유도하였다^[3]. 이 관계식으로부터 2층 신경망 구조에서 좋은 학습 성능을 보장할 수 있는 입력 학습 패턴의 하한(lower bound) 개수를 결정하는데 적용하였다. Makhoul은 입력 공간에 형성된 가상 분할영역들(virtual cells)의 개념을 도입하여 1개의 은닉층을 갖는 2층 신경망이 연결되지 않은 결정 영역(decision region)을 형성할 수 있음을 보였고, 이로부터 하나의 은닉층을 갖는 신경망 구조만으로 입력 공간의 범위가 한정되어 있다면 임의의 결정 경계(arbitrary decision boundary)를 형성할 수 있음을 증명하였다^[4]. Gibson은 다층 신경망이 형성하는 결정 영역에 대한 기하학적 특성 분석을 통해 다층 신경망의 분류 능력을 조사하였다^[5]. 또한, Bellido는 역전파 알고리즘으로 학습된 신경망의 연결강도가 정규 분포(normal distribution) 특성을 갖는지를 조사하기 위해 12가지의 상이한 문제들로부터 얻은 480개의 연결강도 분포에 대해 chi-square threshold test를 적용하였다^[6]. 그 결과, 실험에 사용된 대부분의 연결강도 분포가 정규 분포 특성을 나타내지 않음을 확인하였다. 본 논문에서는 신경망의 전체 연결강도로 구성되는 연결강도 벡터(연결강도 점)들이 연결강도 공간에서 차지

하는 영역, 즉 해영역의 분포 특성을 조사한다. 이러한 해영역의 분포를 조사하기 위해 동일한 문제를 서로 다른 초기 연결강도로부터 학습시켜 얻어진 최종 연결강도 벡터들을 조사하였다. 그 결과, 해영역은 연결강도 공간의 여러 위치에서 다양한 형태를 갖고 무리(group)를 지어 분포되는 특징을 보여주었다. 이러한 특징은 서로 다른 문제의 해영역들이 서로 인접할 수 있는 가능성을 제시해준다. 본 논문에서는 이러한 가능성을 토대로 이전에 학습된 문제의 연결강도 분포를 새로운 문제의 초기 연결강도 선정에 이용하는 실험을 수행하였고, 기존의 무작위 초기화와 학습 성능을 비교하여 향상된 결과를 얻을 수 있었다. 결론적으로, 이전의 학습 결과는 신경망의 지식으로 저장될 수 있고, 또한 새로운 문제의 학습 성능을 향상시킬 수 있음을 확인하였다.

본 논문의 구성은 제Ⅱ단락에서 연결강도 공간에서 해영역의 분포 특성을 조사, 분석하고 제Ⅲ단락에서는 이러한 해영역의 분포 특성을 신경망의 사전 지식으로 적용 가능한지를 실험을 통해 분석한다. 마지막으로 제Ⅳ단락에서 결론을 맺는다.

Ⅱ. 연결강도 공간에서의 연결강도 분포

본 논문에서는 해영역의 분포를 이해하기 위해 2차원의 2클래스 패턴분류 문제를 조사하였다. 사용한 신경망의 구조는 2개의 입력층 뉴런, 3개의 은닉층 뉴런, 2개의 출력층(output layer) 뉴런, 그리고 2개의 바이어스(bias)로 구성된다. 전체 연결강도 개수는 17개이고, 학습 과정을 17차원 연결강도 공간에서 하나의 연결강도 점(17차원 연결강도 벡터)을 찾는 과정으로 생각할 수 있다. 입력 패턴으로는 실제 원격 탐사(remote sensing)된 데이터로부터 추정된 통계(statistics)로부터 정규 분포를 가정하여 발생된 데이터를 사용하였다^[7]. 일반적으로 신경망의 입력 데이터는 비례 축소(scaling)와 위치 이동(translation)을 통해 한정된 범위 내의 값으로 변환함으로써 수렴을 용이하게 한다. 본 논문에서는 모든 입력 데이터를 [-2, 2] 범위의 값으로 변환하여 사용하였다. 클래스 결정 규칙은 가장 큰 출력값을 갖는 출력층 뉴런에 해당하는 클래스를 선택하는 것이고, 학습은 학습률(learning rate)과 모멘텀율(momentum rate)을 각각 0.1과 0.5로 설정한 오류 역전파 알고리즘을 사용하여 수행되었다^[8].

본 논문에서는 모두 50개의 2클래스 패턴분류 문제의 해영역의 분포를 조사하기 위해, 각 패턴분류 문제에 대해 1000개의 서로 다른 초기 연결강도 벡터로부터 신경망을 학습시켜 1000개의 최종 연결강도 벡터를 구하였다. 초기 연결강도는 [-0.5, 0.5] 범위의 값을 무작위로 선택하였고, 5000번 학습 후에 신경망의 분류 정확도와 가우시안 최대우도(Gaussian ML) 분류기의 차이가 2% 이하인 연결강도만을 해연결강도(solution weights)로 저장하였다. 가우시안 최대우도 분류기는 정규 분포를 갖는 데이터에 대해 최적의 분류 성능을 보여주고, 분류 정확도 차이 2%는 실험을 통해 선정한 값으로서 국부 최소(local minima)의 판단 기준으로 사용하였다. 본 논문에서는 하나의 패턴분류 문제에 대해 다른 초기 연결강도 벡터로부터 학습되어 구한 1000개의 해(solution) 연결강도 벡터들의 집합을 해집합(solution set)으로 정의한다.

1. 해집합의 고유치와 행렬식

해집합의 분포 특성을 분석하기 위해 각 해집합으로부터 추정된 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유치(eigenvalue)와 행렬식(determinant)을 조사하였다. 그림 1은 서로 다른 50개 해집합들의 행렬식의 크기를 보여준다. 행렬식의 크기는 고유치(eigenvalue)의 곱과 같고, 연결강도 그룹이 분포한 영역의 전체 체적(volume)에 비례한다. 만약 연결강도 벡터가 N차원이면 N개의 고유치를 얻을 수 있고, 행렬식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$DET = \prod_{i=1}^N \lambda_i$$

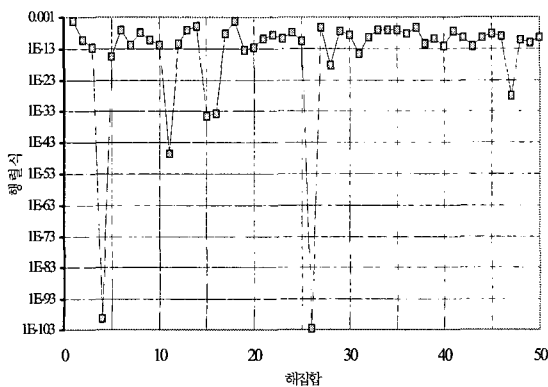


그림 1. 50개 해집합의 행렬식
Fig. 1. Determinant of the 50 solution sets.

그림 1에서 해집합의 행렬식의 크기가 현저하게 차이를 보임을 알 수 있다. 이는 해집합들이 분포된 영역의 실제 체적이 많은 차이가 있음을 의미한다. 예를 들어, 가장 큰 행렬식과 가장 작은 행렬식은 각각 약 10^{-5} 과 10^{-103} 이고, 두 행렬식간의 비율은 10^{98} 이다.

표 1. 행렬식이 가장 큰 해집합의 고유치의 크기, 비율, 그리고 누적값

Table 1. Eigenvalues of the solution set with the largest determinant along with proportions and accumulations.

	Eigenvalue	Proportion(%)	Accumulation(%)
1	232.42	61.0	61.0
2	54.17	14.2	75.2
3	49.06	12.9	88.1
4	17.16	4.5	92.6
5	15.02	3.9	96.6
6	7.72	2.0	98.6
7	2.61	0.7	99.3
8	1.51	0.4	99.7
9	0.84	0.2	99.9
10	0.19	0.0	100.0
11	0.07	0.0	100.0
12	0.03	0.0	100.0
13	0.02	0.0	100.0
14	0.01	0.0	100.0
15	0.01	0.0	100.0
16	0.01	0.0	100.0
17	0.00	0.0	100.0

표 2. 행렬식이 가장 작은 해집합의 고유치의 크기, 비율, 그리고 누적값

Table 2. Eigenvalues of the solution set with the smallest determinant along with proportions and accumulations.

	Eigenvalue	Proportion(%)	Accumulation(%)
1	786.34	84.0	84.0
2	124.27	13.3	97.3
3	13.78	1.5	98.8
4	4.94	0.5	99.3
5	3.63	0.4	99.7
6	1.64	0.2	99.9
7	0.82	0.1	99.9
8	0.29	0.0	100.0
9	0.22	0.0	100.0
10	0.00	0.0	100.0
11	0.00	0.0	100.0
12	0.00	0.0	100.0
13	0.00	0.0	100.0
14	0.00	0.0	100.0
15	0.00	0.0	100.0
16	0.00	0.0	100.0
17	0.00	0.0	100.0

이러한 특징은 해집합의 고유치의 크기 비교를 통해 설명된다. 표 1과 2는 그림 1에서 보여준 행렬식 중 가

장 크기가 큰 행렬식과 가장 작은 행렬식을 갖는 해집합으로부터 추정된 공분산 행렬의 고유치의 크기, 전체 고유치의 크기에 대한 비율(proportion), 그리고 누적값(accumulation)을 크기 순으로 나열한 것을 보여준다. 표 1에서 행렬식이 가장 큰 해집합의 고유치의 크기는 가장 큰 7개가 전체 에너지의 99% 이상을 차지하고 있다. 반면, 표 2의 해집합은 전체 에너지의 99% 이상을 가장 큰 5개가 차지하고 있고, 95% 이상을 가장 큰 2개의 고유치가 차지하고 있다. 이는 해집합에 속하는 대부분의 연결강도 점(연결강도 벡터)들이 가장 큰 몇 개의 고유치에 대한 고유벡터(eigenvector) 방향을 따라 길게 늘어선(elongated) 분포를 갖고 있고, 나머지 고유벡터 방향으로 거의 변동이 없음을 의미한다. 만약 해집합이 정규 분포 특성을 갖는다고 가정하면, 그 해집합은 중심이 해집합의 평균 벡터(mean vector)에 위치하고, 고유벡터 방향의 축(axis)을 따라 고유치의 제곱근에 비례하여 길게 늘어선 hyperellipsoid 형태의 분포를 갖게 될 것이다. 그림 2는 이러한 분포 특성을 2차원 연결강도 공간상에서 예로 보여준다. M은 해집합의 평균 벡터를 나타내고, λ 와 ϕ 는 각각 해집합으로부터 추정된 공분산 행렬의 고유치와 고유벡터를 나타낸다.

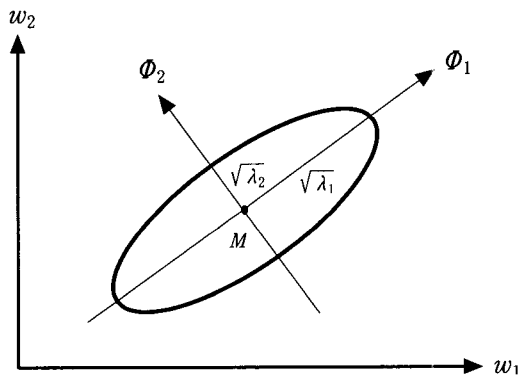


그림 2. 공분산 행렬의 고유치와 고유벡터
Fig. 2. Eigenvalue and eigenvector of the covariance matrix.

그림 3은 표 2의 해집합에 속하는 17차원 연결강도 벡터들을 가장 큰 2개의 고유치들에 대한 고유벡터들의 평면으로 매핑(mapping)시킨 결과를 보여준다. 표 2에서 알 수 있듯이, 해집합에 속하는 연결강도 벡터들은 대부분 가장 큰 2개의 고유치들에 대한 고유벡터들

의 평면을 따라 분포되므로 그림 3은 17차원 공간에서의 연결강도 그룹의 분포를 대략적으로 보여주고 있다. 그림 3으로부터 동일한 문제에 대해 신경망이 유사한 출력 패턴을 제공할지라도 연결강도 벡터는 서로 다른 경우가 발생할 수 있고, 이는 동일한 문제에 대한 해 영역이 연결강도 공간상의 여러 위치에 분포됨을 의미한다.

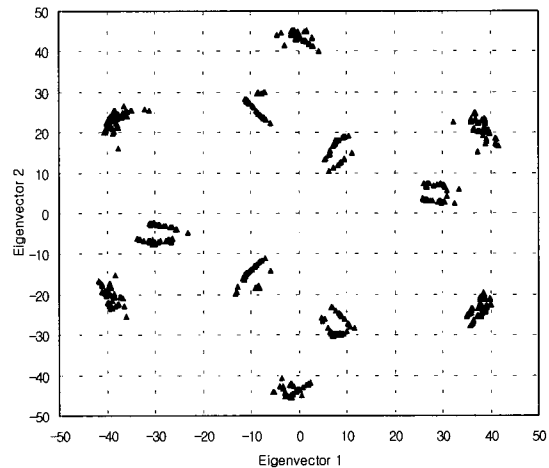


그림 3. 해집합의 분포 특성
Fig. 3. The distribution of the solution set.

2. 연결강도 공간에서의 해영역 분포

그림 3에서 볼 수 있듯이 해집합은 무리를 지어 해영역을 이루는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는, 해집합 내의 균일 해영역을 동질해집합(homogeneous solution set)으로 정의하고, 동질해집합의 분포를 조사하기 위해 Euclidean 거리를 이용한 클러스터링(clustering)을 적용하였다. 클러스터링 과정에 앞서 한가지 고려할 사항은 신경망의 은닉층 뉴런들의 순서를 조합(combination)함으로써 하나의 연결강도 점을 동일한 출력값을 나타내는 6개의 서로 다른 연결강도 점들(연결강도 벡터들)로 나타낼 수 있다는 것이다. 그림 4는 신경망의 은닉층 뉴런간의 순서 조합에 의해 하나의 연결강도 벡터로부터 동일한 출력값을 갖는 5개의 연결강도 벡터들의 생성 과정을 보여준다. 이것은 17차원 연결강도 공간에서 6개(은닉층 뉴런 개수의 계승(factorial))의 동등한(equivalent) 영역들이 존재함을 가리키고, 효율적인 클러스터링을 위해 연결강도 점들을 같은 영역에 속하도록 할 필요가 있다. 이를 위해 하나의 연결강도 벡터의 조합으로부터 얻은 6개의 연결강

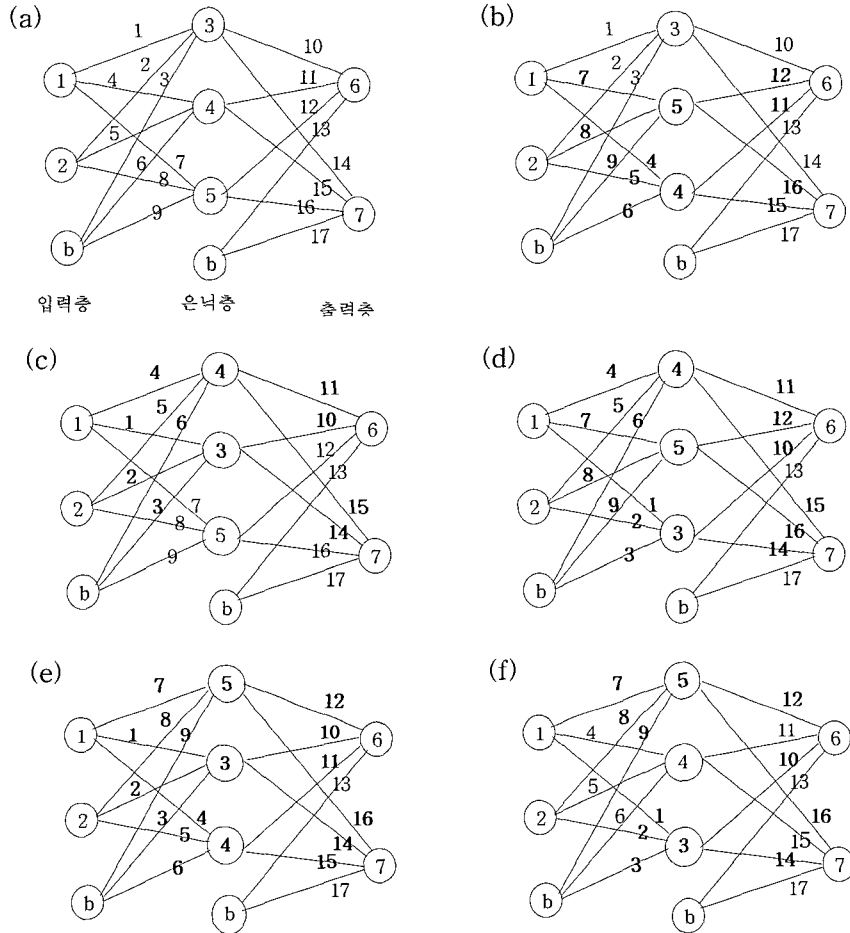


그림 4. 동일한 출력값을 갖는 연결강도 벡터: (a) 원 신경망, (b)~(f) 은닉층 뉴런의 순서 조합에 대한 신경망 (1~17은 연결강도 번호)

Fig. 4. The different weight vectors which produce the same output: (a) original neural network, (b)~(f): neural networks produced by changing the order of the hidden neurons. (number 1~17 denote the index of the weights).

도 벡터들의 각각에 대해 입력층의 바이어스와 은닉층 뉴런간의 연결강도의 크기를 비교하고 그 중 미리 정해놓은 조건에 일치하는 하나의 연결강도 벡터를 선택한다. 예를 들어, 입력층의 바이어스와 은닉층 뉴런간의 연결강도 값을 각각 W_1, W_2, W_3 라고 나타낼 때, 조합으로부터 얻은 6가지 연결강도 벡터 중 $W_1 \geq W_2 \geq W_3$ 의 조건을 만족하는 연결강도 벡터를 선택한다. 이러한 방법으로 재배열된 1000개의 연결강도 점들을 클러스터링에 사용하였고 그 결과 각 해집합에 대해 평균 51개의 동질해집합을 찾을 수 있었다.

그림 5는 50개의 해집합에 대해 클러스터링을 적용하여 얻은 동질해집합의 개수를 보여준다. 그림 3과 같이 동일한 문제라도 동질해집합은 연결강도 공간의 여

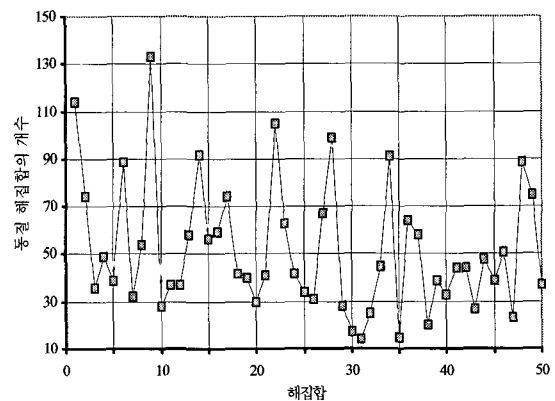


그림 5. 50개 해집합내의 동질해집합의 개수
Fig. 5. Number of homogeneous solution sets after clustering procedure.

러 곳에 분포될 수 있고, 또한 문제에 따라 그 개수가 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 표 3은 그림 5에서 40 번째 해집합의 동질해집합 내에 포함된 연결강도 점들의 개수를 보여준다. 많은 수의 다른 초기 연결강도 점들이 학습을 통해 동일한 해영역으로 이동하였음을 알 수 있다.

표 3. 각 동질해집합에 포함된 연결강도 점들의 개수

Table 3. Number of weight points included in homogeneous solution sets.

연결강도 점의 개수	동질 해집합의 개수
231	1
135	1
104	1
56	1
53	2
49	1
39	1
36	1
31	1
29	1
28	1
25	1
24	1
19	1
17	1
14	1
11	1
10	2
5	1
3	2
2	4
1	7

표 4는 표 3에서 가장 많은 연결강도 점들이 포함된 동질해집합에 속한 231개의 연결강도 점들로 추정된 공분산 행렬의 고유치를 크기 순으로 나열한 것을 보여준다. 가장 큰 3개의 고유치가 99% 이상의 비율을 차지하고 있고, 그 체적이 매우 작음을 알 수 있다. 표 4의 동질해집합에 대한 공분산 행렬의 대각(diagonal) 성분인 분산(variance)값을 조사하면 입력층 바이어스와 은닉층의 각 뉴런간을 연결하는 연결강도 성분(그림 4-(a)의 연결강도 번호 3, 6, 9)만이 각각 0.01, 0.21, 0.01의 작은 값을 갖고 나머지 연결강도에 대해서는 0에 가까운 값을 나타내었다. 이는 동질해집합에 속한 231개의 17차원 연결강도 벡터들은 입력층 바이어스와 은닉층 뉴런간을 연결하는 3개의 구성요소들(element)만이 변화가 있고, 나머지 14개의 구성요소들은 거의 변화가 없음을 나타낸다. 즉, 동질해집합은 입력층과 은닉층의 한 뉴런간의 연결강도에 의해 형성되는 직선(입

력의 차원이 증가하면 hyperplane)의 기울기는 고정된 상태에서 직선들이 입력 공간의 좌표축과 만나는 위치만이 조금씩 변한 연결강도 벡터들의 집합임을 의미한다. 그러므로 동질해집합의 체적은 연결강도 공간상의 한 점(point)으로 생각할 수 있을 정도로 매우 작다.

표 4. 동질해집합의 고유치

Table 4. Eigenvalues of the homogeneous solution set along with proportions and accumulations.

	Eigenvalue	Proportion(%)	Accumulation(%)
1	0.233	98.2	98.2
2	0.003	1.3	99.4
3	0.001	0.6	100.0
4	0.000	0.0	100.0
5	0.000	0.0	100.0
6	0.000	0.0	100.0
7	0.000	0.0	100.0
8	0.000	0.0	100.0
9	0.000	0.0	100.0
10	0.000	0.0	100.0
11	0.000	0.0	100.0
12	0.000	0.0	100.0
13	0.000	0.0	100.0
14	0.000	0.0	100.0
15	0.000	0.0	100.0
16	0.000	0.0	100.0
17	0.000	0.0	100.0

해집합으로부터 구한 동질해집합이 분포된 영역은 주어진 문제에 대해 최대 정확도(maximum accuracy)를 제공하지만 그 체적이 매우 작다. 클러스터링 과정에 의하여 구한 동질해집합은 신경망의 학습을 통해 얻은 1000개의 연결강도 벡터들로부터 구하였으므로 동질해집합의 분포 영역을 정확하게 추정하였다고 할 수 없다. 또한 그 체적이 연결강도 공간상의 한 점(point)에 비교될 정도로 매우 작아 이러한 동질해집합들이 분포된 영역으로는 신경망의 초기화에 적용하기 어렵다. 즉, 클러스터링을 통해 얻은 동질해집합은 연결강도 공간에서 매우 근접한 위치에 분포된 연결강도 벡터들의 집합을 의미한다. 따라서 동질해집합 주위의 연결강도 점들의 분류 정확도의 조사를 통해 가능한 한 최대 체적을 갖는 동질해집합의 확장을 고려할 수 있다. 그림 6은 동질해집합의 확장을 통해 얻을 수 있는 새로운 동질해집합의 예를 보여준다.

동질해집합이 분포된 영역을 다음과 같은 과정을 통해 최대 체적을 갖는 동질해집합으로 확장시킬 수 있다. 그림 7은 동질해집합의 확장방법을 도식적으로 보

여준다.

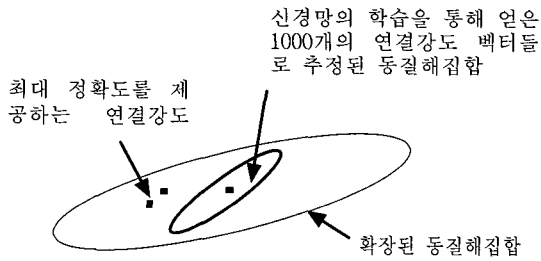


그림 6. 동질해집합 확장의 예
Fig. 6. Illustration of expansion of homogeneous solution set.

단계 1: 동질해집합으로부터 추정된 공분산 행렬의 가장 작은 고유치에 상응하는 고유벡터 방향으로 고유치의 크기를 증가시킨다. 고유치가 10^{-3} 이하이면 고유치의 10배를 새로운 고유치로 사용하였고, 10^{-3} 이상이면 고유치의 2배를 사용하였다. 고유치의 크기가 큰 경우 동질해집합의 영역을 벗어날 수 있는 가능성이 높으므로 이를 고려하여 현재 고유치의 크기만큼을 증가시켰다.

단계 2: 확장된 동질해집합의 고유치와 고유벡터를 사용하여 정규 분포를 가정하여 1000개의 테스트용 연결강도 점들을 발생시킨다.

단계 3: 테스트용 연결강도 점들로 시험한 정확도와 동질해집합의 최대 정확도의 차(Δacc)가 2% 이하인 연결강도 점들의 개수가 995 이상이면 확장이 유효하다고 생각하고, 그렇지 않으면 고유치의 증가를 취소한다. 같은 과정을 나머지 고유치들에 대해서 오름차순으로 반복한다.

단계 4: 단계 3에서 확장된 동질해집합의 고유치와 고유벡터를 사용하여 정규 분포를 가정하여 1000개의 연결강도를 발생시키고, 이 중 최대 정확도와 차가 2% 이하인 연결강도 점들만으로 새로운 평균 벡터와 공분산 행렬을 추정한다. 이는 확장된 영역에서 동질해집합의 균일성을 유지하기 위함이다.

단계 5: 단계 1~4의 과정을 17개의 모든 고유치들이 더 이상 증가하지 않을 때까지 반복한다.

본 논문에서는 약 3000개의 동질해집합들을 확장시켰고, 확장과정 동안 평균적으로 약 5만개의 연결강도 점들이 조사되었다. 그림 8은 14개의 해집합에 대해 확장과정 이후의 분포를 각 해집합의 가장 큰 2개의 고

유치들에 대한 고유벡터들의 평면으로 매핑시킨 그림이다. 각 해집합마다 여러 가지 다른 분포를 형성하고 있고, 동질해집합들이 서로 무리를 짓는 특징을 나타낸다.

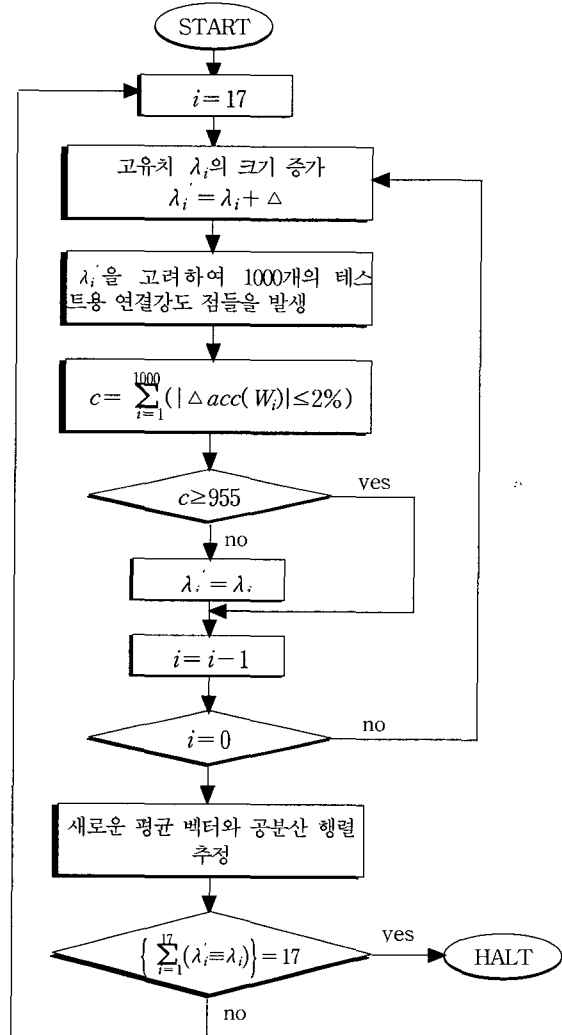


그림 7. 동질해집합 확장 알고리즘의 순서도
Fig. 7. Flowchart of homogeneous solution set expansion algorithm.

표 5는 표 4의 동질해집합에 대해 확장과정을 적용한 후의 고유치를 크기 순으로 나열한 것을 보여준다. 가장 큰 4개의 고유치가 99% 이상의 비율을 차지하고 있고, 체적은 약 10^{124} 배 증가되었다. 또한 확장 전과 후의 고유벡터간의 각도가 차이를 보이므로, 확장 전과 후의 해영역의 형태가 서로 상이함을 알 수 있다.

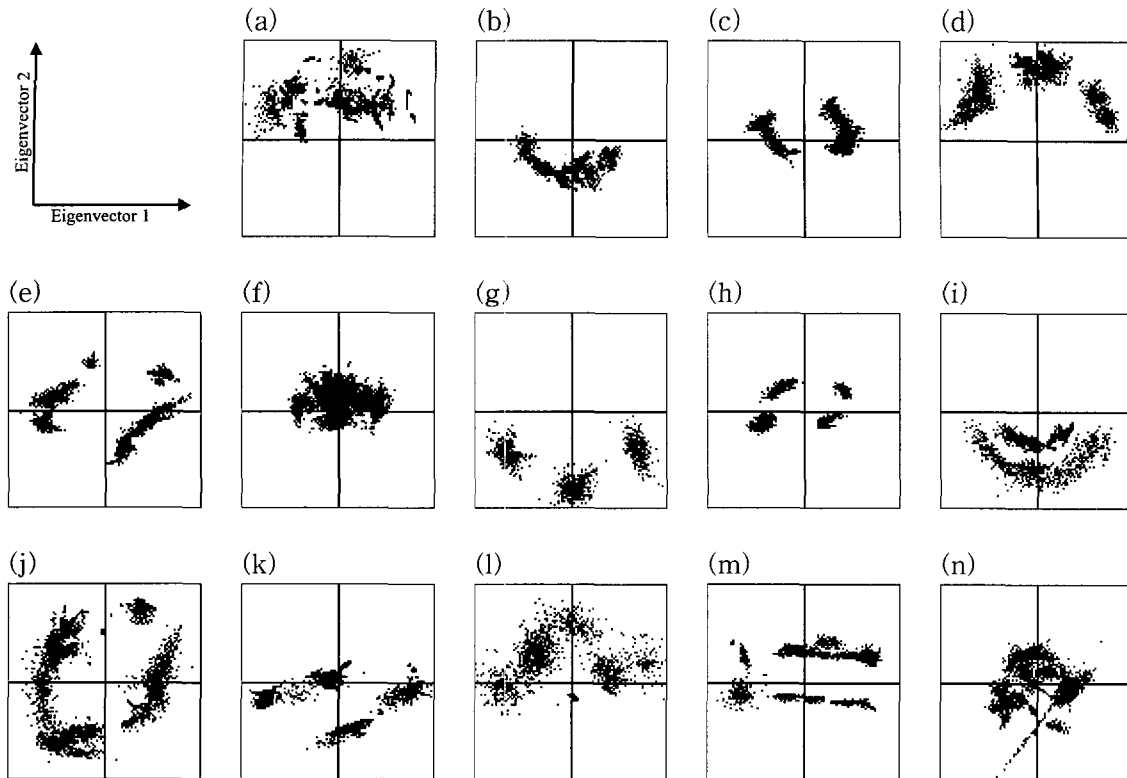


그림 8. 동질해집합을 확장한 후의 해집합 분포
 Fig. 8. Distribution of the solution sets after expansion procedure.

표 5. 확장 후 동질해집합의 고유치와 확장 전과 후의 고유벡터간의 각도

Table 5. Eigenvalues of the homogeneous solution set and angles between eigenvectors after expansion procedure.

	Eigenvalue	Proportion	Accumulation	Angles of Eigenvectors (degree)
1	36.679	69.8	69.8	8
2	11.642	22.2	92.0	74
3	2.964	5.6	97.6	104
4	0.763	1.5	99.1	78
5	0.342	0.7	99.8	77
6	0.099	0.2	99.9	43
7	0.019	0.0	100.0	136
8	0.007	0.0	100.0	60
9	0.005	0.0	100.0	126
10	0.001	0.0	100.0	50
11	0.000	0.0	100.0	86
12	0.000	0.0	100.0	78
13	0.000	0.0	100.0	12
14	0.000	0.0	100.0	69
15	0.000	0.0	100.0	62
16	0.000	0.0	100.0	119
17	0.000	0.0	100.0	51

III. 해영역의 분포를 이용한 신경망의 초기화

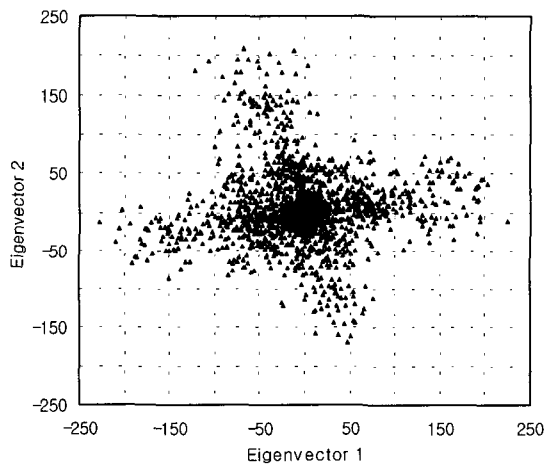
본 논문에서는 신경망의 해영역의 분포를 조사하였고 해영역은 신경망의 입력 패턴이 동일하다 할지라도 다른 초기 연결강도의 선정에 따라 연결강도 공간상에 다양하게 분포될 수 있음을 확인하였다. 또한 이러한 해영역의 분포는 새로운 문제의 해에 근접한 초기 연결강도를 예측할 수 있는 가능성을 제시해준다. 이러한 이전에 학습된 해영역 분포에 대한 정보를 저장하고 새로운 문제에 대한 신경망의 지식으로 사용함으로써 무작위 초기화보다 빠른 학습이 가능한지 실험하였다.

본 논문에서는 50개의 패턴분류 문제들로부터 전체 2581개의 동질해집합을 구하였고, 각각의 동질해집합에 대해 앞서 기술한 확장과정을 적용하여 2581개 동질해집합의 평균 벡터와 공분산 행렬을 추정하였다. 이러한 통계(statistics)로부터 정규 분포를 가정하여 각각의 동

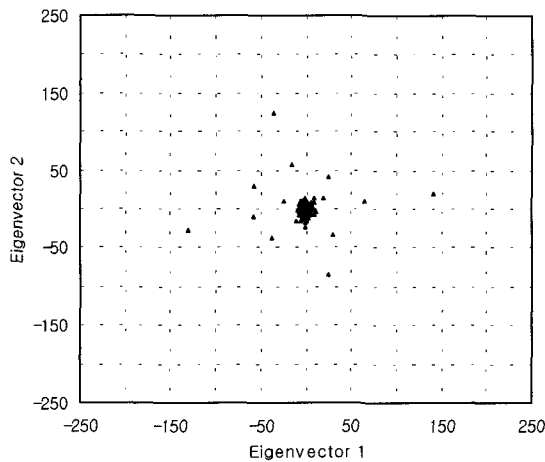
질해집합에 대해 300개의 연결강도 점들을 발생시켰다. 해영역의 분포에 대한 사전 정보를 신경망의 초기화에 적용하기 위해, 2581개 동질해집합들로부터 발생된 약 80만개의 연결강도 점들에 대해 k-means 클러스터링 과정을 적용하여 100개의 새로운 cluster로 재구성하였다. 그림 9-(a)는 80만개의 연결강도 점들을 100개의 cluster들의 평균 벡터들로부터 추정된 공분산 행렬의 가장 큰 2개의 고유치들에 대한 고유벡터들의 평면으로 매핑시킨 그림이다. 연결강도 점들이 주로 중심에 밀집되어 있음을 알 수 있다. 그림 9-(b)는 그림 9-(a)에서 100개의 cluster의 평균 벡터들만을 나타내고, 본

논문에서는 이 평균 벡터들을 새로운 문제의 학습을 위한 초기 연결강도로 사용하는 것이 가능한지를 조사하였다.

해영역의 분포에 대한 사전 지식이 새로운 문제를 학습하는데 유용한 정보를 제공하는지를 시험하기 위해, 클러스터링에 관여한 50개의 패턴분류 문제에 포함되지 않은 40개의 클래스를 조합하여 $780(40C_2)$ 개의 새로운 2클래스 패턴분류 문제들을 구성하였다. 780개의 문제들의 학습을 위한 초기 연결강도 선정을 위해 그림 9-(b)의 100개 cluster 평균 벡터들 중 각 패턴분류 문제에 대해 가장 높은 분류 정확도를 제공하는 평균 벡터를 선택하고, 또한 [-0.5, 0.5] 범위에서 선택한 100개의 무작위 연결강도 벡터들 중 같은 방식으로 가장 높은 분류 정확도를 제공하는 하나의 무작위 연결강도 벡터를 선택하였다. 이 두 연결강도 벡터들을 각각 신경망의 초기 연결강도로 사용하여 학습을 수행하였다. 초기 분류 정확도의 확인을 위해 전체 학습 데이터의 5%만을 무작위로 선택하여 초기화에 걸리는 연산시간을 단축하였다. 이는 전체 학습 샘플이 500개이고 cluster 평균 벡터가 100개임을 감안할 때, 2500개의 학습 샘플을 신경망으로 테스트한 것과 동일한 연산량이다. 즉, 제안된 방법의 초기화를 위해서는 무작위 초기화 이후 2~3번의 학습에 소요되는 연산시간이 필요하다.



(a)



(b)

그림 9. 클러스터링 후의 해영역 분포. (a) 100개의 cluster 분포, (b) 100개의 cluster 중심 분포

Fig. 9. Distribution of solution region after clustering. (a) Distribution of the 100 clusters, (b) Centers of the 100 clusters.

표 6. 초기화를 위해 선택된 연결강도간의 분류 정확도 차이 (D=해영역 분포-무작위 초기화, 학습 데이터)

Table 6. The classification accuracy differences for training data. (D denotes classification accuracy difference between the weight selected by the proposed method and the weight selected randomly).

Difference(D)	문제수	비율(%)	누적(%)
$D \geq 30\%$	17	2.18	2.18
$30\% > D \geq 20\%$	105	13.46	15.64
$20\% > D \geq 10\%$	230	29.49	45.13
$10\% > D > 0\%$	298	38.21	81.15
$0\% > D \geq -5\%$	102	13.08	96.41
$-5\% > D \geq -10\%$	26	3.33	99.74
$-10\% > D \geq -15\%$	2	0.26	100

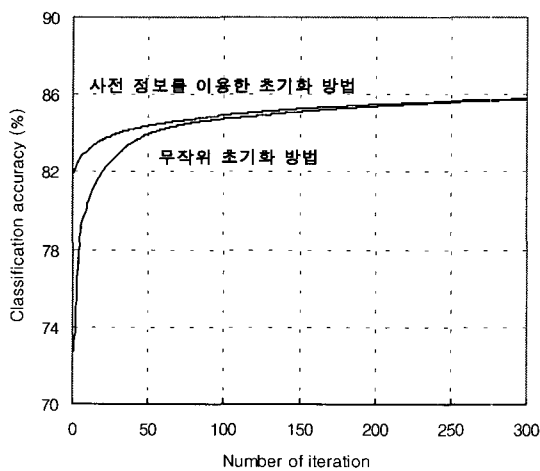
표 7. 초기화를 위해 선택된 연결강도간의 분류 정확도 차이 (D=해영역 분포-무작위 초기화, 시험 데이터)

Table 7. The classification accuracy differences for test data. (D denotes classification accuracy difference between the weight selected by the proposed method and the weight selected randomly).

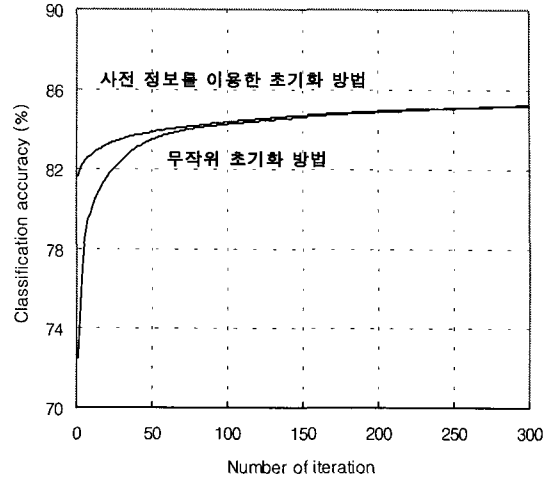
Difference(D)	문제수	비율(%)	누적(%)
$D \geq 30\%$	24	3.08	3.08
$30\% > D \geq 20\%$	103	13.21	16.28
$20\% > D \geq 10\%$	227	29.10	45.38
$10\% > D > 0\%$	311	39.87	82.18
$0\% > D \geq -5\%$	92	11.79	97.05
$-5\% > D \geq -10\%$	20	2.56	99.62
$-10\% > D \geq -15\%$	3	0.38	100

표 6-7은 780개의 새로운 패턴분류 문제들에 대해 제안된 방법과 무작위 초기화 방법으로 선택된 두 초기 연결강도 벡터간의 분류 정확도 차이를 보여준다. 전체 문제의 80%이상에 대해 100개의 cluster의 평균 벡터들로부터 선택된 연결강도 벡터가 무작위로 선택된 연결강도 벡터에 비해 높은 분류 정확도를 제공하였다.

그림 10은 780개의 패턴분류 문제들을 300번 학습하였을 때 각 iteration에서의 780개 문제에 대한 패턴분



(a)



(b)

그림 10. 사전 정보를 이용한 초기화와 무작위 초기화의 학습 성능 비교 (a) 학습 데이터 (b) 시험 데이터

Fig. 10. Training performance comparison between the initialization using prior information and the random initialization. (a) training data, (b) test data.

균 벡터들에서 선택된 연결강도 초기화가 학습이 진행됨에 따라 정확도의 차이는 줄어들지만 지속적으로 성능의 향상을 보임을 알 수 있다. 특히, 1번 학습이 이루어진 후에 학습 데이터의 경우 제안된 초기화 방법이 81.58%의 분류 정확도를 제공하고, 무작위 초기화 방법은 71.82%의 분류 정확도를 제공하고 있다. 시험 데이터의 경우에도 각각 81.32%, 71.33%의 분류 정확도를 보여주었다. 이 결과는 이전에 학습된 문제의 해영역으로부터 선택된 연결강도가 새로운 문제의 해를 유추할 수 있음을 의미한다.

실험 결과를 종합해 볼 때, 해영역의 분포에 대한 지식이 기존의 무작위 초기화 방법보다 새로운 문제의 학습 능력을 향상시킬 수 있음을 보여주었고, 이러한 이전에 학습된 신경망의 해영역에 대한 지식이 늘어갈수록 신경망의 학습 성능을 더욱 향상시킬 수 있을 것으로 기대된다.

IV. 결 론

본 논문에서는 신경망의 해영역의 분포를 분석함으로써 신경망의 학습 성능을 향상시킬 수 있는 가능성을 탐구하였다. 먼저 신경망의 학습을 통해 얻은 연결

강도 벡터들로부터 연결강도 공간상의 해영역의 분포를 추정하고, 이로부터 해영역 확장 알고리즘을 통해 최대 체적을 갖는 균일한 해영역을 구하였다. 이와 같이 구한 해영역의 분포를 이용한 신경망 초기화 실험을 통해 해영역의 분포에 대한 사전 지식이 새로운 문제의 학습 능력을 향상시킬 수 있음을 확인하였다. 이러한 해영역의 분포에 대한 정보가 증가할수록, 신경망은 새로운 문제를 좀 더 효율적으로 학습할 수 있을 것으로 예측된다.

본 논문에서는 2클래스 분류 문제를 위해 단순한 2-3-2 신경망 구조에 대한 해영역을 조사하였지만 실용적인 문제로의 적용을 위해서는 다수의 연결강도를 갖는 복잡한 구조의 신경망에 대한 해영역 분포 분석이 요구된다. 이와 함께 추후 연구되어야 할 과제는 학습이 수행될 때마다 추가되는 학습 경험 정보를 축적하고 갱신하는 효율적인 지식 정보저장 시스템을 구축하는 것이다. 이를 위해 해영역의 분포에 대한 수학적 모델링(modeling), 결정 경계(decision boundary)를 해영역의 정보 저장 파라미터로 사용함으로 저장 파라미터의 수를 줄이는 과정, 퍼지(fuzzy) 시스템의 등가성을 이용한 해영역 저장 파라미터의 의미부여 등의 추후 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

[1] J. N. Hwang, S. Y. Kung, M. Niranjan, and J. C. Principe, "The Past, Present, and Future of Neural Networks for Signal Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 14, no. 6, pp. 28-48, 1997.

[2] John A. Richards, *Remote Sensing Digital Image Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[3] G. Mirchandani and W. Cao, "On Hidden Nodes for Neural Nets," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 36, no. 5, May, 1989.

[4] J. Makhoul, A. El-Jaroudi, and R. Schwartz, "Partitioning Capabilities Two-Layer Neural Networks," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 6, June, 1991.

[5] G. J. Gibson and C. F. N. Cowan, "On the Decision Regions of Multilayer Perceptrons," *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, no. 10, Oct, 1990.

[6] I. Bellido and E. Fiesler, "Do Backpropagation Trained Neural Networks have Normal Weight Distributions?," *ICANN93*, pp. 772-775, 1993.

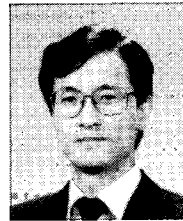
[7] L. L. Biel and et al., "A Crops and Soils Data Base For Scene Radiation Research," *Proc. Machine Process. of Remotely Sensed Data Symp., West Lafayette, Indiana*, 1982.

[8] R. P. Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," *IEEE ASSP Magazine*, vol. 4, no. 2, Apr. 1987.

저 자 소 개



高 纘 穰(正會員)
 1996년 2월 : 건국대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1997년 3월~1999년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업 (공학석사). 1999년 9월~현재 : 연세대학교 전기·전자공학과 박사 과정. ※ 주관심분야: 신경회로망, 패턴인식, 음성신호처리

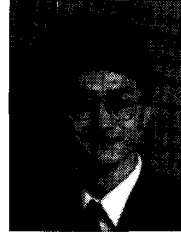


朴 玟 用(正會員)
 1973년 : 연세대학교 전자공학과 공학사. 1977년 : 연세대학교 전자공학과 공학석사. 1982년 : 일본 동경대학교 전자과 공학박사. 1982년 : MIT UC Berkely 연구원. 1986년~1987년 : 일본통상성 객원연구원. 1982년~현재 : 연세대 전자공학과 교수. ※ 주관심분야: 지능제어 및 계측 시스템



洪大植(正會員)

1983년 2월 : 연세대학교 전자공학 공학사. 1985년 2월 : 연세대학교 대학원 공학석사. 1990년 8월 : Purdue University West Lafayette, IN. Electrical Eng. Ph.D. 1985년 3월~1986년 8월 : 연세대학교 산업 기술 연구소 연구원. 1987년 8월~1990년 8월 : Purdue University West Lafayette, IN. Research Assistant. 1990년 9월~1991년 8월 : Purdue University West Lafayette, IN. Post-Doc. Research Associate. 1991년 9월~1995년 8월 : 연세대학교 전자공학과 조교수. 1995년 9월~2001년 2월 : 연세대학교 전자공학과 부교수. 2001년 3월~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 교수. ※ 주관심분야: 신경회로망, 디지털 통신 시스템, OFDM 시스템, 자기 기록 시스템에 관한 연구



李哲熙(正會員)

1980년 3월~1984년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1984년 3월~1986년 2월 : 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사). 1986년 9월~1987년 3월: Technical University of Denmark (Researcher). 1987년 8월~1992년 12월 : Purdue University Electrical Engineering (Ph. D.). 1993년 7월~1996년 8월 : National Institutes of Health, Maryland, USA. (Visiting Fellow). 1996년 9월~1999년 8월 : 연세대학교 기계전자공학부 조교수. 1999년 9월~현재 : 연세대학교 기계전자공학부 부교수. ※ 주관심분야: 영상신호 처리, 음성신호처리, 패턴인식, 신경회로망