

論文2001-38SC-3-1

QFT를 이용한 파라미터 불확실성을 갖는 비최소위상 제어시스템의 강인한 제어기 설계

(Design of Robust Controller for Non-minimum Phase System with Parametric Uncertainty using QFT)

金永喆*, 金信求**, 趙泰信*, 崔善旭*, 金瑾植***

(Young Chol Kim, Shin Ku Kim, Tae Shin Cho, Sun Wook Choi, and Keun Sik Kim)

요약

본 논문은 파라미터 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템의 강인제어 문제를 고려한다. 먼저 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템을 구간 최소위상 전달함수군과 *Pade'* 근사화 형태로 시간지연 성분으로 변환하는 새로운 방법을 제시한다. 제안하게 될 제어기는 비최소위상 플랜트로 인한 시간지연 거동을 보상할 수 있도록 Smith 예측기 구조를 갖는 보상기로 구성된다. 최소위상 플랜트군의 피드백 제어기는 구조적 불확실성에 대해 주파수 영역의 설계사양의 강인 안정도를 만족하도록 QFT를 이용하여 설계되었다. 전체 시스템의 안정도와 성능은 예제를 통하여 입증한다.

Abstract

We consider the robust control problem for non-minimum phase(NMP) systems with parametric uncertainty. First, a new method that translates such an uncertain NMP system into a interval family of minimum phase(MP) transfer functions followed a time delay term in the form of *Pade'* approximation is presented. The controller to be proposed consists of a compensator with Smith predictor structure, so that it can compensate the time delay behaviour due to NMP plant. Therein, the main feedback controller for a family of MP plants has been designed by using quantitative feedback theory(QFT) such that satisfies the robust stability against the structured uncertainty. The stability and performance of overall system are examined through an illustrative example

I. 서론

* 正會員, 忠北大學校 電氣電子工學部
(School of Electrical and Electronics Engineering,
Chungbuk Nat'l Univ.)

** 正會員, 現代自動車 蔚山研究所
(Hyundai Motors, Ulsan Research Institute)

*** 正會員, 大川大學 컴퓨터電子電氣系列
(Daechon College, Computer, Electronic and Electric
Engineering)

接受日字:2000年3月28日, 수정완료일:2001年4月2日

비최소위상 시스템에 대한 제어기의 설계사양이 주파수 응답의 크기에 대한 유계 조건으로 주어질 때 매우 어려운 문제가 된다^[1,2].

비최소위상 시스템을 위한 제어기 설계방식으로는 극배치 방법^[3], 비최소위상을 최소위상 시스템으로 변환시키기 위한 전향보상기(feedforward compensator)설계 방법^[4], 고차의 비최소위상 시스템을 균형 모델 저차화 방법을 이용하여 저차의 최소위상 시스템으로 변환시키는 방법^[5] 등이 제시되었다. 모델 불확실성과 비

최소위상 시스템에도 적용할 수 있는 강인 제어기 설계 방법으로는 H_2 , H_∞ , LQG/LTR, QFT 등이 있으며 각기 적용 조건에 따라 장, 단점이 있다. 실제 비최소위상이며 구조적 불확실성을 갖는 예로는 항공기, 유도 무기 제어 시스템 등에서 흔히 나타난다. 본 논문의 출발점인 일반적인 QFT 접근 방식은 비최소위상 모델을 최소위상 시스템과 전역통과 필터(all-pass filter, 또는 우반평면 영점의 Blaschke products)로 분해하고, 최소 시스템에 근거하여 전역통과 필터의 위상 지연을 고려하여 루프형성(loop shaping)을 한다^[6,7]. 그런데 이 방법은 이론적으로는 명확하게 설명이 되지만 실제 전역통과 필터만큼의 위상을 고려한 루프형성이 매우 어렵울 뿐만 아니라 시간영역에서 비최소위상에 따르는 응답 지연 특성을 보상하기 어렵다.

본 논문에서는 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템을 지연시간 부분과 구간 최소위상 시스템으로 분해한 후, 구간 최소위상 시스템에 근거하여 출력피드백 보상기를 설계하고 지연시간을 보상하기 위해 Smith 예측기^[8-10]를 이용하는 방법을 제안한다. 모델 불확실성에 기인한 Smith 예측기의 감도에 대한 강인성을 갖게 하기 위해 최소위상 시스템에 대해서는 QFT 기법을 적용하였다. 본 논문의 구성은 먼저 2장에서 다루고자 하는 문제를 설정하고, 3장에서는 논문에 필요한 예비 결과를 정리한다. 4장은 비최소위상 시스템에 대한 강인제어기 설계 과정을 다루고, 제시한 설계 방법이 강인 안정도를 보장할 수 있음을 해석적으로 입증한다. 5장에서 적용예를 통하여 제시한 방법의 유용성을 보인 다음 6장에서 결론을 맺는다.

II. 문제의 설정

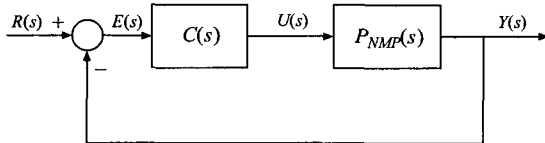


그림 1. 피드백 시스템
Fig. 1. Feedback System.

그림 1에서 $P_{NMP}(s)$ 는 식(1)과 같이 유한 크기의 파라미터 불확실성을 갖는 구간 시스템(interval system)이고, 불확실성 영역에 대해서 최소한 한 개 이

상의 영점이 우반평면에 존재하는 비최소위상 시스템이라 가정한다.

$$P_{NMP}(q, s) := \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_m s^m + N_{m-1} s^{m-1} + \dots + N_0}{D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_0},$$

$$C(s) := \frac{C_1(s)}{C_2(s)} \quad (1)$$

여기서, $n > m$ 이고

$$N_i \in [N_i^-, N_i^+], i=0, 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$D_j \in [D_j^-, D_j^+], j=0, 1, \dots, n.$$

상첨자 + 와 - 는 각각 파라미터 불확실성의 상, 하한치를 표시한다. 불확실성 파라미터 벡터 q 와 그 영역 Q 를 다음과 같이 정의한다.

$$q := [N_0 \ N_1 \ \dots \ N_m \ D_0 \ D_1 \ \dots \ D_n] \quad (3)$$

$$Q := \{q \mid q_i \in [q_i^-, q_i^+], i=1, 2, \dots, (n+m+2)\} \quad (4)$$

본 논문에서는 이러한 구간 비최소위상 시스템에 대해 다음 특성을 만족시키는 제어기 설계방법을 제시하고자 한다.

(1) 구조적 불확실성 $q \in Q$ 에 대해 주파수영역의 안정도 여유를 만족시킨다.

(2) 비최소위상에 기인한 응답지연 특성을 보상하여 최소위상에 준하는 제어성능을 갖게 한다.

위의 설계 목적을 위해 먼저 구간 비최소위상 시스템을 구간 최소위상 시스템과 *Pade'* 근사식으로 나타낸 지연시간부분으로 분해하는 방식을 이용한다. 다음으로 구간 최소위상 시스템에 대해 안정도 여유를 갖도록 QFT기법을 이용하여 보상기를 설계하고, 지연시간에 대해서는 Smith 예측기를 구성하여 보상하게 된다.

III. 예비 결과

본 장에서는 비최소위상 시스템에 대한 기본특성, 지연시간의 *Pade'* 근사화, 제어기 설계방법으로 전역통과 필터 분해를 이용한 QFT방법을 요약한다. 또한, 주파수영역에서 구조적 불확실성을 갖는 시스템의 강인 안정성 해석 방법에 대해 간략히 기술한다.

1. 비최소위상 시스템의 응답특성
 모델 불확실성이 없으며, 안정하고 진분수(strictly proper)전달함수인 비최소위상 시스템을 고려한다. 즉,

$$P_{NMP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{M(s) \prod_{i=1}^n H(z_i - s)}{\prod_{i=1}^r (p_i + s)} \quad (5)$$

($r = n - m, \quad z_i, p_i > 0$)

여기서, $M(s)$ 는 $m - \eta$ 차 Hurwitz 다항식이고 p_i, z_i 는 $P(s)$ 의 극과 영점이다. r 은 영점 수보다 많은 극의 수를 표시하고 $y(t)$ 를 스텝 응답이라고 한다.

정의3.1 : [언더슈트]^[14] 스텝응답 $y(t)$ 가 다음 두 조건을 만족한다고 가정한다.

- (i) $\frac{d^k y(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^+} = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq r-1 \\ k \neq 0 & k = r \end{cases}$
- (ii) $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 0$

이 조건아래서 $y^{(r)}(0_+)y(\infty) < 0$ 이면 $y(t)$ 는 「A형 언더슈트」를 갖는다고 정의하며, $y^{(r)}(0_+)y(\infty) > 0$ 이고 $y(t)y(\infty) < 0, \forall t \in (a, b)$ 인 구간 (a, b) 가 존재하면 $y(t)$ 가 「B형 언더슈트」를 갖는다고 정의한다. 이 두 경우가 아니면 $y(t)$ 는 전혀 언더슈트를 갖지 않는다. $\nabla \nabla \nabla$

A형 언더슈트는 스텝응답초기에 정상상태 값과 반대 부호의 응답을 나타내며, B형 언더슈트는 초기응답은 $y(\infty)$ 와 같은 부호이지만 중간에 언더슈트를 일으키는 경우이다.

정리 3.1^[14] : A형의 언더슈트가 발생할 필요충분조건은 시스템의 실수 영점(real zero) 수가 기수 개일 때이다. $\nabla \nabla \nabla$

$y(\infty) > 0$ 인 시스템에서 RHP 공액 영점을 갖는 경우에는 영점의 위치와 극의 위치에 따라 음의 응답특성이 일어나지 않을 수도 있다.

2. 지연시간의 *Pade'* 근사화
 지연시간 전달함수 $\exp(-T_d s)$ 의 *Pade'* 근사식과 성질을 정리하기로 한다. 지연시간 $\exp(-T_d s)$ 의 η 차 *Pade'* 근사식은 분모, 분자 다항식의 차수가 모두

η 차인 유리함수로 표현된다. 이것을 $T_\eta(s) = F_\eta(s)/E_\eta(s)$ 라 하면 분모 다항식은 다음과 같다^[9].

$$E_\eta(s) = 1 + \frac{sT_d}{2} + \frac{(sT_d)^2}{2!} \frac{\eta(\eta-1)}{2\eta(2\eta-1)} + \frac{(sT_d)^3}{3!} \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{2\eta(2\eta-1)(2\eta-2)} + \dots$$

$$= 1 + e_1 s^1 + e_2 s^2 + \dots + e_\eta s^\eta \quad (6)$$

분자 다항식은 $F_\eta(s) = E_\eta(-s)$ 의 관계를 갖기 때문에 $T_\eta(s)$ 는 전역통과 필터(all pass filter)의 특성을 갖는다. 다시 말해, $E_\eta(s)$ 의 모든 근은 s 평면의 좌반면에 존재하지만 $F_\eta(s)$ 의 모든 근은 우반평면에 존재하며 $j\omega$ 축에 대해 $E_\eta(s)$ 의 근과 대칭인 위치에 놓이게 된다^[9]. $\eta=2$ 일 때 $F_\eta(s)$ 는 다음과 같다.

$$F_2(s) = 1 - sT_d/2 + (sT_d)^2/12 = 1 - e_1 s + e_2 s^2 \quad (7)$$

따라서, $T_2(s) = \frac{1 - e_1 s + e_2 s^2}{1 + e_1 s + e_2 s^2}$ 이 된다.

3. 불확실성을 갖는 비최소위상계의 QFT설계
 QFT는 구조적 불확실성을 갖는 플랜트와 단위 피드백 구조의 SISO 제어계에 대해 니콜스 선도(Nichols chart)에서 루프 전달함수의 루프형상(loop shaping)을 통해 제어를 설계하는 방식이다^[6]. 고전제어 방식을 확장하여 불확실성을 고려한 강인 제어기(robust controller)설계가 가능하도록 고려한 것으로, 고전제어의 주요 장점인 설계의 용이성, 실제 구현 전에 필요한 재조정(re-tuning)의 용이성 등이 보존되는 장점을 갖는다. 다변수계, 비선형계에의 적용도 부분적으로 가능하나 고전제어가 갖는 한계성을 넘지는 못한다. 본 절에서는 4절의 주요 결과와 대비시키기 위해 불확실성을 갖는 비최소위상계의 QFT설계를 간단히 정리하고자 한다. 먼저 간단한 예를 통해 비최소위상계가 갖는 제어성능의 한계성(performance limitation)문제를 다루기로 한다. 플랜트 $P(s)$ 가 안정하나 s -평면의 우반 평면(right half plane : RHP)에 실수 영점을 한 개 갖는 경우를 고려하기로 한다. 즉,

$$P(s) = P_1(s)(z - s) \quad (8)$$

여기서, z 는 양의 상수이며, $P_1(s)$ 는 진분수이고 안정

인 최소 위상 전달함수이다. 식(8)은 전역필터 함수(또는 Blaschke 곱)을 이용하여 다시 나타내면,

$$P(s) = P_1(s)(z+s) \left[\frac{z-s}{z+s} \right] = P_{MP}(s)B(s) \quad (9)$$

$B(s)$ 는 다음 주파수 응답 특성을 갖는다.

$$|B(j\omega)| = \left| \frac{z-j\omega}{z+j\omega} \right| = 1, \quad \forall \omega \quad (10)$$

$$\angle B(j\omega) = -2 \tan^{-1} \frac{\omega}{z} = \begin{cases} -53.1^\circ, & \omega = \frac{z}{2} \\ -90^\circ, & \omega = z \\ -180^\circ, & \omega = \infty \end{cases} \quad (11)$$

그림 1의 피드백 시스템에서 루프 전달함수는

$$L(s) = C(s)P(s) = C(s)P_{MP}(s)B(s) = L_{MP}(s)B(s) \quad (12)$$

이제, $L(s)$ 가 이득교차주파수 ω_c 에서 위상여유 $PM \geq 30^\circ$ 를 만족하려면 $L_{MP}(s)$ 의 위상지연은 어느 정도를 가질 수 있는지를 조사함으로써 비최소위상계의 제어성능 한계성을 보기로 한다. 식(10)에 의해 전역필터함수 $B(s)$ 는 크기가 항상 1이므로, 식(12)로부터 위상특성만 고려하면

$$\angle L(j\omega_c) = \angle L_{MP}(j\omega_c) + \angle B(j\omega_c) \geq -\pi + PM \quad (13)$$

$$\Rightarrow \angle L_{MP}(j\omega_c) \geq -\pi + PM - \angle B(j\omega_c) \quad (14)$$

특정 주파수 $\omega = \frac{z}{2}, z, 2z, 3.73z$ 에서 $L_{MP}(j\omega)$ 에 허용되는 위상지연을 계산하면 표 1과 같다.

표 1. $PM \geq 30^\circ$ 보장을 위한 $L_{MP}(s)$ 의 위상 지연 허용치

Table 1. Allowable phase lag of $L_{MP}(s)$ when $PM \geq 30^\circ$

ω_c [rps]	$\angle B(j\omega_c)$ [deg]	$\angle L_{MP}(j\omega_c)$ [deg]	$ L(j\omega) _{slope}$ [dB/dec/deg]
$z/2$	-53°	-97°	-21.6°
z	-90°	-60°	-13.3°
$2z$	-127°	-23°	-5.1°
$3.73z$	-150°	0°	0°

$L(s)$ 가 $-p$ 점에서 한 개의 실수 극을 가지면, $\omega \gg p$ 에 대해 $\angle L(j\omega) = -90^\circ$, $|L(j\omega)| = -20 \text{ dB/dec}$ 의 경사

를 갖게 된다. 다수개의 실수 극-영점을 갖는 $L(s)$ 에 대해서도 주파수 영역에서 이 두 값의 비 $-20/90 \text{ (dB/dec)/deg}$ 가 보존되는 성질이 있다^[6]. 이 관계는 루프형상에 의한 제어기 설계 시 매우 유용하게 이용된다.

표 1의 결과는 RHP 영점으로 인해 $\angle L_{MP}(s)$ 의 루프형상 경계(bound) 조건이 $B(j\omega)$ 위상만큼 니콜스 선도의 -180° 축에서 우측으로 이동되어야 함을 나타내고 있다.

또한, 이득 교차 주파수 ω_c 가 영점 주파수 z [rad/sec] 보다 3.73배인 경우에는 $L_{MP}(s)$ 의 위상지연 여유가 영입을 알 수 있다. 반대로 해석하여 $\angle L_{MP}(j\omega_c)$ 와 위상여유 PM 이 주어졌다면, 식(13)로부터

$$\pi - PM + \angle L_{MP}(j\omega_c) \geq -\angle B(j\omega_c) = -2 \tan^{-1} \frac{\omega_c}{z} \quad (15)$$

정리하면, 이득교차 주파수는 다음 제약식으로 나타난다.

$$\omega_c \leq z \tan \left[\frac{(\pi - PM + \angle L_{MP}(j\omega_c))}{2} \right] \quad (16)$$

예로서, $\angle L_{MP}(j\omega_c) = -60^\circ$, $PM = 30^\circ$ 이면 $\omega_c \leq z$ 이어야 한다. 다시 말해 이 경우는 루프 전달 함수의 이득교차 주파수 ω_c 를 RHP 영점 주파수 z 보다 크게 설계할 수 없음을 의미한다. 단위 피드백 시스템 구조에서는 일반적으로 $\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c$ 관계가 있으므로^[2,6], 페루프 시스템의 대역폭 ω_{BW} 는 다음 제약 조건식으로 표현된다.

$$\omega_{BW} \leq 2z \tan \left[\frac{(\pi - PM + \angle L_{MP}(j\omega_c))}{2} \right] \quad (17)$$

또 다른 예로서, 다음과 같이 RHP 복소영점을 포함하는 경우를 고려하자.

$$B(s) = \frac{(1-0.25s)(10-2s+s^2)}{(1+0.25s)(10+2s+s^2)} \quad (18)$$

$PM = 30^\circ$, $\angle L_{MP}(j\omega_c) = -110^\circ$ 를 허용한다면 $\angle B(j\omega_c) \leq 40^\circ$ 이어야 하므로 식(15)으로부터 $\omega_c \leq 0.77$ [rad/sec]로 제한된다. ω_c 또는 ω_{BW} 의 크기가 한정된다는 것은 시간영역에서 볼 때 응답속도를 임의로

빠르게 설계할 수 없다는 것을 의미한다.

이제 불확실성을 갖는 비최소위상계의 QFT 설계 문제를 고려하기로 한다. 플랜트의 RHP 영점 수는 모델 계수의 불확실성에도 불구하고 변하지 않으며 플랜트는 안정하다고 가정한다. 플랜트의 모든 RHP 영점이 다항식 $N(-s)$ 에 포함된다고 하자.

루프전달함수를 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$L(s) = P(s)C(s) = N(-s)P_1(s)C(s) \\ = \left[\frac{N_o(-s)}{N_o(s)} \right] N_o(s)P_{1o}(s)C(s) \left[\frac{N(-s)}{N_o(-s)} \frac{P_1(s)}{P_{1o}(s)} \right] \quad (19) \\ = [B_o(s)][L_{MPo}(s)][V(s)] = [L_o(s)][V(s)]$$

여기서, 첨자 “o”는 불확실성이 없는 공칭치를 표시 하며, $P_1(s)$ 는 $P(s)$ 에서 RHP 영점 다항식을 분리한 나머지 부분의 전달함수로 안정하며 최소위상이다. $V(s)$ 는 $L(s)$ 의 유일한 불확실성 부분으로 QFT설계^[6,15]과정에서 니콜스 선도상에 템플릿(templates)으로 표시하게 된다. 이것은 $|L(j\omega)|$ 의 크기 변화분이 다음 식으로 주어지기 때문이다.

$$\Delta \log |L(j\omega)| = \Delta \log |V(j\omega)| \quad (20)$$

식(19)로부터 $L_o(s)$ 에 대한 경계조건을 $B_{L_o}(w)$ 라 하면 $L_o(s) = B_o(s)L_{MPo}(s)$ 이므로 $L_{MPo}(s)$ 에 대한 경계조건 $B_{MP}(w)$ 는 다음식으로 나타난다.

$$B_{MP}(w) = B_{L_o}(w)B_o(jw)^{-1} \quad (21)$$

결국, $|B_o(w)| = 1 \quad \forall \omega, \quad \angle B_o(j\omega) < 0$ 이므로 $B_{MP}(w)$ 는 $B_{L_o}(w)$ 를 $\angle B_o(j\omega)$ 만큼 우측으로 이동한 것이다. 일반적으로 $B_{L_o}(w)$ 에 대한 $L_o(s)$ 를 형상화하는 것보다는 최소위상 루프전달함수인 $L_{MP}(s)$ 를 경계조건 $B_{MP}(w)$ 에 대해 설계하는 것이 편리하다.

4. 구조적 불확실성을 갖는 시스템의 강인 안정성 해석방법

본 절에서는 그림 1의 피드백 시스템에서 식(1), (2)의 구간 플랜트로 주어지는 경우 설계된 제어기의 강인 안정성을 해석할 수 있는 매우 유용한 방법을 정리하고자 한다. 이는 근사적으로 구한 제어기의 강인성을 완전히 해석하는데 적용될 수 있으며 5장에서 그 예를 보이기로 한다.

다음 구간다항식을 고려한다.

$$P := \{P(s) \mid P(s) = \delta_n s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \delta_1 s + \delta_0, \\ \delta_i \in [\delta_i^-, \delta_i^+], i = 0, 1, \dots, n\} \quad (22)$$

$P(s)$ 의 Kharitonov 다항식 $K_P(s)$ 와 Kharitonov 선분 $S_P(s)$ 는 다음과 같이 정의된다^[11,12].

$$K_P := \{K_P^1, K_P^2, K_P^3, K_P^4\} \quad (23)$$

여기서,

$$S_P(s) := \{ \lambda K_P^i(s) + (1 - \lambda) K_P^j(s) \mid \lambda \in [0, 1], (i, j) \in \{(1, 3), (1, 4), (4, 2), (3, 2)\} \} \quad (24)$$

$$K_P^1 := \delta_0^- + \delta_1^- s + \delta_2^+ s^2 + \delta_3^+ s^3 + \delta_4^- s^4 + \dots \\ K_P^2 := \delta_0^- + \delta_1^+ s + \delta_2^+ s^2 + \delta_3^- s^3 + \delta_4^- s^4 + \dots \\ K_P^3 := \delta_0^+ + \delta_1^- s + \delta_2^- s^2 + \delta_3^+ s^3 + \delta_4^+ s^4 + \dots \\ K_P^4 := \delta_0^+ + \delta_1^+ s + \delta_2^- s^2 + \delta_3^- s^3 + \delta_4^+ s^4 + \dots \quad (25)$$

식(1)의 분모 분자 다항식의 Kharitonov 다항식과 Kharitonov 선분을 각각 식(23)~(25)에 따라 정의하고 이를 이용하여 다음의 특정 집합을 정의한다.

$$(N \times D)_E := \{N(s), D(s) \mid N(s) \in K_N(s), D(s) \in S_D(s) \\ \text{또는 } N(s) \in S_N(s), D(s) \in K_D(s)\} \quad (26)$$

$$P_E(s) = \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} \mid (N(s), D(s)) \in (N \times D)_E \right\} \quad (27)$$

정리3.1 Generalized Kharitonov Theorem^[11,12] : 그림 1의 구간시스템의 모든 $P(s) \in P(s)$ 에 대하여 페루프 시스템이 강인 안정이기 위한 필요충분조건은 모든 $P(s) \in P_E(s)$ 에 대하여 안정도를 만족하는 것이다.

정리3.2 Nyquist Envelope^[12] : 그림1의 루프전달함수의 Nyquist envelopes은 $L_E(s) = C(s) P_E(s)$ 의 Nyquist plot에 포함된다.

위의 두 정리는 설계된 제어기가 강인 안정도와 주어진 설계명세를 만족하는지를 정확하게 해석할 때 이용할 수 있다.

IV. 구간 비최소위상 시스템의 강인 제어기 설계

본 절에서는 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템을 지연시간 부분과 구간 최소위상 (interval MP)

시스템으로 분해한 후, 구간 최소위상 시스템에 근거하여 피드백 보상기를 설계하고 지연시간을 보상하기 위해 Smith 예측기^[8~10]를 이용하는 방법을 제안한다. 모델 불확실성에 대한 Smith 예측기의 강인성을 고려하기 위해 최소위상 시스템에 대한 루프형성시 QFT기법을 적용한다.

1. 구간 비최소위상 시스템의 분해

먼저, 구간 비최소위상 전달 함수를 구간 최소위상 전달함수와 근사화 지연시간 항으로 분해하는 방법을 기술한다. 식(1)의 $P_{NMP}(s)$ 에서 분자 $N(s)$ 가 구간 다항식이지만 모서리 정리(edge theorem)^[12]를 이용하면 쉽게 우반평면에 존재하는 영점의 수(η)를 알 수 있다. 이하, $P_{NMP}(s)$ 의 정상상태 이득은 양의 부호를 갖는다고 가정한다. $P_{NMP}(s)$ 의 스텝응답에서 초기시작으로부터 출력이 음의 값에서 양의 응답을 나타내는 시점까지의 평균 경과 시간을 지연시간 T_d [sec]로 선택한다. 여기서 다음을 정의한다.

정의4.1 : 식(1), (2)로 표현된 두개의 구간 시스템 $P_A(s)$ 와 $P_B(s)$ 를 고려한다. $P_A(s)$ 와 $P_B(s)$ 의 분모, 분자의 차수는 불확실성에 대해 각기 동일 차수를 갖는다고 가정한다. 각 다항식의 계수가 다음 조건을 만족하면 $P_A(s)$ 는 $P_B(s)$ 의 부분 집합으로 정의한다. 즉, $P_A(s) \subseteq P_B(s)$ 이다.

$$\begin{aligned} i) \quad & N_{Bi}^- \leq N_{Ai}^-, \quad N_{Bi}^+ \geq N_{Ai}^+, \quad i=0, 1, \dots, n \\ ii) \quad & D_{Bi}^- \leq D_{Ai}^-, \quad D_{Bi}^+ \geq D_{Ai}^+, \quad i=0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (28)$$

다음 정리는 구간 비최소위상 시스템 $P_{NMP}(s)$ 를 η 차 Pade' 근사식과 구간 최소위상 시스템 $P_{MP}(s)$ 로 분해할 수 있음을 나타낸다.

정리4.1 : η 개의 우반평면 영점을 갖는 안정한 구간 비최소위상 시스템 $P_{NMP}(q, s)$ 에 대해, $T_\eta(s)$ 를 η 차 Pade' 근사식이라 하면 다음을 만족하는 구간 최소위상 시스템 $P_{MP}(x, s)$ 가 존재한다.

$$P_{NMP}(q, s) \subset P_A(x, s) = P_{MP}(x, s) T_\eta(s) \quad (29)$$

여기서,

$$P_{MP}(s) = \frac{b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0}{a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \dots + a_0} \quad (30)$$

$$b_i \in [b_i^-, b_i^+], \quad i=0, 1, \dots, l \quad (31)$$

$$a_j \in [a_j^-, a_j^+], \quad j=0, 1, \dots, k \quad (32)$$

$$x := [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_l] \quad (33)$$

$$X := \{x \mid x \in [x_i^-, x_i^+], \quad i=1, 2, \dots, (k+l+2)\},$$

$$l = m - \eta, \quad k = n - \eta \quad (34)$$

증명 : $P_A(s)$ 의 분모, 분자 다항식 계수는 x 의 1차 함수로 나타나며, 식(29)가 성립하는 x 는 유일하게 구할 수는 없으나 구간 시스템 $P_{NMP}(s)$ 가 식(29)의 우변식의 부분 집합이 되게 하는 x 의 해는 선형계획(linear programming : LP) 문제로 변환되어 해의 존재 여부를 판단할 수 있다. $P_{NMP}(s)$ 의 분자다항식을 먼저 고려한다. $N(s)$ 가 불확실성 영역에 대해서 η 개의 영점이 우반평면에 존재한다고 가정하자. 영점이 η 개이므로 3.2절에 따라 η 차 Pade' 분자 다항식을 $F_\eta(s)$ 라 하고 다음을 정의한다.

$$N := \{N(s) \mid N(s) = N_m s^m + N_{m-1} s^{m-1} + \dots + N_1 s + N_0, \quad N_i \in [N_i^-, N_i^+], \quad i=0, 1, \dots, m\} \quad (35)$$

$$N_A(s) = B(s)F_\eta(s) \quad (36)$$

여기서,

$$B(s) = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad b_j \in [b_j^-, b_j^+], \quad j=0, 1, 2, \dots, l, \quad l = m - \eta \quad (37)$$

$$F_\eta(s) = f_\eta s^\eta + f_{\eta-1} s^{\eta-1} + f_{\eta-2} s^{\eta-2} + \dots + f_1 s + f_0 \quad (38)$$

그러므로 식(29)를 증명하는 것은 $N(s) \in N$ 에 대해, $N(s) \subset N_A(s)$ 이 되도록 하는 $B(s)$ 의 존재성을 보이는 문제가 된다. 식(36)를 전개하면 식(39)와 같고, $N(s) \subset N_A(s)$ 가 되기 위해서는 정의4.1에 의해 식(40)을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} N_A(s) &= f_\eta b_l s^{l+\eta} + (f_\eta b_{l-1} + f_{\eta-1} b_l) s^{l+\eta-1} \\ &+ (f_\eta b_{l-2} + f_{\eta-1} b_{l-1} + f_{\eta-2} b_l) s^{l+\eta-2} \\ &+ \dots + (f_2 b_0 + f_1 b_1 + f_0 b_2) s^2 + (f_1 b_0 + f_0 b_1) s + f_0 b_0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 f_{\eta} b_i^- &\leq N_m^- \\
 f_{\eta} b_{i-1}^- + f_{\eta-1} b_i^- &\leq N_{m-1}^- \\
 f_{\eta} b_{i-2}^- + f_{\eta-1} b_{i-1}^- + f_{\eta-2} b_i^- &\leq N_{m-2}^- \\
 &\vdots \\
 f_2 b_0^- + f_1 b_1^- + f_0 b_2^- &\leq N_2^- \\
 f_1 b_0^- + f_0 b_1^- &\leq N_1^- \\
 f_0 b_0^- &\leq N_0^- \\
 f_{\eta} b_i^+ &\geq N_m^+ \\
 f_{\eta} b_{i-1}^+ + f_{\eta-1} b_i^+ &\geq N_{m-1}^+ \\
 f_{\eta} b_{i-2}^+ + f_{\eta-1} b_{i-1}^+ + f_{\eta-2} b_i^+ &\geq N_{m-2}^+ \\
 &\vdots \\
 f_2 b_0^+ + f_1 b_1^+ + f_0 b_2^+ &\geq N_2^+ \\
 f_1 b_0^+ + f_0 b_1^+ &\geq N_1^+ \\
 f_0 b_0^+ &\geq N_0^+
 \end{aligned}
 \tag{40.a}$$

식(40)은 행렬-벡터형으로 표현하면 다음과 같다.

$$A b^- \leq N^-, A b^+ \geq N^+ \tag{41}$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} f_{\eta} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ f_{\eta} & f_{\eta-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ f_{\eta} & f_{\eta-1} & f_{\eta-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_2 & f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & f_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 b^- &= [b_i^- \ b_{i-1}^- \ \cdots \ b_0^-]^T \\
 b^+ &= [b_i^+ \ b_{i-1}^+ \ \cdots \ b_0^+]^T \\
 N^- &= [N_m^- \ N_{m-1}^- \ \cdots \ N_0^-]^T \\
 N^+ &= [N_m^+ \ N_{m-1}^+ \ \cdots \ N_0^+]^T
 \end{aligned}$$

식(41)를 여유변수(slack variable)와 음이 아닌 변수를 이용하여 변형하면 일반적인 선형계획문제가 된다^[3].

LP문제를 풀면 b_i 의 존재여부를 판정할 수 있다. 예로써 $\eta=2$, 즉 플랜트가 2 개의 RHP 영점을 갖는다고 가정하고 플랜트 분자의 차수가 $m=2$, $m=3$ 인 두 경우를 고려하면 식(40)은 다음과 같다.

경우 1 $m=2$ 일 때, (즉 $N(s)=N_2s^2+N_1s+N_0$)

$$N_A(s) = b_0 \cdot F_2(s) = b_0 f_2 s^2 + b_0 f_1 s + b_0 f_0 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 b_0^+ &= \inf \{ b_0 \mid b_0 f_i \geq N_i^+, i=0,1,2 \}, \\
 b_0^- &= \sup \{ b_0 \mid b_0 f_j \leq N_j^-, j=0,1,2 \}
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

경우 2 $m=3$ 일 때, (즉 $N(s)=N_3s^3+N_2s^2+N_1s+N_0$)

$$\begin{aligned}
 N_A(s) &= (b_1s + b_0)(f_2s^2 + f_1s + f_0) \\
 &= f_2b_1s^3 + (f_2b_0 + f_1b_1)s^2 + (f_1b_0 + f_0b_1)s + f_0b_0
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 b_1^- &\leq N_3^- \\
 f_2 b_0^- + f_1 b_1^- &\leq N_2^- \\
 f_1 b_0^- + f_0 b_1^- &\leq N_1^- \\
 f_0 b_0^- &\leq N_0^-
 \end{aligned}
 \tag{45.a}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 b_1^+ &\geq N_3^+ \\
 f_2 b_0^+ + f_1 b_1^+ &\geq N_2^+ \\
 f_1 b_0^+ + f_0 b_1^+ &\geq N_1^+ \\
 f_0 b_0^+ &\geq N_0^+
 \end{aligned}
 \tag{45.b}$$

식(45)을 만족하는 $B(s)$ 의 계수의 상, 하한치 b_1^-, b_0^- 와 b_1^+, b_0^+ 를 구할 수 있게 된다. 분모다항식도 위와 같이 적용하면 식(30)의 $P_{MP}(s)$ 를 구할 수 있다. 따라서 식(29)의 증명이 완성된다. $\nabla\nabla\nabla$

2. 강인제어기 설계

구간 비최소위상 시스템을 위한 강인 제어기 설계를 위해서 먼저 4.1절에서 유도한 바와 같이 구간 비최소 위상 시스템을 구간 최소위상 시스템과 지연시간으로 분해한다. 그리고 구간 최소위상 시스템에 대해서는 요구되는 주파수 영역의 설계사양의 안정도 여유를 만족 시키도록 QFT기법을 이용한 피드백 보상기를 설계한다. 마지막으로 지연시간을 Smith 예측기에 의해 보상한다. 그런데 Smith 예측기는 플랜트의 공칭 모델에 근거하여 설계하기 때문에 모델 불확실성에 민감한 단점이 있으나 모델 불확실성에 대해 안정도 여유를 만족 하도록 설계함으로써 강인성을 보상하게 된다.

제어기 설계가 주파수 영역에서 루프형성이므로 우선 식(46)의 조건 $i), ii)$ 를 만족하는 플랜트의 등카지연 시간 T_d 를 결정한다.

$$\begin{aligned}
 i) \quad |T_{\eta}(j\omega)| &= |e^{-j\omega T_d}| = 1, \\
 ii) \quad \angle T_{\eta}(j\omega) &< \omega T_d, \quad \omega \in [0, \omega_n]
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

여기서, ω_n 은 $P_{MP}(s)$ 에 대해 루프형성 시 고려되는 최대 롤-오프(roll-off) 주파수이다.

그러면 $T_y(j\omega) \subset e^{-j\omega T_d}$ 이고 식(39)로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$P_{NMP}(j\omega) \subset P_{MP}(j\omega) T_y(j\omega) \subset P_{MP}(j\omega) \exp(-j\omega T_d),$$

$$\omega \in [0, \omega_n] \quad (47)$$

식(47)은 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 플랜트를 불확실성을 갖는 저차의 최소위상 플랜트와 지연시간으로 표현할 수 있음을 나타낸다.

이 성질과 Smith 제어기의 원리를 이용하면 그림 1의 구간 비최소위상계를 위한 강인 제어기의 설계문제는 그림 2와 같이 지연시간을 루프밖에 놓고 강인 제어기를 설계하는 문제로 표현할 수 있다.

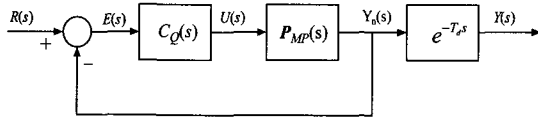


그림 2. 루프 밖에 지연시간을 갖는 블록 선도
Fig. 2. Block diagram with time delay outside the loop.

그런데 그림 2에서 $y_n(t)$ 는 측정 불가능하므로 실현할 수 없다. Smith제어기는 그림 1이 그림 2와 등가가 되기 위한 제어기 구조로 그림 3과 같다.

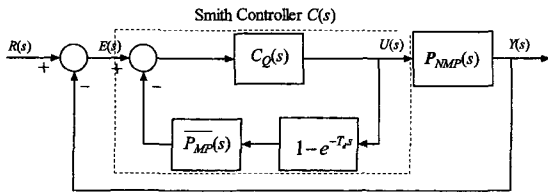


그림 3. Smith 제어기
Fig. 3. Smith Controller.

여기서 $C_Q(s)$ 는 최소위상 시스템에 대해 QFT기법을 적용하여 설계할 제어기이다. QFT설계기법의 상세 내용은 Horowitz^[6,15]을 참조한다. $\overline{P_{MP}}(s)$ 는 공칭 최소위상 시스템이고, $(1 - \exp(-sT_d))$ 를 피드백 시킴으로써 지연시간을 보상하게 된다. 그림 3의 Smith 제어기는 다음과 같다.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{C_Q(s)}{1 + C_Q(s) \overline{P_{MP}}(s) (1 - e^{-sT_d})} \quad (48)$$

플랜트가 파라미터 불확실성을 포함하므로 Smith 제어기를 구성하는 공칭 모델 $\overline{P_{MP}}(s)$ 에 대해 $\overline{P_{MP}}(s) e^{-T_d s} \neq P_{NMP}(q, s)$, $q \in Q$ 이다.

따라서 페루프 시스템의 특성방정식은

$$\delta(q, s) = 1 + C_Q[\overline{P_{MP}}(s) + (P_{NMP}(q, s) - \overline{P_{MP}}(s) e^{-T_d s})]$$

$$= 1 + C_Q[\overline{P_{MP}}(s) + \mathcal{A}(q, s)], \quad q \in Q, \quad (49)$$

여기서,

$$\mathcal{A}(q, s) := P_{NMP}(q, s) - \overline{P_{MP}}(s) e^{-T_d s}. \quad (50)$$

전체 시스템을 안정화시키는 $C_Q(s)$ 의 존재는 다음 정리에 의해 표현된다.

정리 4.2 : $C_Q(s)$ 가 그림 2의 구간 최소 위상계 $P_{MP}(s, x)$, $x \in X$ 를 안정화시키면 그 $C_Q(s)$ 는 그림 3의 전체 피드백 시스템을 안정화한다.

증명 : $C_Q(s)$ 가 그림 2의 피드백 시스템을 안정화한다고 가정한다. 그림 2의 페루프 특성 다항식은 다음과 같다.

$$1 + C_Q(s) P_{MP}(x, s) = 1 + C_Q(s) \{ \overline{P_{MP}}(s) + \overline{\mathcal{A}}(x, s) \} = 0, \quad (51)$$

여기서,

$$\overline{\mathcal{A}}(x, s) = P_{MP}(x, s) - \overline{P_{MP}}(s), \quad x \in X. \quad (52)$$

식(51)를 다시 쓰면,

$$(1 + C_Q(s) \overline{P_{MP}}(s)) (1 + W(s) \overline{\mathcal{A}}(x, s)) \quad (53)$$

여기서,

$$W(s) = C_Q(s) / (1 + C_Q(s) \overline{P_{MP}}(s)) \quad (54)$$

$\overline{P_{MP}}(s) \in P_{MP}(x, s)$, 즉 공칭 모델 $\overline{P_{MP}}(s)$ 는 $P_{MP}(x, s)$ 의 한 모델이고 가정에 의해 식(51)는 안정이므로 식(53)의 $(1 + C_Q(s) \overline{P_{MP}}(s))$ 는 안정이다. 또한 다음 조건이 성립한다.

$$\|W(s) \overline{\mathcal{A}}(x, s)\|_{\infty} < 1 \quad (55)$$

모순논리에 의해 식(55)의 부등식 조건이 성립함을 보이기로 한다. 식(53)이 안정이지만 $\|W(s)\overline{D}(x,s)\|_{\infty} \geq 1$ 이라고 가정하자.

그러면 $W(j\omega)\overline{D}(x,j\omega) = -1$ 인 ω, x 가 존재할 수 있으며 이 경우에는 식(53)의 $C_Q(s)\overline{P}_{MP}(s)$ 의 Nyquist 곡선이 안정도 한계점을 지나게 되어 식(53)은 안정일 수 없다. 이것은 모순되므로 식(55)이 성립해야 한다. 그런데 식(55)조건이 만족하면 잘 알려진 Rouché 정리[12]에 의해 $(1+C_Q(s)\overline{P}_{MP}(s))$ 의 RHP 근의 수와 $(1+C_Q(s)\overline{P}_{MP}(x,s))$ 의 RHP 근의 수는 같게 된다. 식(55)로부터

$$\begin{aligned} \|W(s)\overline{D}(x,s)\|_{\infty} < 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{C_Q(j\omega)\overline{D}(x,j\omega)}{1+C_Q(j\omega)\overline{P}_{MP}(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega, x \in X \\ &\Leftrightarrow |C_Q(j\omega)\overline{D}(x,j\omega)\overline{P}_{MP}(j\omega)| < |1+C_Q(j\omega)\overline{P}_{MP}(j\omega)|, \quad \forall \omega, x \in X \end{aligned} \quad (56)$$

이제 그림 3의 안정도를 해석하기로 한다.

페루프 특성다항식 식(49)를 일부 변경하여 다시 쓰면

$$1+C_Q(s)(\overline{P}_{MP}(s)+P_{MP}(x,s)e^{-T_s s}-\overline{P}_{MP}(s)e^{-T_s s}) \quad (57)$$

식(29)의 관계로부터 식(57)이 안정이면 식(49)도 안정이다. 식(57)은

$$1+C_Q(s)\overline{P}_{MP}(s)(1+W(s)\overline{D}(x,s)e^{-T_s s}) \quad (58)$$

$|e^{-j\omega T_s}| = 1, \forall \omega$ 이고 식(55)을 이용하면

$$\|W(s)\overline{D}(x,s)e^{-T_s s}\|_{\infty} < 1 \quad (59)$$

이다. 따라서 Rouché 정리에 의해 식(58)은 안정이고 이것은 전체 페루프 시스템의 안정을 의미한다. $\nabla \nabla \nabla$

정리 4.1 과 정리 4.2에 근거하여 구간 비최소 위상계의 강인제어기의 설계과정을 정리하면 다음과 같다.

스텝 1 : 주어진 $P_{NMP}(q,s)$ 로부터 RHP 영점수 η 과 개루프 스텝응답으로부터 $T_p(s)$ 를 계산하고 T_d 를 결정한다.

스텝 2 : 식(6)를 이용하여 $T_p(s)$ 를 계산하고, 선형 계획법에 의해 식(47)을 만족하는 $P_{MP}(x,s)$ 와 x 의 집합 X 를 구한다. $P_{MP}(x,s)$ 로부터 한 공칭 모델

$\overline{P}_{MP}(s)$ 를 선택한다. ($\overline{P}_{MP}(s)$ 의 선택에 따라 결과적으로 구해진 제어기는 강인 안정도 설계사양을 만족하더라도 제어성능은 다를 수 있다.)

스텝 3 : QFT를 이용하여 $P_{MP}(x,s), x \in X$ 를 안정화시키고 주어진 설계사양을 만족시키는 제어기 $C_Q(s)$ 를 설계한다.

스텝 4 : 결과적인 Smith 제어기는 식(48)로 구해진다.

스텝 5 : 정리 3.1 또는 정리 3.2에 의해 페루프 시스템의 강인 안정성과 설계사양의 만족 여부를 검증한다.

구간 비최소위상 시스템에 대한 기존의 QFT설계방법은 먼저 임의의 공칭 비최소위상 시스템을 루프형성하기 위한 최소위상 공칭 시스템과 전역통과 필터로 분리하는데 여기서 공칭 시스템의 분모의 차수는 분리하기 전의 비최소위상 시스템의 차수와 같다. 이와 달리 구간 비최소위상 시스템을 구간 최소위상시스템과 지연시간으로 분해하는 방법은 루프형성하기 위한 최소위상 공칭 시스템의 분자, 분모의 차수가 (30)에서와 같이 지연시간항의 차수만큼 각각 감소한다. 따라서 기존의 방법보다 저차의 공칭 시스템으로 루프형성을 할 수 있다. 반면에 원래 플랜트 보다 불확실성 구간이 커지는 단점을 갖는다. 전역통과필터 분리에 의한 제어기 설계방법은 실제 니콜스 선도상에서 루프형성이 매우 어려울 뿐만 아니라 주파수영역에서의 설계명세를 만족하더라도 응답지연 특성은 보상하기 힘들다. 제시한 방법은 지연시간에 대해 Smith 예측기를 이용하여 보상함으로써 주파수응답 설계사양과 응답지연을 보상할 수 있는 장점을 갖는다.

V. 적용 예제

다음의 비최소위상 구간 플랜트를 고려한다.

$$P_{NMP}(s) = \frac{-s+A}{s^3+Bs^2+Cs+D} \quad (60)$$

여기서,

$$A=[1.35 \quad 1.65], \quad B=[3.24 \quad 3.96]$$

$$C=[5.45 \quad 6.67], \quad D=[5.20 \quad 6.36]$$

설계사양으로 위 파라미터 불확실성에 대해 이득여유 5[dB]이상, 위상여유 50[degree]이상, 10%이내의 오

버슈트를 고려하기로 한다. 또한 페루프 시스템의 대역폭은 2.5[rad/s]을 초과하지 않도록 한다.

2단계로 나누어, 스텝 1에서는 먼저 비최소위상 구간 플랜트를 정리 4.1에 의해 최소위상 구간 플랜트와 지연시간 항으로 분해하는 과정을 보이고, 스텝 2에서는 Smith 예측기와 QFT기법을 이용한 제어기 설계과정을 다루기로 한다.

스텝 1. 비최소위상 구간 플랜트의 분해

식(60)의 전달함수는 분자의 1차 항이 음의 부호이기 때문에 비최소 위상의 특성을 갖게 되고($\eta=1$), 스텝 응답으로부터 공칭 모델의 최대 지연시간을 $T_d=1.18$ 초로 결정하였으며, 지연 시간 1.18초에 해당하는 1차의 *Pade'* 근사식은 식(6)과 식(7)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$T_1(s) = \frac{-s+1.7}{s+1.7} \tag{61}$$

식(61)를 이용해 식(29)와 같이 비최소위상 시스템으로부터 최소위상 시스템을 구하면 $P_{MP}(s)$ 는 $P_{NMP}(s)$ 와 $T_1(s)$ 의 차수 관계로부터 식(63)로 표현된다.

$$P_{NMP}(s) \subset P_A(s) = P_{MP}(s)T_1(s) \tag{62}$$

$$P_{MP}(s) = \frac{[r_0^-, r_0^+]}{s^2 + [d_1^-, d_1^+]s + [d_0^-, d_0^+]} \tag{63}$$

$P_{MP}(s)$ 의 분자는 식(43)에 의해 $r_0^- = 0.79$, $r_0^+ = 1.0$ 이 된다. $P_{MP}(s)$ 의 분모의 d_1^- , d_0^- 는 식(45.a)로부터 다음 부등식으로 나타난다.

$$\begin{aligned} d_1^- + e_1 &\leq 3.24 \\ d_1^- e_1 + d_0^- &\leq 5.45 \\ d_0^- e_1 &\leq 5.20 \end{aligned} \tag{64}$$

식(64)를 만족하도록 선택한 하한치는 $d_1^- = 1.54$, $d_0^- = 2.83$ 이다. 같은 방법으로 d_1^+ , d_0^+ 의 조건식은 식(45.b)로부터

$$\begin{aligned} d_1^+ + e_1 &\leq 3.96 \\ d_1^+ e_1 + d_0^+ &\leq 6.67 \\ d_0^+ e_1 &\leq 6.36 \end{aligned} \tag{65}$$

식(65)의 한 해는 $d_1^+ = 2.26$, $d_0^+ = 3.76$ 이다. 따라서 구간 최소위상 시스템 $P_{MP}(s)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$P_{MP}(s) = \frac{[0.79 \ 1.00]}{s^2 + [1.54 \ 2.26]s + [2.83 \ 3.76]} \tag{66}$$

식(62)의 $P_A(s)$ 를 계산해 보면 식(67)과 같다.

$$P_A(s) = \frac{-s+a}{s^3 + bs^2 + cs + d} \tag{67}$$

여기서,

$$a = [1.34 \ 1.70], \quad b = [3.24 \ 3.96]$$

$$c = [5.45 \ 7.60], \quad d = [4.81 \ 6.40]$$

식(60)과 식(67)을 비교하면 $P_{NMP}(s) \subset P_A(s)$ 임을 알 수 있고, $P_{NMP}(s)$ 대신 $P_A(s)$ 에 대해 제어기를 설계할 수 있게 되었다.

스텝 2. 비최소위상 플랜트에 대한 강인 제어기 설계

식(66)과 같이 구간 최소위상 시스템을 구했으므로 최소위상 시스템에 대해 주어진 설계사양을 만족하는 제어기 설계를 위해 QFT를 이용한다.

QFT설계는 *Matlab*[®] 환경에서 실행되는 QFT Toolbox^[16]를 이용하였다. 이 때 선택한 샘플 주파수는 $w = \{0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 5 \ 7 \ 10 \ 50 \ 100\}$ 이고, 이득여유와 위상여유 설계조건은 다음 강인 안정도 경계조건으로 대체하여 설계하였다.

$$\left| \frac{P_{MP}(j\omega) C_Q(j\omega)}{1 + P_{MP}(j\omega) C_Q(j\omega)} \right| \leq 1.2 \tag{68}$$

$P_{MP}(x, s)$ 의 공칭 모델 $\bar{P}_{MP}(s)$ 는 식(66)로부터 다음과 같이 선택하였다.

$$\bar{P}_{MP}(s) = \frac{0.9}{s^2 + 1.9s + 3.3} \tag{69}$$

그림 4는 루프형성 결과를 보여주며 설계된 보상기 $C_Q(s)$ 는 다음과 같다.

$$C_Q(s) = \frac{1.83}{s} \tag{70}$$

Smith 제어기 C(s)를 구하기 위해 식(70)을 식(48)에 대입하고 지연시간 항을 식(61)의 *Pade'* 근사식으로 대체하면 식(71)를 얻는다.

$$C(s) = 1.83 \frac{(s^3 + 3.6s^2 + 6.53s + 5.61)}{(s^4 + 3.6s^3 + 6.53s^2 + 8.77s)} \tag{71}$$

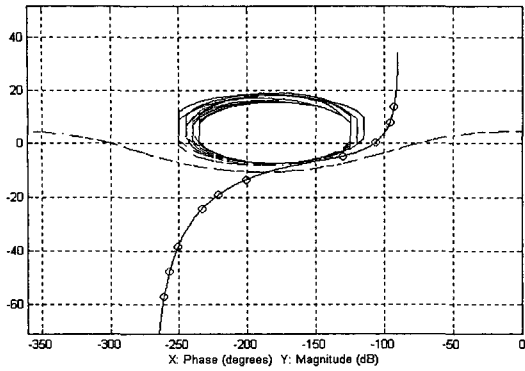


그림 4. $P_{MP}(s)$ 에 대한 니콜선도에서의 루프형성
Fig. 4. Loop shaping for $P_{MP}(s)$ on the Nichols chart.

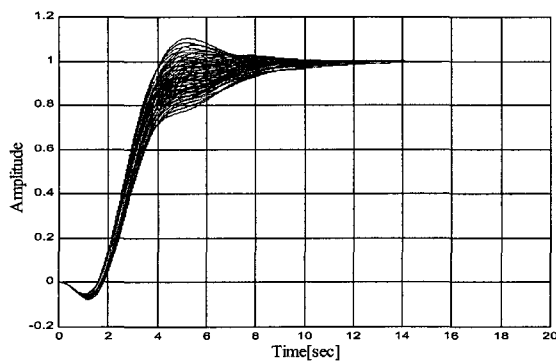


그림 5. 페루프 시스템의 단위스텝응답
Fig. 5. Step response of the closed loop system.

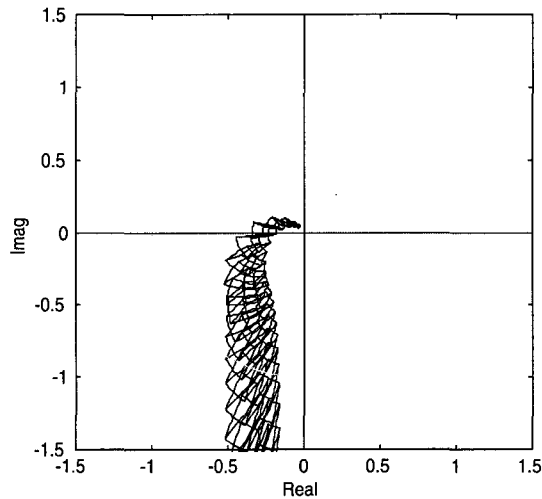


그림 6. 개루프의 나이퀴스트 선도
Fig. 6. Nyquist diagram of the open loop system.

그림 5는 설계한 제어기 식(71)를 포함하는 전체 페

루프 시스템의 스텝응답을 보여준다. RHP 실수 영점이 한 개 존재하므로 정리3.1에 의해 초기에 언더슈트가 나타나게된다. 제어기가 출력피드백 구조를 갖는 경우에는 플랜트의 영점은 항상 페루프 전달함수의 영점으로 나타나게 되어 스텝응답의 언더슈트는 피할 수가 없다. 모델 불확실성에 대해 최대 오버슈트는 설계사양인 10%이내임을 알 수 있다. 그림 6은 설계한 제어기의 강인 안정성을 확인하기 위하여 3.4절의 정리3.3에 의해 루프 전달함수의 Nyquist envelope을 보인 것이다. 최저 이득여유는 6.7dB이고 최저 위상여유는 57.5°를 얻었다. 따라서, 설계한 제어기가 요구사양을 모두 만족시킴을 알 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템에 대한 강인한 피드백 제어기 설계문제를 고려하였다.

먼저, 비최소위상 시스템의 특성을 해석하여 제어능의 한계성(performance limitation) 문제를 규명하였으며, 파라미터 불확실성을 갖는 비최소위상 시스템을 구간 최소위상 시스템과 지연시간으로 분해하는 방법을 제안하였다. 강인제어기 설계는 QFT와 Smith 예측기를 적용하는데, 설계과정은 분리된 구간 최소위상 시스템에 대해 QFT기법으로 보상기를 설계하고 지연시간은 Smith 예측기를 이용하여 보상하는 방법을 고려하였다. 최종 제어기는 Smith 예측기의 지연시간 항을 Padé 근사식으로 치환하여 구하게 된다. 이는 비최소위상 특성을 지연시간으로 고려하여 응답특성을 보상하려는 설계 개념이다. 일단 제어기가 설계되면 전체 제어계의 안정도 해석은 Bhattacharyya 등[12]의 parametric robust control theory를 적용하였다. 한 적용 예를 통해 제시한 방법의 설계과정과 유용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] J. S. Freudenberg and D. P. Looze, *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*, Springer-Verlag, 1988.
[2] I. M. Horowitz, *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, 1963.

[3] H. Elliot, "Direct adaptive pole placement with application to nonminimum phase system," *IEEE Trans. Automatic control*, vol. AC-27, no.6, pp.720~722, 1982.

[4] K. Ohkubo, H. Ohmori and A. Sano, "Adaptive control for partial model matching in frequency domain for non-minimum phase systems," *IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp. 205~210, 1989.

[5] 구세완, 권혁성, 오원근, 서병설, "비최소 위상플랜트의 최소 위상플랜트로의 균형 모델 저차화," *Proc. of KACC*, pp. 1205~1208, 1996.

[6] I. M. Horowitz, *Quantitative Feedback design Theory*, Vol. 1, QFT Publication, 1992.

[7] I. M Horwitz and M. Sidi, "Optimum Synthesis of non-minimum phase feedback system with plant uncertainty," *Int. J. Control*, vol. 27, pp. 361~386, 1978.

[8] M. Morari and E. Zafriou, *Robust Process Control*, Prentice Hall, 1989.

[9] J. E. Marshall, *Control of time-delay systems*, *Institution of Electrical Engineers*, 1979.

[10] W. Levine, *The Control Handbook*, CRC Press, pp. 215~231, 1996.

[11] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem : Robust stability of interval plant," *IEEE. Trans. Automatic Control*, vol. AC-34, pp. 306~311, 1989.

[12] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel, *Robust Control : The Parametric Approach*, Prentice-Hall, 1995.

[13] S. M. Bazaraa and J. J. Jarvis, *Linear programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, 1977.

[14] T. Mita and H. Yoshida, "Undershooting Phenomenon and its Control in Linear Multivariable Servomechanisms," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-26, no. 2, pp. 402~407, 1981.

[15] C. H. Houpis and S. J. Rasmussen, *Quantitative Feedback Theory*, Marcel Dekker Inc., 1999.

[16] C. Borghesani, Y. Chait, and O. Yaniv, *Quantitative Feedback Theory Toolbox For use with MATLAB*, The MathWorks Inc., 1994.

저 자 소 개

金永喆(正會員) 第36卷S編第6號參照

金信求(正會員)
1974년 8월 24일. 1993년 충북대 전자공학과 졸업.
1999년 동대학원 전자공학과 졸업(석사). 1999년 - 현재 현대자동차 울산연구소 연구소 연구원. 관심분야는 강인제어, CDM

趙泰信(正會員) 第36卷S編第6號參照



崔善旭(正會員)
1969년 5월 19일생. 1993년 대전산업대 전자공학과 졸업. 1996년 충북대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1997년 - 현재 동 대학원 박사과정. 관심분야는 강인제어, MMAC, 고장진단



金璿植(正會員)
1963년 5월 2일생. 1985년 한양대학교 공학대학 전자공학과 졸업. 1987년 동대학원 전자공학과 졸업(석사). 1987년 - 1994년 국방과학연구소, 1994년 - 1996년 자동차부품연구원, 1996년 - 현재 대전대학 컴퓨터전자전기계열 조교수, 1987년 - 현재 충북대학교 대학원 전자공학과 박사과정