

論文2001-38SC-4-1

이산 시간 어핀 Type III 퍼지 제어 시스템의 안정도에 대한 연구

(A study on the Stability of Discrete-time Affine Type III Fuzzy Control System)

金 殷 泰 * , 李 羲 振 *

(Euntai Kim and Heejin Lee)

요 약

본 논문에서는 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정도를 판정하고 이에 의하여 제어기를 설계하는 방식을 제안하도록 한다. 제안되는 안정도 해석 및 설계 방식은 컨벡스 최적화 기법에 근거한 방식으로, 우선 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템이 2차적으로 안정하게 되는 조건을 유도하도록 한다. 그 이후 이를 선형 행렬 부등식의 형태로 변형하여 수치적 접근방식을 제안하고 제안한 안정조건을 이용하여 어핀 Type III 퍼지 시스템으로 표현된 플랜트에 대하여 안정도가 보장되는 퍼지 제어기를 설계하도록 한다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 확인한다.

Abstract

In this paper, we propose the stability analysis and design methodology for the discrete-time affine Type III fuzzy system via the convex optimization technique. First, the stability condition is derived under which the discrete-time affine Type III fuzzy system is quadratically stable in the large. Next, the derived condition is reformulated into the convex optimization problem called Linear Matrix Inequalities (LMI) and numerically addressed. Finally, the effectiveness and the feasibility of the proposed analysis and design methodology is highlighted via an example and its computer simulation result.

I. 서 론

1965년 Zadeh가 퍼지 이론을 제안한 이래^[1], 퍼지 이론에 근거한 퍼지 제어의 산업적 응용은 폭발적으로 늘어나고 있고 이런 추세는 당분간 계속될 것으로 생각된다^[2-4]. 또 이 같은 퍼지제어의 적용이 늘어나면서 각 용도에 맞도록 퍼지 제어 시스템은 조금씩 변화하게 되었고, 각 퍼지 시스템이 채택하는 구조나 사용하

는 추론 방식, 소속함수의 종류에 따라 퍼지 제어 시스템은 여러 가지 형태로 존재하게 되었다. 이러한 여러 형태의 퍼지 제어 시스템은 조금씩 차이가 있기는 하지만 구조적으로 크게 다음과 같이 세 가지 종류로 나눌 수 있다^[5].

Type I: (언어변수 후건부를 사용하는 형식)

$$R^n: \text{If } x_1 \text{ is } A_1^n \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^n, \dots, x_m \text{ is } A_m^n, \\ \text{then } y \text{ is } C^n$$

Type II: (싱글톤 후건부를 사용하는 형식)

$$R^n: \text{If } x_1 \text{ is } A_1^n \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^n, \dots, x_m \text{ is } A_m^n, \\ \text{then } y \text{ is } y^n$$

Type III: (함수형 후건부를 사용하는 방식)

* 正會員, 國立 韓京大學校, 制御計測工學科

(Hankyong National University, Dept. of Control and Instrumentation Engr.)

接受日字:1999年11月26日, 수정완료일:2001年6月19日

R^n : If x_1 is A_1^n and x_2 is A_2^n, \dots, x_m is A_m^n ,
then $y = a_0^n + a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \dots + a_m^n$

여기서 A_i^n 과 C^n 는 퍼지 변수를 나타내는 퍼지 집합이고 y^n 는 싱글톤 변수이며 a_i^n 는 후건부의 함수를 구성하는 계수들이다.

이들 중 최근에 가장 각광을 받고 있는 형식은 함수형 후건부를 갖는 Type III이다. 이는 다른 퍼지 제어 시스템이 해석하거나 이론적으로 접근하기에 대단히 어려운 구조를 갖는 것에 비하여 상대적으로 간단한 구조로 실제 산업에서 응용될 수도 있고 체계적으로 해석하거나 설계하는 방식에 대한 연구도 가능하기 때문이다. 함수형 후건부를 갖는 이 같은 Type III 퍼지 제어 시스템은 그 구조를 제안한 학자의 이름을 빌어 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 시스템, 또는 간단히 Sugeno 형 퍼지 시스템으로도 널리 알려져 있다^[6].

Type III형은 기존의 선형, 비선형 제어 이론을 적용하기 쉬운 구조로 Type I이나 II와는 달리 안정도 해석이나 그 체계적 설계에 대하여 많은 연구 결과가 보고되고 있다.

그 중 가장 주목할 만한 연구로는 Tanaka와 그의 동료들이 발표한 TS퍼지 시스템의 점근안정도를 보장하는 충분조건으로, 그는 [7-9]로 이어지는 일련의 논문에서 Type III 퍼지 제어 시스템의 여러 부시스템(subsystem)에 대한 공통 리아프노프 함수라는 개념으로 이 문제를 접근하였다. 또 최근에는 [10]과 [11]에서 선형 행렬 부등식(LMI)을 이용하여 이 문제를 접근하여 수치적으로 Type III 모델의 안정도를 해석하는 방식을 제안하였고 [12]에서는 강인 제어이론을 퍼지 제어 이론과 결합하여 공통 리아프노프 함수를 구하는 문제를 생략하고 있다.

이 외에도 많은 제어 학자들이 Type III 시스템이나 이와 비슷한 시스템의 안정도 해석에 참여하여 Viswanath는 [13]에서 이산적인 Type III 시스템에 대하여 2차가 아닌 공통 리아프노프 함수(common nonquadratic Lyapunov function)를 도입하여 안정 조건을 제시하였다. Lam [14]과 Kim [15]은 각각 연속 Type III 퍼지 시스템과 이산 Type III 퍼지 시스템에 대하여 강인 안정도가 보장되는 영역을 유도하여 이를 반영한 병렬형의 적응 퍼지 제어를 제안하였다. 최근 Liberzon과 Morse는 Type III 퍼지 시스템과 유사한

스위칭 시스템과 하이브리드 시스템의 안정조건에 대하여 기존의 연구결과를 종합하는 논문을 발표하였다^[16].

그러나 위에 언급된 방법들은 모두 후건부에 상수항을 가지고 있지 않은 선형 Type III 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구로 Sugeno가 처음 발표한 논문인 [6]과 Tanaka의 처음 논문 [7]의 앞부분에서 사용된 후건부에 상수항을 가지고 어떤 Type III 퍼지 시스템의 안정도에 대해서는 거의 연구가 진행되지 않았다. Type III 퍼지 시스템의 구조가 처음으로 제안된 논문 [6]에서 Type III 퍼지 시스템은 후건부가 단순히 입력량의 선형식일 뿐 아니라 상수항을 포함하고 있는 어핀식이 사용되었었다. 이는 상수항을 포함한 어핀 Type III 퍼지 시스템이 상수항을 포함하고 있지 않은 선형 Type III 퍼지 시스템과 비교할 때, 적은 수의 규칙으로도 비선형 시스템을 잘 표현할 수 있기 때문이다. 이는 마치 신경회로망의 바이어스(bias)와 같은 역할로 생각되는데 실제로 Type III 퍼지 시스템에서 상수항이 비선형 시스템의 묘사력을 크게 향상시킨다는 사실은 [17]에서 찾아볼 수 있다.

또 제어 플랜트를 Type III 퍼지 시스템으로 만드는 경우를 생각할 때 이는 다음의 두 가지 방법중 한가지로 진행되게 된다.

- (1) 실제 시스템의 비선형 식으로부터의 직접 변환
- (2) 입출력 데이터로부터의 설정

Type III 퍼지 시스템이 [10]이나 [12]에서처럼 실제 시스템의 비선형 식으로부터 변환을 통해 얻어지면 결과는 선형일 수도 있고 어핀일 수도 있다. 그러나 Type III 퍼지 시스템이 [6, 18, 19]에서처럼 입출력 데이터의 설정으로부터 만들어진다면 결과적으로 얻어지는 Type III 시스템은 어핀 시스템이 된다.

그러나 선형 Type III 시스템의 안정성에 대한 많은 연구와 비교해서 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구는 거의 진행되고 있지 않은 게 사실이다. 이는 상수항을 포함하지 않은 선형 Type III 퍼지 시스템의 경우 기존의 선형 제어 이론의 확장으로 생각되어 안정성 등의 해석이 비교적 용이하지만 상수항이 있는 경우는 기존의 선형제어 이론이 적용되기 어렵기 때문이다.

따라서 본 논문에서는 이산 시간의 경우에 대하여 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정도를 판정할 수 있는 충분조건을 제안하도록 한다. 또 이 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 바꾸어 수치적으로 쉽게 다룰 수 있

도록 한다. 기존의 논문과 비교할 때 기존의 Type III 시스템의 안정조건은 전건부의 정보를 고려하지 않지만 본 논문에서 제안된 방식은 전건부의 정보가 사용 되는 특징이 있고 따라서 본 논문에서 제안된 안정조건은 기존의 방식을 일반화 한 것으로 볼 수 있고 기존의 방식보다 비보수적 (unconservative)이라 할 수 있다. 끝으로 제안된 안정조건에 근거하여 이산 시간 어핀 Type III에 대하여 제어기 설계 방식을 설명하도록 한다.

II. 이산 시간 선형 Type III 퍼지 시스템과 안정 조건

이산 시간 선형 Type III 퍼지 시스템은 다음의 형태를 취한다.

$$R_i : \text{If } x_1(k) \text{ is } M_{i1} \text{ and } x_2(k) \text{ is } M_{i2}, \dots x_n(k) \text{ is } M_{in},$$

$$\text{then } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$ 는 상태변수이고 $R_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 은 i 번째 퍼지 규칙이며 $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in}$ 퍼지 변수이다. (1)번 식에서 후건부의 부시스템은 상수항을 포함하지 않은 선형 시스템이다. 이 시스템의 입출력 식은 (2)로 나타나게 된다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k)}{\sum_{i=1}^r w_i}$$

여기서

$$w_i = \prod_{q=1}^n M_{iq}(x_q) \quad (2)$$

Tanaka는 [7-9]에서 (2)의 식이 안정화되는 조건을 제시하였고 이는 정리 1과 같다.

정리 1.

(2)로 나타나는 이산 시간 선형 Type III 퍼지 시스템은 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재하면 안정하다.

$$\mathbf{A}_i^T P \mathbf{A}_i - P < 0 \quad \text{for } i=1, \dots, r \quad (3)$$

III. 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템과 안정 조건

이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템은 다음의 IF-THEN형식을 취한다.

$$R_i : \text{If } x_1(k) \text{ is } M_{i1} \text{ and } x_2(k) \text{ is } M_{i2}, \dots x_n(k) \text{ is } M_{in},$$

$$\text{then } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\mu}_i \quad (4)$$

선형 퍼지 시스템의 경우에서와 같이 그 입출력은 다음의 식으로 나타나게 된다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\mu}_i)}{\sum_{i=1}^r w_i}$$

여기서

$$w_i = \prod_{q=1}^n M_{iq}(x_q) \quad (5)$$

(4)와 (5)의 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정성을 해석하기 위하여 다음의 가정을 한다.

가정 1.

(1) 원점 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 에 대하여 단지 R_ξ 인 퍼지 규칙 하나만 동작하며 나머지 규칙은 반응하지 않는다. 즉,

$$w_\xi(\mathbf{0}) = 1 \text{ 이고 } w_i(\mathbf{0}) = 0, (i=1, \dots, r, i \neq \xi)$$

(2) $w_\xi(\mathbf{0}) = 1$ 인 $i = \xi$ 인 퍼지 규칙에 대해서는 상수항 $\boldsymbol{\mu}_\xi$ 은 $\mathbf{0}$ 이다.

$$\boldsymbol{\mu}_\xi = \mathbf{0} \quad \blacksquare$$

이 같은 가정은 원점 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 이 (4)와 (5)의 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템의 평형점이 되도록 하여 준다. 다음의 정리 2는 (4)와 (5)의 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정조건을 제시하여 준다.

정리 2.

(4)로 나타나는 어핀 Type III 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i 에 대하여 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재하면 안정하다:

R_i 에서 반응하는 모든 0아닌 점 $\mathbf{x} (w_i(\mathbf{x}) \neq 0)$ 에 대

하여

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(A_i^T P A_i - P)\mathbf{x} + \mu_i^T P A_i \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A_i^T P \mu_i \\ & + \mu_i^T P \mu_i < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

(증명)

$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ 를 (5)의 리아프노프 후보함수로 하고 P 를 양한정 행렬이라 할 때 리아프노프 후보함수의 시간 차분식 (time difference equation)은 다음의 식으로 나타나게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \mathbf{x}^T(k+1) P \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i (\mu_i^T + \mathbf{x}^T(k) A_i^T)}{\sum_{i=1}^r w_i} P \frac{\sum_{j=1}^r w_j (A_j \mathbf{x}(k) + \mu_j)}{\sum_{j=1}^r w_j} \\ &\quad - \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

편의상 시간을 나타내는 k 는 생략하도록 하고

$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r w_i w_j$ 는 R 로 표현하도록 한다. 그러면

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \frac{1}{R} \left(\sum_{i=1}^r w_i^2 \{ (A_i \mathbf{x} + \mu_i)^T P (A_i \mathbf{x} + \mu_i) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \} + \sum_{i < j} w_i w_j \{ (A_i \mathbf{x} + \mu_i)^T P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) \right. \\ &\quad \left. + (A_j \mathbf{x} + \mu_j)^T P (A_i \mathbf{x} + \mu_i) - 2 \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \} \right) \end{aligned}$$

본 정리의 가정에 의하여 $w_i(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}) \neq 0$ 을 만족하는 0 아닌 \mathbf{x} 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$(\mu_i^T + \mathbf{x}^T A_i^T) P (A_i \mathbf{x} + \mu_i) - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} < 0 \quad (7)$$

$$(\mu_j^T + \mathbf{x}^T A_j^T) P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} < 0. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \{ (A_i \mathbf{x} + \mu_i) - (A_j \mathbf{x} + \mu_j) \}^T P \{ (A_i \mathbf{x} + \mu_i) \\ & \quad - (A_j \mathbf{x} + \mu_j) \} \geq 0 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A_i \mathbf{x} + \mu_i)^T P (A_i \mathbf{x} + \mu_i) + (A_j \mathbf{x} + \mu_j)^T \\ & P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) \geq (A_i \mathbf{x} + \mu_i)^T P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) \\ & \quad + (A_j \mathbf{x} + \mu_j)^T P (A_i \mathbf{x} + \mu_i). \end{aligned} \quad (9)$$

(7)(8)(9)를 이용하면 $w_i(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}) \neq 0$ 을 만족하는 0 아닌 \mathbf{x} 에 대하여

$$(A_i \mathbf{x} + \mu_i)^T P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) + (A_j \mathbf{x} + \mu_j)^T$$

$$P (A_i \mathbf{x} + \mu_i) - 2 \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq (\mu_i^T + \mathbf{x}^T A_i^T)$$

$$P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + (\mu_j^T + \mathbf{x}^T A_j^T)$$

$$P (A_j \mathbf{x} + \mu_j) - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} < 0. \quad (10)$$

(7)(8)(10)에 의하여 $\Delta V(k)$ 는 $w_i(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}) \neq 0$ 을 만족하는 0 아닌 \mathbf{x} 에 대하여 음수이다. 따라서 정리 2의 가정이 성립한다면 $\Delta V(k)$ 는 0 아닌 모든 \mathbf{x} 에 대하여 음수이고 식 (5)의 어핀 퍼지 시스템은 점근적으로 안정하다. ■

위의 정리의 결과를 가정 1과 결합하여 $i = \xi$ 인 경우와 $i = 1, \dots, r, i \neq \xi$ 의 경우로 나누어 생각한다.

(i) 원점이 속하는 퍼지 규칙 R_ξ 에 대하여, 가정 1에 의하여 원점의 R_ξ 의 소속도는 1이고 ($w_\xi(0) = 1$), 상수항은 0이다 ($\mu_\xi = 0$). 이 경우 정리 2의 전체 조건은 R_ξ 에 반응하는 0 아닌 모든 \mathbf{x} 에 대하여

$$\mathbf{x}^T (A_\xi^T P A_\xi - P) \mathbf{x} < 0$$

라는 조건으로 줄게 되고 이는 다음의 행렬 부등식으로 쓸 수 있다.

$$A_\xi^T P A_\xi - P < 0$$

(ii) 그 외의 퍼지 규칙 R_i ($i \neq \xi$)에 대하여 다음의 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} F_{i0}(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{x}^T (A_i^T P A_i - P) \mathbf{x} + \mu_i^T P A_i \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{x}^T A_i^T P \mu_i + \mu_i^T P \mu_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad i \neq \xi \end{aligned}$$

다음은 퍼지 규칙 R_i 에 반응하여 $w_i(\mathbf{x}) \neq 0$ 인 \mathbf{x} 의 범위를 다음의 n 개의 연립 부등식으로 표현한다. 여기서 n 은 시스템의 차수이다.

$$x_1 \text{에 대하여, } x_1 \leq a_{i1} \text{ 또는}$$

$$x_1 \geq \beta_{i1} \text{ 또는 } a_{i1} \leq x_1 \leq \beta_{i1}$$

$$x_2 \text{에 대하여, } x_2 \leq a_{i2} \text{ 또는}$$

$$x_2 \geq \beta_{i2} \text{ 또는 } a_{i2} \leq x_2 \leq \beta_{i2}$$

⋮

$$x_n \text{에 대하여, } x_n \leq a_{in}$$

$$\text{또는 } x_n \geq \beta_{in} \text{ 또는 } a_{in} \leq x_n \leq \beta_{in}$$

위의 조건들은 다음의 연립 이차 부등식의 형태로 나타낼 수 있다. 편의상 x_q ($q=1, \dots, n$)에 대하여 위의 조건을 이차 부등식 $F_{iq}(x)$ 의 형태로 바꾸면, $x_q \leq \alpha_{iq}$ 인 경우,

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = 0_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ u_{iq} = (0 \ 0 \ \dots \ 1/2 \ \dots \ 0)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = -\alpha_{iq} \end{cases}$$

$x_q \geq \beta_{iq}$ 인 경우,

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = 0_{n \times n} \\ u_{iq} = (0 \ 0 \ \dots \ -1/2 \ \dots \ 0)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = \beta_{iq} \end{cases}$$

$\alpha_{iq} \leq x_q \leq \beta_{iq}$ 인 경우 $(x_q - \alpha_{iq})(x_q - \beta_{iq}) \leq 0$ 이고

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ \text{qth element on the diagonal} \\ u_{iq} = \left(0 \ 0 \ \dots \ -\frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \ \dots \ 0\right)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = \alpha_{iq}\beta_{iq} \end{cases}$$

이제 정리 2에서 유도한 조건 (6)은 다음의 연립 부등식으로 등가 적으로 표현할 수 있다:

$F_{i1}(x) \leq 0, F_{i2}(x) \leq 0, \dots, F_{in}(x) \leq 0$ 을 만족하는 모든 x 에 대하여

$$F_{i0}(x) < 0 \tag{11}$$

위의 연립 부등식은 참고문헌 [20]에 소개된 S-과정을 통하여 다음의 부등식으로 변형될 수 있다. 본 논문에서는 논문의 이해를 쉽게 하기 위해 부록에 S-과정에 대하여 간략히 소개하도록 한다.

모든 x 에 대하여 $F_{i0}(x) - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} F_{iq}(x) < 0$ 을 만족하는 양수 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 이 존재한다. \tag{12}

다시 (12)의 조건은 등가 적으로 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 한정행렬 $P > 0$ 과 양수 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 가 존재한다는 조건으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A_i^T P A_i - P - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} T_{iq} & A_i^T P \mu_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P A_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq}^T & - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0$$

따라서, 정리 2는 선형행렬부등식 형태로 표현되는 다음의 정리 3으로 변형된다.

정리 3.

(5)로 나타나는 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i 에 대하여 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 와 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 가 존재하면 안정하다:

$$A_{i\xi}^T P A_{i\xi} - P < 0, \quad w_{i\xi}(0) = 1 \quad \text{and} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} A_i^T P A_i - P - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} T_{iq} & A_i^T P \mu_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P A_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq}^T & - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0 \tag{14}$$

($i=1, \dots, r, i \neq \xi$) ■

IV. 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템의 가안정성

본 장에서는 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정성을 이용하여, 어핀 Type III 퍼지 시스템으로 표현되는 플랜트의 제어기를 설계한다. 제어기 설계를 단순화하기 위하여 퍼지 제어기의 전진부는 Tanaka가 제안한 병렬 보상 기법 (Parallel Distributed Compensation, PDC) [10, 11]을 이용하여 설계하도록 한다. 우선 제어 대상 플랜트가 (15)와 (16)의 어핀 Type III 퍼지 시스템으로 표현된다고 가정한다.

R_i : If $x_1(k)$ is M_{i1} and $x_2(k)$ is $M_{i2}, \dots, x_n(k)$,
is M_{in} , then $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\mu}_i$ (15)

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\mu}_i)}{\sum_{i=1}^r w_i}$$

여기서 $w_i = \prod_{q=1}^n M_{iq}(x_q)$ (16)

병렬 보상 기법의 기본적인 아이디어는 퍼지 시스템의 각 부시스템을 제어하는 보상기를 만들어 전체를 제어하는 방식이다. 이는 퍼지 제어가 식 (17)과 같이 주어진 제어 대상의 퍼지 플랜트와 같은 전진부를 공유하는 것을 의미한다.

L_j : If $x_1(k)$ is M_{j1} and $x_2(k)$ is $M_{j2}, \dots, x_n(k)$
is M_{jn} , then $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_j \mathbf{x}(k)$ (17)

여기서 퍼지 제어기 (17)의 입출력 관계는 다음의 식으로 표현된다.

$$\mathbf{u}(k) = \frac{\sum_{j=1}^r w_j (\mathbf{K}_j \mathbf{x}(k))}{\sum_{j=1}^r w_j}$$

여기서

$$w_j = \prod_{q=1}^n M_{jq}(x_q)$$
 (18)

(16)과 (18)을 결합하면 페루프 어핀 Type III 퍼지 시스템은 다음의 식으로 표현된다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j (\mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\mu}_{ii})}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j}$$
 (19)

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i^2 (\mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\mu}_{ii})}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j} \\ &+ 2 \frac{\sum_{i < j \leq r} w_i w_j (\mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\mu}_{ij})}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j} \end{aligned}$$
 (20)

여기서

$i=1, \dots, r$ 에 대하여

$$\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i, \quad \boldsymbol{\mu}_{ii} = \boldsymbol{\mu}_i,$$

$i < j \leq r$ 에 대하여

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) + (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i)}{2}, \quad \boldsymbol{\mu}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_j}{2}$$

3장의 정리 3으로부터 페루프 형태로 존재하는 어핀 Type III 퍼지 시스템의 가안정성은 다음의 수정정리 1과 같이 주어진다.

수정정리 1.

식 (16)으로 나타나는 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템은 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 \mathbf{P} 와 $\tau_{ijq} \geq 0$ ($i \leq j \leq r$, $i = j \neq \xi$, $q=1, \dots, n$)가 존재하면 식 (18)으로 표현되는 퍼지 제어기에 의해 안정화 될 수 있다.

$$\mathbf{G}_{\xi\xi}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{\xi\xi} - \mathbf{P} < 0, w_\xi(0) = 1 \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} - \mathbf{P} - \sum_{q=1}^n \tau_{ijq} \mathbf{T}_{ijq} & \mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\mu}_{ij} - \sum_{q=1}^n \tau_{ijq} \mathbf{u}_{ijq} \\ \boldsymbol{\mu}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} - \sum_{q=1}^n \tau_{ijq} \mathbf{u}_{ijq}^T & - \sum_{q=1}^n \tau_{ijq} v_{ijq} \end{pmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$(i \leq j \leq r, i = j \neq \xi, q=1, \dots, n)$$

여기서

$i=1, \dots, r$ 에 대하여

$$\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i, \quad \boldsymbol{\mu}_{ii} = \boldsymbol{\mu}_i,$$

$i < j \leq r$ 에 대하여

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) + (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i)}{2},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_j}{2}$$

V. 모의 실험

본 장에서는 제안된 퍼지 시스템 안정도에 근거하여 어핀 Type III 퍼지 시스템에 대한 제어를 설계하도록 한다. 제어 하고자하는 시스템은 다음의 식 (23)으로 나타나는 어핀 Type III 퍼지 시스템이다.

R_1 : If $x_1(k)$ is M_1 ,

$$\text{then } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\mu}_1$$

R_2 : If $x_1(k)$ is M_2 ,

$$\text{then } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\mu}_2 \quad (23)$$

R_3 : If $x_1(k)$ is M_3 ,

$$\text{then } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\mu}_3$$

여기서 $\mathbf{x}^T(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

위 시스템의 소속함수는 그림 1과 같다.

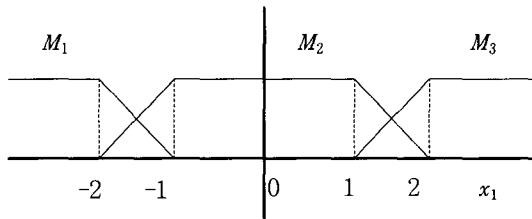


그림 1. 어핀 Type III 퍼지 시스템의 전진부 소속함수
Fig. 1. Membership functions of the IF parts of the affine Type III system.

위의 플랜트에 대하여 병렬 보상 기법을 이용하여 식 (24)로 주어지는 퍼지 제어기를 설계한다.

L_j : If $x_1(k)$ is M_{j1} ,

$$\text{then } \mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_j \mathbf{x}(k) \quad (j=1,2,3) \quad (24)$$

퍼지 제어기는 \mathbf{G}_{11} , \mathbf{G}_{22} , \mathbf{G}_{33} 의 고유치가 (0.2, 0.3)에 위치하도록 설정하고 그 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_1 = (-0.8800 \ 0.3800)$$

$$\mathbf{K}_2 = (-0.7760 \ -0.0520)$$

$$\mathbf{K}_3 = (-0.7600 \ -0.1200)$$

이 경우 폐루프 부시스템과 그 밖의 행렬은 다음과 같

이 나타난다.

(1, 1)규칙에 대하여,

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{pmatrix} 0.1200 & -0.1200 \\ 0.1200 & 0.3800 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{111} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_{111} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{111} = 1.$$

(2, 2) 규칙에 대하여,

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{pmatrix} 0.5520 & -0.3960 \\ 0.2240 & -0.0520 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3, 3) 규칙에 대하여,

$$\mathbf{G}_{33} = \begin{pmatrix} 0.6200 & -0.5600 \\ 0.2400 & -0.1200 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{33} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{331} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_{331} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{331} = 1.$$

(1, 2) 규칙에 대하여,

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{pmatrix} 0.4920 & -0.9060 \\ 0.1720 & 0.1640 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{12} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{121} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_{121} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{121} = 2.$$

(2, 3) 규칙에 대하여,

$$\mathbf{G}_{23} = \begin{pmatrix} 0.5660 & -0.3930 \\ 0.2320 & -0.0860 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_{23} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{231} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_{231} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{231} = 2.$$

이제 다음의 선형 행렬 부등식 문제를 풀어서 식 (23)과 (24)로 주어진 퍼지 시스템의 안정성을 보장하도록 한다.

$$\mathbf{G}_{22}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{22} - \mathbf{P} < \mathbf{0}, \quad w_\xi(0) = 1 \quad \text{and}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} - \mathbf{P} - \tau_{ij1} \mathbf{T}_{ij1} & \mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\mu}_{ij} - \tau_{ij1} \mathbf{u}_{ij1} \\ \boldsymbol{\mu}_{ij}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} - \tau_{ij1} \mathbf{u}_{ij1}^T & -\tau_{ij1} v_{ij1} \end{pmatrix} < \mathbf{0}$$

여기서 $(i, j) = (1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 3)$

위의 선형 행렬 부등식 문제는 근이 존재하며 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 17.6268 & -2.9872 \\ -2.9872 & 25.1695 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\tau_{111} = 17.1155, \quad \tau_{331} = 18.8220,$$

$$\tau_{121} = 7.7315 \quad \text{and} \quad \tau_{231} = 7.4626$$

따라서 식 (23)로 표현되는 비선형 시스템은 (24)로 표현되는 퍼지 제어기에 의해서 안정화된다. 이제 (23)의 퍼지 제어기를 식 (24)으로 표현되는 원래의 비선형 시스템에 적용한 결과를 그림 2에 나타내었다.

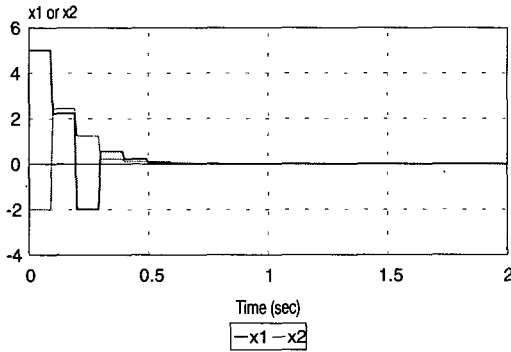


그림 2. 퍼지 제어되는 비선형 시스템의 응답
Fig. 2. The response of the nonlinear system controlled by the fuzzy system.

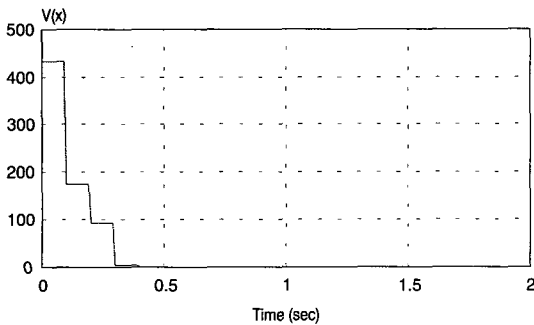


그림 3. 리아프노프 함수
Fig. 3. Lyapunov function.

초기 값을 $x = (5 \ -2)^T$ 으로 하고 샘플링 주기를 0.1초로 하여 모의 실험을 수행한 것으로 0.5초 후 상태변수가 거의 0으로 접근하는 것을 알 수 있다. 그림 3은 (25)의 리아프노프 행렬을 갖는 이차 리아프노프 함수의 변화를 나타내고 있다. 예상과 같이 0으로 접근 수렴함을 알 수 있다.

VI. 결 론

최근 어핀형 Type III 퍼지 제어기에 대하여 많은 이론적 연구를 진행되고 있고 이에 대한 일련의 연구가

발표되고 있다. 이는 어핀형 Type III 퍼지 제어기가 선형 Type III 퍼지 제어기에 좀 더 일반적 형태이기 때문이다.

본 논문에서는 이 같은 연구 동향의 일환으로 이산 시간 어핀 Type III 퍼지 시스템의 안정성을 파악하는 새로운 방식을 제안하였고 이를 이용하여 안정성이 보장되는 퍼지 제어기를 설계하는 방식을 다루었다. 우선 Type III 퍼지 시스템의 안정 조건을 유도하였고 S-과정을 통하여 선형 행렬 부등식 문제로 바꾸어 수치적 해법을 제시하였다. 또 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 조건의 타당성을 확인하였다.

본 논문의 연구 결과는 선형 Type III 시스템의 경우 1992년에 발표된 Tanaka의 논문 [7]에 비견되는 것으로 어핀 Type III 퍼지 시스템의 이론적 연구를 위한 시발점이 될 수 있을 것으로 생각된다.

부록 (S-과정)

F_0, \dots, F_n 이 다음의 식 (A-1)과 같이 x 의 2차 식으로 표현되는 경우를 생각한다.

$$F_i(x) \equiv x^T T_i x + 2u_i^T x + v_i \quad (A-1)$$

이때 다음의 조건 (A-2)를 생각한다.

$$\begin{aligned} F_i(x) &\geq 0, \quad i=1, \dots, n \text{ 인 모든 } x \text{에 대하여} \\ F_0(x) &\geq 0 \end{aligned} \quad (A-2)$$

위의 조건은 다음 부등식 (A-3)을 만족하는 $\tau_i \geq 0$ 이 존재하면 성립한다.

$$\begin{aligned} &\text{모든 } x \text{에 대하여,} \\ F_0(x) - \sum_{i=1}^n \tau_i F_i(x) &\geq 0 \end{aligned} \quad (A-3)$$

이 과정을 S-과정이라 한다.

참 고 문 헌

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy algorithm," Information and Control, vol. 12, pp.94-102, 1968.
- [2] E. H. Mamdani, "Applications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant," Proc. IEE, vol.121, No.2, pp 1585-1588, 1974.

- [3] L. P. Holmblad and J. J. Østergaard, "Control of a cement kiln by fuzzy logic," in M. M. Gupta and E. Sanchez, eds., *Fuzzy Information and Decision Processes*, North-Holland:Amsterdam, pp. 398-409, 1982.
- [4] T. Terano, K. Asai, and M. Sugeno, eds., *Applied Fuzzy Systems*, Academic Press:MA, 1994.
- [5] M. Sugeno, "On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, No. 2, pp 201-224, Apr., 1999.
- [6] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, vol. 15, No. 1, pp116-132, 1985.
- [7] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992.
- [8] K. Tanaka, *A Theory of Advanced Fuzzy Control*, Japan:Kyuritsu Pub, 1994. (In Japanese)
- [9] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, No. 2, pp 119-134, May 1994.
- [10] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp 14-23, Feb 1996.
- [11] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions," in Proc. of IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE), pp.171-176, 1997.
- [12] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp. 1-13, Feb. 1996
- [13] M. A. L. Thathachar and P. Viswanath, "On the stability of fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 5, No. 1, pp 145-151, Feb 1997.
- [14] H. Lam, F. Leung and P. Tam, "Stable and robust fuzzy control for nonlinear systems based on a grid-point approach," in Proc. of IEEE Int'l Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE), pp. 88-92, 1997.
- [15] S. Kim, E. Kim and M. Park, "A new fuzzy adaptive controller using the parallel structure of fuzzy controllers and its application," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 81, pp 205-226, 1996.
- [16] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 19, no. 5, pp. 59-70, 1999.
- [17] C. Fantuzzi and R. Rovatti, "On the approximation capabilities of the homogeneous Takagi-Sugeno model," in Proc. of the 5th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, pp. 1067-1072, New Orleans, USA, 1996.
- [18] M. Sugeno and G. T. Kang, "Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 18, pp 329-346, 1986.
- [19] E. Kim, M. Park, S. Ji and M. Park, "A new approach to fuzzy modeling," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 5, No. 3, pp. 328-337, Aug, 1997.
- [20] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM:Philadelphia, 1994.

저 자 소 개



金 殷 泰(正會員)

1970년 3월 17일 생. 1992년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사, 전체수석). 1994년 2월 : 연세대학교 전자공학과 석사과정 졸업 (공학석사). 1999년 2월 : 연세대학교 전자공학과 박사과정 졸업 (공학박사). 1998년~현재 : IEEE TFS, IEEE SMC, IEEE CAS, FSS등에서 심의위원으로 활동중, 1999년~현재 : 국립한경대학교 제어계측공학과 조교수. 주관심분야는 소프트웨어(인공지능, 퍼지, 신경회로망, 진화이론), 로보틱스와 메카트로닉스, 윈도우프로그래밍 (C/C++/Visual C++), Java등 인터넷 프로그램

李 羲 振(正會員)

1964년 9월 10일생. 1987년 : 연세대학교 전자공학과 졸업. 1989년 : 연세대학교 전자공학과 석사과정 졸업. 1989년~1993년 : (주) 대우통신 종합연구소 연구원. 1993년~1995년 : (주) 에스원 종합연구소 연구원. 1998년 : 연세대학교 전자공학과 박사과정 졸업. 1998년~현재 : 국립 한경대학교 제어계측공학과 교수. 주관심분야는 로보틱스, 강인제어, 지능제어 등임