論文2001-38SC-1-2

LMI 기법을 이용한 2자유도 표준모델에 대한 비결합 제어기의 H_2 설계

(H_2 Design for Decoupling Controllers Based on the Two-Degree-of-Freedom Standard Model Using LMI Methods)

李 鐘 星*, 姜 奇 遠**, 朴 基 憲*
(Jong-Sung Lee, Ki-Won Kang, and Ki-Heon Park)

요 약

본 논문에서는 다변수 시스템을 제어하는 경우 효율적인 제어를 어렵게 만드는 입력과 출력 사이의 결합 효과를 제거하는 비결합 제어기를 설계하였다. 설계된 제어기는 비결합 조건뿐만 아니라 제어계의 성능을 동시에 고려할 수 있는 2자유도 구조를 가지고 있다. 또한 제어기의 계산을 용이하게 하기 위하여 플랜트를 표준모델로 확장시킨 후 전달 행렬을 상태공간 계수로 표현하였다. 그리고 제어기의 계수 값들은 선형 행렬 부등식을 이용하여 볼록꼴 최적화 문제로 설정하여 구했기 때문에 비결합 및 성능 최적화에 초점을 둔 비결합 제어기의 H_2 설계를 하는데 있어 효과적인 방법을 제시하였다.

Abstract

This paper presents an LMI(Linear Matrix Inequalities) method for designing the optimal decoupling controller. The proposed controller based on the Two-Degree-of-Freedom configuration considers both the performance of controller and decoupling properties. A minimal set of assumptions for existence of the decoupling controller formula is described in the state-space formulas. The decoupling controller parameters are obtained from LMI methods for computational efficiency.

Ⅰ. 서 론

1. 연구 배경 및 내용

현재에 사용되고 있는 수많은 제어 시스템들은 산업 구조의 다변화, 복잡화, 대형화등에 따라 기존의 단일 입출력 시스템에 적용한 제어 방식을 이용할 경우, 요구되는 여러 설계 사양을 만족시키기에는 다소 한계가 있다. 따라서 좀 더 정밀한 제어를 위해서 플랜트의 다변수 특성을 이용한 다변수 제어 시스템 설계가 널리 이용되고 있는데[1, 2, 3, 4], 이 경우 문제점은 입출력 변수들 사이에 많은 결합(coupling)이 존재하여 효율적인 제어를 어렵게 만든다는 것이다. 따라서 비결합 제어 문제는 다변수의 입력과 출력 사이의 결합 효과를 제거하여 각 채널의 출력 변수는 대응되는 입력 신호에 의해서만 독립적으로 조정되도록 제어기를 설계하는 것이다. 이에 대한 연구동향을 살펴보면[5, 6]에서는 일반 상태공간 모델에 대한 상태 궤환 비결합 제어기 문제를,[7]에서는 단위 출력 궤환의 비결합 제어기 문제를 다루었다. 그리고[8]에서는 비결합 조건과 함께 최적 안정도 여유 문제를 다루었는데, 모두 1-자유도 구조의 제어기이므로 성능 개선에 근본적인 제한이 있었다. 또한 2 혹은 3자유도 구조의 비결합 제어기 문제는[9, 10, 11]에서 다루어 졌는데[9]에서는 비결합 조건을 만족시키는 입력 제어기의 형태가 유도되었으며[10, 11]에서

* 正會員, 成均館大學校 電氣·電子 및 컴퓨터工學部
(School of Electrical and Computer Engineering, Sungkyunkwan University)
** 正會員, (株) 마이다스코리아
(Midaskorea Co., Ltd.)
接受日字:2000年5月9日, 수정완료일:2000年12月12日

는 비결합 조건과 제어계의 성능 문제를 동시에 다룰 수 있는 자승형태의 평가함수를 최소화하는 최적 제어기가 유도되었다. 그러나 제어기의 공식이 위너-호프 분해항을 이용한 전달행렬 형태로 서술되어 있기 때문에 계산상에 어려움이 많았다.

따라서 본 논문에서는 제어기의 계산을 용이하게 하기 위하여[10]의 결과를 표준 모델로 확장시킨 후 비결합 제어기의 전달 행렬을 상태공간 계수로 표현하였다. 이렇게 표현된 상태공간 계수를 이용하면 주어진 H_2 문제를 선형 행렬 부등식(LMI : Linear Matrix Inequalities, 이하 LMI) 형태로 표시할 수 있으며[12], 이러한 문제는 시스템 및 제어 이론에서 다루어지는 볼록꼴 최적화 문제(convex optimization problem)로 설정될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 LMI를 이용하여 시스템의 성능 최적화에 초점을 둔 비결합 제어기의 H_2 설계에서 계수 값들을 구하는데 효과적인 방법을 제시하였다.

2. 용어 및 표기법

실계수 유리행렬 $G(s)$는 특별히 혼동이 없는 경우 G로 표시하겠다. $[g_{ij}]$는 행렬 $G(s)$의 또다른 표현이며, 이때 g_{ij}는 행렬의 i번째 행, j번째 열의 원소를 의미한다. G', G_*는 각각 행렬 G의 전치(transpose)행렬과 $G'(-s)$을 나타낸다. $vec(G)$는 행렬 G의 i번째 열벡터를 g_i로 나타낼 때 $[g_1' g_2' \cdots g_n']'$를 의미한다. 또한, G가 대각 행렬일 때 $vecd(G)$는 $[g_{11} g_{22} \cdots g_{nn}]'$를 나타내며 $diag\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$는 G_i를 대각 블럭으로 갖는 대각 블록행렬을 표시한다. $G \otimes R$은 G와 R의 Kronecker곱을 표시하며 G와 R의 Khatri-Rao곱 $G \odot R$은 g_i, r_i가 각기 G와 R의 열벡터를 표시할 때 $[g_1 \otimes r_1 : g_2 \otimes r_2 : \cdots : g_n \otimes r_n]$으로 정의된다.

Ⅱ. 상태공간 계수를 이용한 비결합 H_2 제어기의 LMI표현

1. 비결합 제어 문제

본 논문에서 다루는 비결합 문제는 기준 입력 추종 문제와 관련이 있으므로 기준 입력 $r(s)$를 분리하여 처리할 수 있는 구조가 필요한데 이를 가능케 하는 구조가 그림 1의 2자유도 표준 모델 구조이다. 그림에서 각 신호 $w(s), u(s), z(s)=[z_0' z_1']'$, $y(s)$, $r(s)$, $n(s)$는 각각 외부입력, 제어 입력, 조정 변수, 측정 변수, 그리고 기준입력과 입력 잡음이고, 그 차원은 각각 $r_1 \times 1$, $r_2 \times 1$, $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $q \times 1$, $q \times 1$이다. 조정 변수중 z_0는 기준입력 $r(s)$를 추종하는 변수이고 $q \times 1$의 차원이며, z_1은 그 외의 변수들을 표시하며 $(m_1 - q) \times 1$의 차원이다. 기준 입력 $r(s)$는

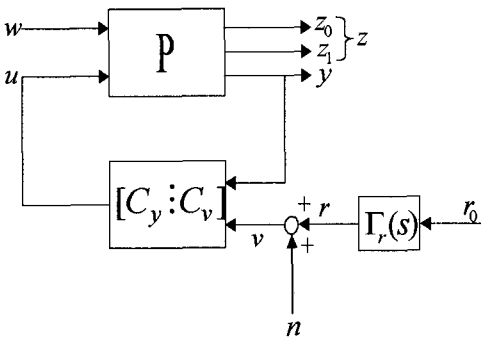

그림 1. 2자유도 구조의 표준 모델
Fig. 1. Two-Degree-of-Freedom controller configuration.

$$r(s) = \Gamma_r(s)\, r_0$$
단, r_0는 백색잡음이며 파워 스펙트럼은 I (1)

의 형태이고 $\Gamma_r(s)$는 정방 안정 행렬로 가정하자. 이 경우 $r(s)$의 파워 스펙트럼은

$$\Phi_r(s) = \Gamma_r(s)\, \Gamma_{r*}(s) \tag{2}$$

이다. 또한 백색잡음 n의 파워 스펙트럼을 Φ_n으로 표시하면 항상

$$\Phi_n = \Gamma_n \Gamma_n, \quad \Gamma_n' = \Gamma_n > 0 \tag{3}$$

의 표현이 가능하며, r_0와 n은 서로 독립이라고 가정할 때, 제어기 전달 행렬 $T_c(s)$는

$$T_c(s) = [\, C_y(s) : C_v(s) \,] \tag{4}$$

의 2자유도 제어기 구조이고, 시스템 전달 함수를

$$\begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \tag{5}$$

와 같이 나타내면, 조정 변수 $z(s)$는

$$z(s) = \begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \end{bmatrix} = T_{zw}(s)\, w(s) + T_{zv}(s)\, v(s) \tag{6}$$

이다. 여기에서

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_y P_{21} \tag{7}$$

$$T_{zv}(s) = \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_v \tag{8}$$

$$[R_y : R_v] = (I - C_y P_{22})^{-1} [C_y : C_v] \tag{9}$$

로 나타낼 수 있는데, (9)식에서 C_y, C_v를 구하면

$$[C_y : C_v] = (I + R_y P_{22})^{-1} [R_y : R_v] \tag{10}$$

이 되므로 (R_y, R_v)와 (C_y, C_v)는 1 : 1 대응관계가 있다. 따라서 우리는 앞으로 편의상 전달함수 (R_y, R_v)를 제어기로 부르기로 하고 모든 제어기 설계 공식도 R_y, R_v에 대해 구하고자 한다. 그리고 비결합 문제가 기준 입력 추종 문제와 관계 있기 때문에 결국 원하는 조건을 갖는 R_v를 구하는 문제라고 생각할 수 있다. 두 제어기의 설계에서 R_y는 임의의 제어기법을 이용하여 안정한 제어기 형태를 별도로 구했다고 가정하고, 본 논문에서는 비결합 조건을 만족시키는 R_v만을 구하기로 하자.

이제 비결합 문제의 설정을 위해 (6)식에서 다음과 같이 v에 대한 항

$$z_v = \begin{bmatrix} z_{v0} \\ z_{v1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_v \cdot v \tag{11}$$

만을 생각하자. 여기서, z_v는 $w = 0$일 경우의 z를 의미한다. 이제 비결합 제어의 내용은 기준입력 $r(s)$에서 기준 입력에 추종하는 변수 z_{v0}까지의 전달함수 $P_{02}R_v$를 대각행렬로 만드는 제어기를 구하는 것이다. 따라서 R_v가 비결합 조건을 만족시키는 제어기라면 결과적인 $P_{02}R_v$는 D_a를 폐우평면에서 해석적인 임의의 안정한 유리 대각 행렬이라고 할 때

$$P_{02} R_v = D_a \tag{12}$$

가 된다. 결국 비결합 조건을 만족하는 제어기 C_v의 설계는 (12)식을 만족하는 R_v를 구하는 문제로 생각할 수 있다. 앞으로 (12)식의 조건을 만족시키는 제어기 R_v를 비결합 제어기라고 부르겠다. 이제 다음을 정의하자.

정의 1 : 그림 1의 시스템에서 대응하는 제어기 C_v가 폐루프 시스템을 내부적으로 안정화 시킬 때 실 유리 행렬 R_v는 허용 가능하다고 한다.

그리고 다음은 그림 1의 플랜트 P가 안정화 가능을 보장하는 조건이다[4].

가정 1 : 플랜트 P는 우반평면의 잠복 극점(hidden pole)이 없으며, $\Psi^+_{P_{22}} = \Psi^+_P$이다.

여기서 $\Psi_{P_{22}}$와 Ψ_P는 각각 P_{22}와 P의 특성 분모식[1]이고, Ψ^+와 Ψ^-는 각각 다항식 Ψ의 폐우평면과 개좌평면에 위치한 영점만을 갖는 다항식이다.

일반적으로 제어입력 u와 입력 신호 v의 차원은 서로 같지 않다. 본 논문에서는 제어 입력 신호와 기준 입력 신호의 차원이 같은 경우만을 생각하기로 하자. 이 경우, $r_2 = q$가 되고 따라서 R_v와 제어기 C_v는 정방행렬이 된다. 이제

$$P_{22} = B_1 A_1^{-1} \tag{13}$$

의 우 다항식 서로소 쌍(right coprime polynomial pair)을 생각하고 H_1이 폐우평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬이라고 하면 가정 1이 만족될 때 허용가능한 R_v의 형태는

$$R_v = A_1 H_1 \tag{14}$$

이 된다[2]. 여기에 $P_{02} = B_{p1} A_{p1}^{-1}$의 우 다항식 서로소 쌍을 생각하고, (14)식의 허용가능한 R_v가 비결합 제어기가 될 조건을 서술하기 위해 다음과 같은 행렬을 정의하자[9][10].

정의 2 : $\triangle_L$과 $\triangle_R$은 $q \times q$의 차원을 갖는 대각 행렬이며 각각의 형태는 다음과 같다.

- $\triangle_L = diag\{\triangle_{L1}/\triangle_{L1*}, \triangle_{L2}/\triangle_{L2*}, \cdots, \triangle_{Lq}/\triangle_{Lq*}\}$의 형태이며 $\triangle_{Li}$는 B_{p1}의 i번째 행에 있는 원소들의 폐우평면 영점항들의 최대 공약 다항식이며 최고차항의 계수는 1이다. 따라서 $B_{p1} = \triangle_L \tilde{B}_{p1}$, $\tilde{B}_{p1}$은 다항식 행렬의 표현이 가능하다.
- $\triangle_R = diag\{\triangle_{R1}/\triangle_{R1*}, \triangle_{R2}/\triangle_{R2*}, \cdots, \triangle_{Rq}/\triangle_{Rq*}\}$의 형태이며 $\triangle_{Rj}$는 $A_1^{-1} A_{p1} \tilde{B}_{p1}^{-1}$의 j번째 열에 있는 원소의 분모들중 폐우평면 영점항들에 대한최소공배 다항식이며 최고차항의 계수는 1이다.

이제 (12)식을 (13), (14)식 그리고 정의 2에 따라 다시 쓰면

$$P_{02}R_v = B_{p1}(A_{p1})^{-1}A_1H_1 = \Delta_L \tilde{B}_{p1}A_{p1}^{-1}A_1H_1 \quad (15)$$

이 되고, 따라서 (15)식을 안정한 대각유리 행렬이 되게하는 H_1을 구하는 문제로 귀착된다.

가정 2 : $P_{02}(s)$는 역행렬이 존재한다.

정리 1[10] : 가정 1~2가 만족될 때 허용가능한 비결합 제어기 R_v의 형태는

$$R_v = P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R D \quad (16)$$

이다. 여기서 D는 폐우평면에서 해석적인 임의의 실유리 대각행렬이다.

2. 평가함수 설정

본 논문에서는 허용 가능한 비결합 제어기 R_v의 집합에서 폐루프 시스템을 내부적으로 안정시키고 제곱형 평가 함수를 최소화하는 제어기를 구하고자 한다. 일반적으로 표준 모델의 경우에는 $z(s)$의 평균파워(average power)를 평가 함수로 생각하지만[3, 4] 본 논문처럼 그림 1과 같은 2자유도 구조의 표준 모델을 가질 때 기준 입력을 별도로 고려하는 경우 평가 함수를 (17)식의 평균파워로 생각하자.

$$e(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s)(r(s) - z_{v0}(s)) \\ -Q_2(s)z_{v1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(s)(\Gamma_r(s)r_0 - z_{v0}(s)) \\ -Q_2(s)z_{v1}(s) \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서, Q_1, Q_2는 안정한 가중치 행렬인데 모두 $\Gamma_r(s)$와 표준 모델 $P(s)$에 흡수시킬 수 있으므로 Q_1과 Q_2는 모두 단위 행렬로 가정하자. 따라서 $e(s)$의 파워 스펙트럼을 $\Phi_e(s)$로 표시하면 평가함수는 (18)식이 되고, 여기에 (11), (17)과 $v = r + n$에 의해 (19)식이 된다.

$$E_v = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} Tr\,\Phi_e(s)\,ds \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} Tr\{(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)\Phi_r(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)_* + \tilde{P}_{12}R_v\Phi_n R_{v*}\,\tilde{P}_{12*}\}\,ds \quad (19)$$

여기서

$$I_0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_{12}(s) = \begin{bmatrix} P_{02}(s) \\ -P_{12}(s) \end{bmatrix} \quad (20)$$

이다. 이제 (19)식을 (2), (3)식을 이용하여 2-norm 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$E_v = \|[(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)\Gamma_r \;:\; \tilde{P}_{12}R_v\Gamma_n]\|_2^2 \quad (21)$$

3. 상태공간 계수를 이용한 공식 표현

이 절에서는 플랜트의 상태공간 모델이 주어진 경우 LMI기법을 H_2문제에 적용하기 위해 앞 절에서 제시된 평가함수를 상태공간 계수로 표시하겠다. 앞으로 $M = ARE(F, R, Q)$의 표현은 $F'M + MF - MRM + Q = 0$의 방정식의 해 중에서 $F - RM$이 안정행렬이 되게 하는 M을 나타내며, M^+는 행렬 M의 Moore-Penrose 역행렬을 표시한다. 플랜트 $P(s)$와 (1)식의 $\Gamma_r(s)$의 상태공간 모델이 다음과 같다 하자.

$$\begin{bmatrix} P_{01}(s) & P_{02}(s) \\ P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} F & G_1 & G_2 \\ \hline H_0 & J_{01} & J_{02} \\ H_1 & J_{11} & J_{12} \\ H_2 & J_{21} & J_{22} \end{array}\right] \quad (22)$$

$$\Gamma_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} F_r & G_r \\ \hline H_r & 0 \end{array}\right] \quad (23)$$

이 경우 허용 가능한 비결합 제어기 R_v가 존재하기 위한 가정들을 적어보자.

가정 3 : (F, G_2)는 가제어하고 (F, H_2)는 가관측하다.

가정 4 : J_{02}는 역행렬이 존재한다.

가정 5 : 행렬 F_r은 안정 행렬이다.

가정 6 : 행렬 $\begin{bmatrix} F - j\omega I & G_2 \\ H_0 & J_{02} \\ H_1 & J_{12} \end{bmatrix}$는 모든 ω에 대하여 열랭크(column rank)를 가진다.

가정 7 : 행렬 $\begin{bmatrix} F - j\omega I & G_2 \\ H_0 & J_{02} \end{bmatrix}$는 모든 ω에 대하여 열랭크를 가진다.

만일 가정 4에서 J_{02}의 역행렬이 존재하지 않는 경우에는 다음과 같이 εI항을 도입하여 근사설계를 할 수 있다. 그림 2의 확장 플랜트 $\underline{P}(s)$에서 $\underline{P}_{02}(s) = P_{02}(s) + \varepsilon I$인데 εI를 $J_{02} + \varepsilon I$가 역행렬이 존재하도록 $\underline{P}(s)$에 대하여 비결합 제어기를 설계한다. 이 결과로 v에서 z_0까지의 전달행렬 $\underline{T}_{z_0v} = T_{z_0v} + \varepsilon R_v$는 대각행렬이 되지만 T_{z_0v}는 그렇지 않을 것이며 만약 ε값을 충분히 작게하면 T_{z_0v}는 $\underline{T}_{z_0v}$에 접근하여 거의 대각행렬이 될 것이다.

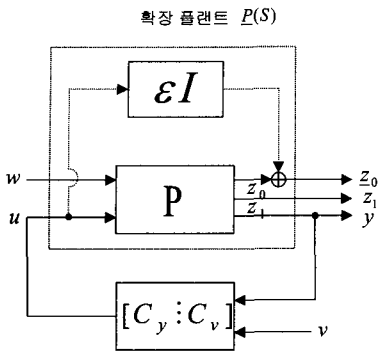

그림 2. 확장 플랜트 $\underline{P}(s)$
Fig. 2. Decoupling design with the augmented plant $\underline{P}(s)$.

다음 보조정리들은 앞으로 상태공간 계수의 공식을 유도하는데 이용되는 기본적인 공식들인데 여기서는 결과 식만을 표시하기로 한다.

정의 3: 유리행렬의 곱 $P_1(s)P(s)$가 $P_1(s)$의 극(pole)을 가지고 있지 않으면 유리행렬 $P(s)$는 $P_1(s)$의 우측 소거소(right eliminator)라고 한다.

보조정리 1[13]: $P_1(s)=\left[\begin{array}{c|c} F_1 & G_1 \\ \hline H_1 & J_1 \end{array}\right]$, $P(s)=\left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array}\right]$이고 F와 F_1은 같은 특성치(eigenvalue)를 공유하지 않는다고 가정하자. $P(s)$가 $P_1(s)$의 우측 소거소가 될 충분조건은 M_1이

$$F_1M_1 - M_1F = -G_1H \tag{24}$$

의 유일해일 때

$$G_1J - M_1G = 0 \tag{25}$$

되는 것이다. 이 경우 $P_1(s)P(s)$의 상태공간 계수는

$$P_1(s)P(s) = \left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline J_1H + H_1M_1 & J_1J \end{array}\right] \tag{26}$$

이 된다. 만일 (F_1, H_1)이 가관측하면 위의 조건은 필요충분 조건이 된다.

보조정리 2[13]: $P(s)=\left[\begin{array}{c|c} F_p & G_p \\ \hline H_p & J_p \end{array}\right]$, $Q(s)=\left[\begin{array}{c|c} F_q & G_q \\ \hline H_q & J_q \end{array}\right]$이고 $P(s)$와 $Q(s)$의 크기가 각각 $l\times m$, $r\times m$인 경우 다음과 같이 된다.

$$P(s)\odot Q(s) = \left[\begin{array}{cc|c} F_p\otimes I_r & G_p\otimes H_q & G_p\odot J_q \\ 0 & I_m\otimes F_q & I_m\odot G_q \\ \hline H_q\otimes I_r & J_p\otimes H_q & J_p\odot J_q \end{array}\right] \tag{27}$$

보조정리 3[13]: $P(s)=\left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array}\right]$이고 F는 안정행렬이며 J는 열 랭크를 가지고 있고 유한 허수축에서 $det(P_*(s)P(s))\neq 0$이라하자. 행렬 $\Lambda(s)$를 $P_*(s)P(s)=\Lambda_*(s)\Lambda(s)$의 위너-호프 분해항이라 하면

$$\Lambda(s) = \left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline R^{-1/2}(J'H+G'X) & R^{-1/2} \end{array}\right] \tag{28}$$

$$X = ARE(F - GR^{-1}J'H,\ H'(I - JR^{-1}J')H,\ GR^{-1}G') \tag{29}$$

이다. 이 때 $P\Lambda^{-1}$은 내행렬(inner)이고 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$P\Lambda^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} F-GK_1 & GR^{-1/2} \\ \hline H-JK_1 & JR^{-1/2} \end{array}\right],\quad K_1 = R^{-1}(J'H+G'X) \tag{30}$$

보조정리 4[13]: $P(s)=\left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array}\right]$이고, 그 크기가 $l\times m$인 경우 $vec\,P(s)$는 다음과 같다.

$$vec\,P(s) = \left[\begin{array}{c|c} I_m\otimes F & vec\,G \\ \hline I_m\otimes H & vec\,J \end{array}\right] \tag{31}$$

보조정리 5(부분분수 전개)[13]: 상수 행렬 F_1과 F_2가 서로 다른 특성치를 가지고 있으면 다음의 등식이 성립한다.

$$H_1(sI-F_1)^{-1}H(sI-F_2)^{-1}H_2 = -H_1(sI-F_1)^{-1}MH_2 + H_1M(sI-F_2)^{-1}H_2 \tag{32}$$

여기서, M은 $F_1M-MF_2=-H$의 유일해이다.

3.1. 정리 1의 $P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R$의 상태공간 계수

행렬 $\Lambda(s)$를 다음 식의 위너-호프 분해항이라 하자.

$$A_{1*}P_{02*}P_{02}A_1 = \Lambda_*\Lambda \tag{33}$$

정리 1의 R_v를 다시 정리하면

$$R_v = P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R D = A_1\Lambda^{-1}(P_{02}A_1\Lambda^{-1})^{-1}\Delta_L\Delta_R D \tag{34}$$

인데 $P_{02}A_1\Lambda^{-1}$이 정방 내행렬이므로 $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})^{-1}=(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$이고 따라서

$$R_v = A_1\Lambda^{-1}(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R D \tag{35}$$

이다. 윗 식에서 $\Delta(s)=\Delta_L\Delta_R$의 역할은 $(P_{02}A_1)^{-1}$

의 불안정 극(pole)을 없애주는 것인데 이것은 $\Lambda(P_{02}A_1)^{-1}=(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$의 불안정 극을 없애는 것과 등가이므로 결국 $\Delta(s)$는 $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$의 우측 소거소가 된다. 먼저 $A_1\Lambda^{-1}$의 상태공간 계수를 구하자.

보조정리 6[14]: $A_1\Lambda^{-1}$의 상태공간 계수와 이 경우 각각의 계수는 다음과 같다.

$$A_1\Lambda^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} F-G_2K_1 & G_2R_1^{-\frac{1}{2}} \\ \hline -K_1 & R_1^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right] \tag{36}$$

여기서

$$R_1=J_{02}'J_{02},\ K_1=R_1^{-1}(J_{02}'H_0+G_2'M_0) \tag{37}$$

$$M_0=ARE(F-G_2J_{02}^{-1}H_0,\ G_2R_1^{-1}G_2',0) \tag{38}$$

이 된다. 따라서 $E(s)=P_{02}A_1\Lambda^{-1}$ 상태공간 계수는 (36)식을 이용하면

$$E(s)=P_{02}A_1\Lambda^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} F-G_2K_1 & G_2R_1^{-\frac{1}{2}} \\ \hline H_0-J_{02}K_1 & J_{02}R_1^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right]=:\left[\begin{array}{c|c} F_e & G_e \\ \hline H_e & J_e \end{array}\right] \tag{39}$$

이 된다. 다음은 $\Delta=\Delta_L\Delta_R$이 $E_*(s)$의 우측 소거소임을 이용하여 $\Delta(s)$의 상태공간 계수를 구하자. $E(s)$를 행 벡터로 표시하기 위해

$$H_e=[\,h_{e1}\ h_{e2}\cdots h_{eq}]',\ J_e=[\,J_{e1}\ J_{e2}\cdots J_{eq}]',\ h_{ei},\ J_{ei}\text{는 행벡터} \tag{40}$$

로 분해하면 다음과 같이 된다.

$$E(s)=[\,e_1(s)\ e_2(s)\cdots e_q(s)]',\ e_i(s)=\left[\begin{array}{c|c} F_e & G_e \\ \hline h_{ei} & J_{ei} \end{array}\right] \tag{41}$$

이제 $\Delta(s)=diag\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_q\}$로 하면 $E_*\Delta=[e_{1*}\Delta_1\vdots e_{2*}\Delta_2\vdots\cdots\vdots e_{q*}\Delta_q]$가 되므로 결국 Δ_i는 e_{i*}의 우측 소거소가 된다. 보조정리 1의 내용과 Δ_i가 내행렬임을 이용하면 그 결과는 다음과 같다.

보조정리 7[13]: $\Delta(s)=\Delta_L\Delta_R$과 $\Delta_i(s)$의 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$\Delta_i(s)=\left[\begin{array}{c|c} F_e & -M_i^+h_{ei}' \\ \hline h_{ei} & 1 \end{array}\right] \tag{42}$$

$$\Delta(s)=\left[\begin{array}{c|c} I_q\otimes F_e & -I_q\odot\{\widetilde{M}^+vec(H_e')\} \\ \hline (I_q\odot H_e')' & I_q \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} F_\Delta & G_\Delta \\ \hline H_\Delta & J_\Delta \end{array}\right] \tag{43}$$

여기서 M_i는

$$F_e'M_i+M_iF_e=-h_{ei}'h_{ei},\quad 1\le i\le q \tag{44}$$

의 유일해이며 $\widetilde{M}=diag\{M_1,M_2,\cdots,M_q\}$이다. 이 경우 $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R$과 $P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R$의 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R=\left[\begin{array}{c|c} F_\Delta & G_\Delta \\ \hline H_N & J_e' \end{array}\right] \tag{45}$$

$$H_N=I_q\odot[h_{n1}\vdots h_{n2}\vdots\cdots\vdots h_{nq}] \tag{46}$$

$$h_{ni}=J_{ei}'h_{ei}+G_e'M_i,\quad 1\le i\le q \tag{47}$$

$$P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R=\left[\begin{array}{cc|c} F_e & G_eH_N & G_eJ_e' \\ 0 & F_\Delta & G_\Delta \\ \hline -K_1 & R_1^{-\frac{1}{2}}H_N & R_1^{-1}J_{02}' \end{array}\right]=:\left[\begin{array}{c|c} F_{ed} & G_{ed} \\ \hline H_{ed} & J_{ed} \end{array}\right] \tag{48}$$

3.2 행렬 $\Gamma(s)$의 상태공간 계수

행렬 $\Gamma(s)=\widetilde{P}_{12}P_{02}^{-1}\Delta=\widetilde{P}_{12}A_1\Lambda^{-1}(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta$는 $\widetilde{P}_{12}=\left[\begin{array}{c|c} F & G_2 \\ \hline \widetilde{H}_1 & \widetilde{J}_{12} \end{array}\right]$, $\widetilde{H}_1=\left[\begin{array}{c} H_0 \\ H_1 \end{array}\right]$, $\widetilde{J}_{12}=\left[\begin{array}{c} J_{02} \\ J_{12} \end{array}\right]$의 관계일 때 상태공간 모델은 다음과 같이 된다.

$$\Gamma(s)=\left[\begin{array}{cc|c} F_e & G_eH_N & G_eJ_e' \\ 0 & F_\Delta & G_\Delta \\ \hline \widetilde{H}_1-\widetilde{J}_{12}K_1 & \widetilde{J}_{12}R_1^{-\frac{1}{2}}H_N & \widetilde{J}_{12}R_1^{-\frac{1}{2}}J_e' \end{array}\right]=:\left[\begin{array}{c|c} F_g & G_g \\ \hline H_g & J_g \end{array}\right] \tag{49}$$

3.3 H_2 표준형의 상태공간 모델

앞 절에서 구한 상태공간 계수를 이용하여 전달함수로 표현된 평가함수를 LMI기법을 적용하기 위해 H_2 표준형의 상태공간 모델로 표현하면

$$E_v=\|[I_0\Gamma_r\vdots 0]-\widetilde{P}_{12}P_{02}^{-1}\Delta D[\,\Gamma_r\vdots-\Gamma_n]\|_2^2$$

$$=\|\left[\begin{array}{c|cc} F_r & G_r & 0 \\ H_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]-\left[\begin{array}{cc|c} F_e & G_eH_N & G_eJ_e' \\ 0 & F_\Delta & G_\Delta \\ \hline \widetilde{H}_1-\widetilde{J}_{12}K_1 & \widetilde{J}_{12}R_1^{-1/2}H_N & \widetilde{J}_{12}R_1^{-1/2}J_e' \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} F_d & G_d \\ \hline H_d & J_d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} F_r & G_r & 0 \\ H_r & 0 & J_n \end{array}\right]\|_2^2\triangleq\|T_1+T_2DT_3\|_2^2 \tag{50}$$

이 되고, 다시 LFT(Linear Fractional Transformation)로 표시해보면

$$E_v = \| F_l(\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}, D) \|_2^2 \tag{51}$$

이 된다. $\hat{H}_r = \begin{bmatrix} H_r \\ 0 \end{bmatrix}$인 관계인 경우 각각의 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$P_t(s) = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} F_t & G_{tv} & G_t \\ \hline H_{tz} & J_{tzv} & J_{tz} \\ H_t & J_{tv} & J_t \end{array}\right] \tag{52}$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} d_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{ii}(s) \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} F_d & G_d \\ \hline H_d & J_d \end{array}\right] \tag{53}$$

그리고 (52)식에서 각각의 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$F_t = \begin{bmatrix} F_r & 0 & 0 \\ 0 & F_e & G_e H_N \\ 0 & 0 & F_\Delta \end{bmatrix},\ G_{tv} = \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G_t = \begin{bmatrix} 0 \\ -G_e J_e' \\ -G_\Delta \end{bmatrix}$$

$$H_{tz} = [\ H_r \quad \hat{H}_1 - \hat{J}_{12} K_1 \quad \hat{J}_{12} R^{-1/2} H_N\ ],$$

$$H_t = [\ H_r \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$J_{tzv} = [0 \quad 0],\ J_{tz} = [\ -\hat{J}_{12} R_1^{-1/2} J_e'],$$

$$J_{tv} = [0 \quad J_n],\ J_t = 0 \tag{54}$$

또한 위와 같이 표시하는 경우 폐루프 시스템의 상태공간 모델은

$$\begin{cases} \dot{x_{cl}} = F_{cl} x_{cl} + G_{cl} v \\ z = H_{cl} x_{cl} + J_{cl} v \end{cases} \tag{55}$$

이 되고, (53), (54)식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{c|c} F_{cl} & G_{cl} \\ \hline H_{cl} & J_{cl} \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} F_t + G_t J_d H_t & G_t H_d & G_{tv} + G_t J_d J_{tv} \\ G_d H_t & F_d & G_d J_{tv} \\ \hline H_{tz} + J_{tz} J_d H_t & J_{tz} H_d & J_{tzv} + J_{tz} J_d J_{tv} \end{array}\right] \tag{56}$$

(56)식의 폐루프 시스템에 LMI를 적용하여 비결합 제어기의 H_2 설계를 하는 경우 자유 매개 변수 부분인 F_d, G_d, H_d, J_d의 형태를 설정해주어야 한다. 그런데 $D(s)$가 비결합 제어기 형태인 정방의 대각 행렬로 나오기 위해서는 F_d, G_d, H_d, J_d의 수 많은 형태의 조합이 있으며, 이러한 모든 형태를 지정하기는 불가능하고, 항상 구조적으로 정방의 대각 행렬형태를 보장해 주어야 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 H_2 표준형

$$\| (\ T_1 + T_2 D T_3\ ) \|_2^2 \ < \ \alpha \tag{57}$$

에 벡터를 취하여도 2-norm 값에는 영향을 미치지 않는 성질을 이용하면[15]

$$\| vec(\ T_1 + T_2 D T_3\ ) \|_2^2 \ < \ \alpha$$

$$\rightarrow \| vec\, T_1 + T_3' \odot T_2 \cdot vecd D) \|_2^2 \ < \ \alpha \tag{58}$$

이 된다. 즉, $vecd D(s)$를 구하여 이것을 주 대각 행렬로 배치하면 정방의 대각 행렬형태인 $D(s)$를 항상 구할 수 있다. 그리고 (58)식에서 $\overline{T_1} \triangleq vec T_1$, $\overline{T_2} = T_3' \odot T_2$, $\overline{T_3} = I$로 놓으면 벡터를 취한 후의 일반화된 H_2 표준형으로 다시 표시할 수 있다.

$$\| \overline{T_1} + \overline{T_2} \overline{D} \overline{T_3} \|_2^2 \ < \ \alpha \tag{59}$$

그리고 $vecd D(s)$의 상태 공간 모델을 $\overline{D}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \overline{F_d} & \overline{G_d} \\ \hline \overline{H_d} & \overline{J_d} \end{array}\right]$로 놓으면 벡터를 취한 후의 LFT 형태로 나타낼 수 있다.

$$\| F_l(\begin{bmatrix} \overline{T_1} & \overline{T_2} \\ \overline{T_3} & 0 \end{bmatrix}, \overline{D}) \|_2^2 < \alpha \tag{60}$$

여기서, $\overline{P_t}(s) = \begin{bmatrix} \overline{T_1} & \overline{T_2} \\ \overline{T_3} & 0 \end{bmatrix}$의 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$\overline{P_t}(s) = \begin{bmatrix} \overline{T_1} & \overline{T_2} \\ \overline{T_3} & 0 \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} \overline{F_t} & \overline{G_{tv}} & \overline{G_t} \\ \overline{H_{tz}} & \overline{J_{tzv}} & \overline{J_{tz}} \\ \hline \overline{H_t} & \overline{J_{tv}} & \overline{J_t} \end{array}\right] \tag{61}$$

따라서 평가 함수를 (21)식으로 하면 $\overline{P_t}(s)$의 상태공간 모델은 각각 다음과 같다.

$$\overline{F_t} = \begin{bmatrix} I_{m1} \otimes F_r & 0 & 0 \\ 0 & F_r' \otimes I_{l2} & H_r' \otimes [\ \hat{H}_1 - \hat{J}_{12} K_1 \ \hat{J}_{12} R_1^{-1/2} H_n] \\ 0 & 0 & I_{m2} \otimes \begin{bmatrix} F_e & G_e H_n \\ 0 & F_\Delta \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\overline{G_{tv}} = \begin{bmatrix} vec[\ G_r \quad 0] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{G_t} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_r' \odot -\hat{J}_{12} R_1^{-1/2} J_e' \\ I_{m2} \odot \begin{bmatrix} -G_e J_e' \\ -G_\Delta \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\overline{H_{tz}} = [\ I_{m1} \otimes [\ \hat{H}_1 - \hat{J}_{12} K_1 \quad \hat{J}_{12} R_1^{-1/2} H_n]],$$

$$\overline{H_t} = [0 \quad 0 \quad 0],\ \overline{J_{tzv}} = vec\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{J_{tz}} = [\ [0 \quad J_n]' \odot \hat{J}_{12} R_1^{1/2} J_e'],\ \overline{J_{tv}} = I,\ \overline{J_t} = 0 \tag{62}$$

그리고 비결합 제어기 R_v에서 자유 매개변수인 $\overline{F_d}$, $\overline{G_d}$, $\overline{H_d}$, $\overline{J_d}$가 주어지는 경우 벡터를 취한 후의 전체 폐루프 전달함수의 상태공간 모델은

$$\left[\begin{array}{c|c}\overline{F_{cl}} & \overline{G_{cl}} \\ \hline \overline{H_{cl}} & \overline{J_{cl}}\end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c}\overline{F_t}+\overline{G_tJ_dH_t} & \overline{G_tH_d} & \overline{G_{tv}}+\overline{G_tJ_dJ_{tv}} \\ \overline{G_dH_t} & \overline{F_d} & \overline{G_dJ_{tv}} \\ \hline \overline{H_{tz}}+\overline{J_{tz}J_dH_t} & \overline{J_{tz}H_d} & \overline{J_{tzv}}+\overline{J_{tz}J_dJ_{tv}}\end{array}\right] \tag{63}$$

이 된다.

4. 비결합 제어기의 LMI 표현

이 절에서는 상태공간 계수식으로 표현된 비결합 H_2 문제를 LMI기법에 적용하는 과정을 제시하겠다. 먼저 (64)~(65)식을 만족하는 양한정의 대칭 행렬 $P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$, $P_{21}=P_{12}^T$가 존재한다고 가정할 때 전체 폐루프 시스템을 안정화시키고 주어진 2-norm의 제곱값인 α에 대하여 평가함수 $E_v=\|vec[(I_0-\tilde{P}_{12}R_v)\Gamma_r \vdots \tilde{P}_{12}R_v\Gamma_n]\|_2^2<\alpha$를 만족하는 비결합 제어기 R_v에서 자유 매개변수인 $\overline{F_d}$, $\overline{G_d}$, $\overline{H_d}$, $\overline{J_d}$를 구하는 문제를 LMI 형태로 표현하면 2개의 LMI식과 1개의 조건식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\overline{F_{cl}}^TP+P\overline{F_{cl}} & P\overline{G_{cl}}\\ \overline{G_{cl}}^TP & -I\end{bmatrix}<0 \tag{64}$$

$$\begin{bmatrix}P & \overline{H_{cl}}^T\\ \overline{H_{cl}} & \alpha I\end{bmatrix}>0 \tag{65}$$

$$\overline{J_{cl}}=0 \tag{66}$$

그리고 (62)식의 상태공간 계수를 (64), (65), (66)식에 대입하면 각각 다음과 같다.

$$\left|\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}\overline{F_t}+\overline{G_tJ_dH_t} & \overline{G_tH_d}\\ \overline{G_dH_t} & \overline{F_d}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{F_t}+\overline{G_tJ_dH_t} & \overline{G_tH_d}\\ \overline{G_dH_t} & \overline{F_d}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{G_{tv}}+\overline{G_tJ_dJ_{tv}}\\ \overline{G_dJ_{tv}}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\overline{G_{tv}}+\overline{G_tJ_dJ_{tv}}\\ \overline{G_dJ_{tv}}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix} & -I\end{array}\right|<0 \tag{67}$$

$$\left[\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(\overline{H_{tz}}+\overline{J_{tz}J_dH_t})\\ (\overline{J_{tz}H_d})\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}(\overline{H_{tz}}+\overline{J_{tz}J_dH_t})\\ (\overline{J_{tz}H_d})\end{bmatrix} & \alpha I\end{array}\right]>0 \tag{68}$$

$$\overline{J_{tzv}}+\overline{J_zJ_dJ_v}=0 \tag{69}$$

위의 (64)식를 보면 $\overline{F_{cl}}^TP+P\overline{F_{cl}}$에서 매개변수 P와 제어기 자유매개변수인 $\overline{F_d}$, $\overline{G_d}$, $\overline{H_d}$, $\overline{J_d}$가 곱으로 표시되어 LMI 형태로 표현할 수 없음을 알 수 있다. 따라서 (64)식을 LMI 형태로 표현하기 위해서 다음과 같은 P 행렬을 도입해보자[16].

$$P=\begin{bmatrix}Y & N\\ N^T & *\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}X & M\\ M^T & *\end{bmatrix} \tag{70}$$

여기서 X, Y는 차원이 n×n(n : 플랜트 차수)인 대칭 행렬이다. $PP^{-1}=I$ 이므로 $P\begin{pmatrix}X\\ M^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I\\ 0\end{pmatrix}$이 되고, $\Pi_1=\begin{pmatrix}X & I\\ M^T & 0\end{pmatrix}$, $\Pi_2=\begin{pmatrix}I & Y\\ 0 & N^T\end{pmatrix}$의 관계를 이용하면

$$P\Pi_1=\Pi_2 \tag{71}$$

이 된다. 이 때 $P>0$이고 M, N이 전행 계수(full row rank)를 가지면 Π_1, Π_2는 정칙이며 (64), (65)식의 양변에 $\begin{pmatrix}\Pi_1 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$를 곱해도 부등호는 변하지 않는데 이러한 전개를 일치 변환(congruence transformation)이라고 한다. 먼저 (64)식에 곱하면

$$\begin{bmatrix}\Pi_1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{F_{cl}}^TP+P\overline{F_{cl}} & P\overline{G_{cl}}\\ \overline{G_{cl}}^TP & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\Pi_1^T\overline{F_{cl}}^TP\Pi_1+\Pi_1^TP\overline{F_{cl}}\Pi_1 & \Pi_1^TP\overline{G_{cl}}\\ \overline{G_{cl}}^TP\Pi_1 & -I\end{bmatrix}<0 \tag{72}$$

이 되고, (65)식에 곱하면

$$\begin{bmatrix}\Pi_1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P & \overline{H_{cl}}^T\\ \overline{H_{cl}} & \alpha I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}>0$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\Pi_1^TP\Pi_1 & \Pi_1^T\overline{H_{cl}}^T\\ \overline{H_{cl}}\Pi_1 & \alpha I\end{bmatrix}>0 \tag{73}$$

이 된다. 그리고 $\hat{F}$, $\hat{G}$, $\hat{H}$, $\hat{J}$를 다음과 같이 놓는 경우 일치 변환 후의 (72), (73)식 그리고 (69)식은 아래와 같이 각각 표시할 수 있다.

$$\hat{F}=N\overline{F_d}M^T+N\overline{G_dH_t}X+Y\overline{G_tH_d}M^T+Y(\overline{F_t}+\overline{G_tJ_dH_t})X \tag{74}$$

$$\hat{G}=Y\overline{G_tJ_d}+N\overline{G_d} \tag{75}$$

$$\hat{H}=\overline{H_d}M^T+\overline{J_dH_t} \tag{76}$$

$$\hat{J}=\overline{J_d} \tag{77}$$

$$\left[\begin{array}{ccc}\overline{F_t}X+X\overline{F_t}^T+\overline{G_t}\hat{H}+(\overline{G_t}\hat{H})^T & \hat{F}^T+(\overline{F_t}+\overline{G_t}\hat{J}\overline{H_t}) & \overline{G_{tv}}+\overline{G_t}\hat{J}\overline{J_{tv}}\\ \hat{F}+(\overline{F_t}+\overline{G_t}\hat{J}\overline{H_t})^T & \overline{F_t}^TY+Y\overline{F_t}+\hat{G}\overline{H_t}+(\hat{G}\overline{H_t})^T & Y\overline{G_{tv}}+\hat{G}\overline{J_{tv}}\\ (\overline{G_{tv}}+\overline{G_t}\hat{J}\overline{J_{tv}})^T & (Y\overline{G_{tv}}+\hat{G}\overline{J_{tv}})^T & -I\end{array}\right]<0 \tag{78}$$

$$\begin{bmatrix} X & I & (\overline{H_{tz}}X+\overline{J_{tz}}\hat{H})^T \\ I & Y & (\overline{H_{tz}}+\overline{J_{tz}}\hat{J}\overline{H_t})^T \\ \overline{H_{tz}}X+\overline{J_{tz}}\hat{H} & \overline{H_{tz}}+\overline{J_{tz}}\hat{J}\overline{H_t} & \alpha I \end{bmatrix} > 0 \tag{79}$$

$$\overline{J_{tzv}}+\overline{J_{tz}}\hat{J}\overline{J_{tv}} = 0 \tag{80}$$

그리고

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{81}$$

이 되는데 이는 $P>0$ 이고 Π_1 은 정칙이므로 Schur Complement에 의해 $Y>0,\ X-Y^{-1}>0$ 이 성립된다. 이는 $I-XY<0$ 이 성립하는 것과 같으므로 $MN^T = I-XY$ 를 만족하는 정방형의 정칙 행렬 M 과 N 을 항상 구할 수 있다. 따라서 LMI 기법에 의하여 $\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{J}, X, Y$ 를 구하면 다음 순서에 의해 비결합 제어기 R_v 의 자유 매개변수 $\overline{F_d}, \overline{G_d}, \overline{H_d}, \overline{J_d}$ 를 구할 수 있다. 이러한 과정을 단계별로 요약하면 다음과 같다.

a.① $X,\ Y$ 를 구하면 $M,\ N$ 을 구할 수 있다.

a.② $\hat{J} = \overline{J_d}$ 에서 $\overline{J_d}$ 를 구한다.

a.③ $\hat{H} = \overline{H_d}M^T + \overline{J_d}\overline{H_t}X$ 에서 $\overline{H_d}$ 를 구한다.

a.④ $\hat{G} = N\overline{G_d} + Y\overline{G_t}\overline{J_d}$ 에서 $\overline{G_d}$ 를 구한다.

a.⑤ $\hat{F} = N\overline{F_d}M^T + N\overline{G_d}\overline{H_t}X + Y\overline{G_t}\overline{G_d}M^T + Y(\overline{F_t} + \overline{G_t}\overline{J_d}\overline{H_t})X$ 에서 $\overline{F_d}$ 를 구한다.

a.⑥ $P = \Pi_2\Pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ 로부터 구한다.

그리고 비결합 제어기 R_v 를 구하는 과정을 요약하여 설명하면 다음과 같다.

b.① $P_{02}R_v$ 에서 $P_{22} = B_1A_1^{-1}$ 를 우 다항식 서로소 쌍으로 분해하여 표현한다. $P_{02}R_v = P_{02}A_1H_1$ 이 되고, H_1 은 폐우평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬이다.

b.② $P_{02} = B_{p1}A_{p1}^{-1}$ 의 우 다항식 서로소 쌍으로 분해하여 표현하면 다음과 같다.

$$P_{02}R_v = P_{02}B_{p1}A_{p1}^{-1}A_1H_1$$

b.③ 그리고 정의 2의 Δ_L 과 Δ_R 을 적용하여 표현하면 폐우평면에서 해석적인 임의의 실유리 대각행렬 D 를 포함하는 $P_{02}R_v = \Delta_L\Delta_RD$ 가 된다.

b.④ 끝으로 P_{02} 의 역행렬을 좌우측 항에 곱하면 최종적인 제어기 R_v 는 다음과 같다.

$$R_v = P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_RD$$

그러므로 (78), (79)식에서 $E_v = \|vec[(I_0 - \hat{P}_{12}R_v)\ \Gamma_r\ \vdots\ \hat{P}_{12}R_v\Gamma_n]\|_2^2 < \alpha$ 를 만족하는 비결합 제어기 R_v 의 자유 매개변수 값들을 LMI기법을 이용하여 구할 수 있다.

Ⅲ. 적용 예

이 장에서는[17]의 예제를 통하여 그림 3의 시스템에서 비결합 제어기 R_v 의 계산에 필요한 $D(s)$(82)를 LMI기법을 이용하여 구하는 과정을 예시하겠다.

먼저 (5)식에서 시스템의 전달행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_a(s) \\ 0 & I \\ I & P_a(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} \tag{82}$$

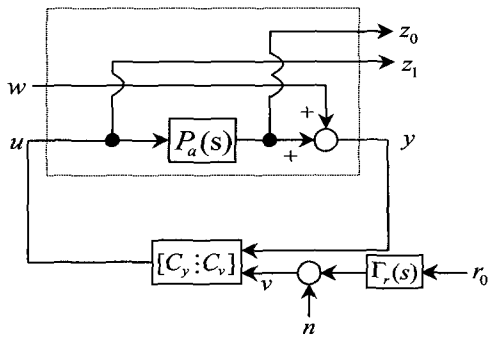

그림 3. 비결합 제어기 적용 예제
Fig. 3. An example system.

그림 3의 모델에서

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s(s-2)} & \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \tag{83}$$

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ \Phi_r(s) = \frac{1}{(s+0.0001)(-s+0.0001)}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{84}$$

으로 주어지는 경우[17]의 예제와 다른 점은 (84)식의

$\Phi_r(s)$가[17]에서는 jw축 상에 극이 있는데 반하여 여기서는 (2)식의 조건을 만족하기 위해서 $\Phi_r(s)$의 근사화된 형태를 취하였다. 그리고 공식 적용에 필요한 상태공간 모델을 정리하면 다음과 같다.

$$P_a(s)=\left[\begin{array}{c|c}F_a & G_a\\ \hline H_a & J_a\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cc}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&2&0&1&2\\0&0&0&-1&1&0\\ \hline 0.5&0&0.5&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\end{array}\right] \tag{85}$$

$$P(s)=\left[\begin{array}{c|cc}F & G_1 & G_2\\ \hline H_0 & J_{01} & J_{02}\\ H_1 & J_{11} & J_{12}\\ H_2 & J_{21} & J_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}F_a & 0 & G_a\\ \hline H_a & 0 & J_a\\ 0 & 0 & I\\ H_a & I & J_a\end{array}\right] \tag{86}$$

$$\Gamma_r(s)=\left[\begin{array}{c|c}F_r & G_r\\ \hline H_r & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}-0.0001&0&1.9841&0.2520\\0&-0.0001&0.2520&1.9841\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right] \tag{87}$$

먼저 가정 3~7의 조건 중에서 문제가 되는 것은 $J_{02}=J_a=0$이기 때문에 가정 4가 만족되지 않는 시스템이다. 따라서 그림 2의 확장 플랜트를 설정하고 다음의 값으로 근사 설계를 하기로 하자.

$$\varepsilon=0.01 \tag{88}$$

이 때 최종제어기 $R_v(s)=P_{02}^{-1}(s)\triangle_L(s)\triangle_R(s)D(s)$가 되고, II장의 3절 상태공간 모델 공식을 이용하여 결과를 요약하면 다음과 같다.

$$P_{02}^{-1}(s)=\left[\begin{array}{c|c}F_a-G_aJ_a^{-1}H_a & G_aJ_a^{-1}\\ \hline -J_a^{-1}H_a & J_a^{-1}\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccc|cc}-50&0&-50&0&100&0\\0&-100&0&-100&0&100\\-50&-200&-48&-200&100&200\\-50&0&-50&-1&100&0\\ \hline -50&0&-50&0&100&0\\0&-100&0&-100&0&100\end{array}\right] \tag{89}$$

$$E(s)=P_{02}A_1\Lambda^{-1}=\frac{1}{s+3.9815}\left[\begin{array}{cc}s+2.2995 & 3.2503\\ 3.2503 & s-2.2995\end{array}\right] \tag{90}$$

$$\triangle(s)=\triangle_L(s)\triangle_R(s)=\frac{s-3.9815}{s+3.9815}\cdot I_2 \tag{91}$$

$$D(s)=\left[\begin{array}{cc}\dfrac{\overline{n_1}(s)}{\overline{d_1}(s)} & 0\\ 0 & \dfrac{\overline{n_2}(s)}{\overline{d_2}(s)}\end{array}\right] \tag{92}$$

여기서

$$\frac{\overline{n_1}(s)}{\overline{d_1}(s)}=$$

$$\frac{-0.01844s^7-0.1821s^6-0.87s^5-2.507s^4-3.792s^3-3.364s^2-1.713e04s-0.3421}{s^8+8.493s^7+26.66s^6+44.74s^5+46.79s^4+31.85s^3+13.56s^2+3.265s+0.3423}$$

$$\frac{\overline{n_2}(s)}{\overline{d_2}(s)}=$$

$$\frac{-0.009574s^7-0.1168s^6-0.6606s^5-2.23s^4-4.369s^3-4.442s^2-1.952s-0.3421}{s^8+8.493s^7+26.66s^6+44.74s^5+46.79s^4+31.85s^3+13.56s^2+3.265s+0.3423}$$

이며, Matlab Toolbox의 Robust Control의 minreal 명령을 이용하여 0.0001의 오차 범위 내에서 최소 구현 후 얻은 결과이다. 이 때 $D(s)$를 비결합 제어기에 적용하는 경우 평가함수 $E_v(s)$ 값은 33.4465가 된다.

다음은 구해진 제어기를 이용하여 Matlab의 Simulink를 이용하여 모의 실험을 한 결과 이다. 위에서 구한 $D(s)$를 비결합 제어기 $R_v(s)$에 적용하는 경우 단위 계단 응답 결과는[17]의 결과와 매우 유사함을 알 수 있었다. 약간의 차이는 J_{02}의 근사 설계과정에서 발생한 것으로 생각된다. 그림 4와 그림 5는 기준입력

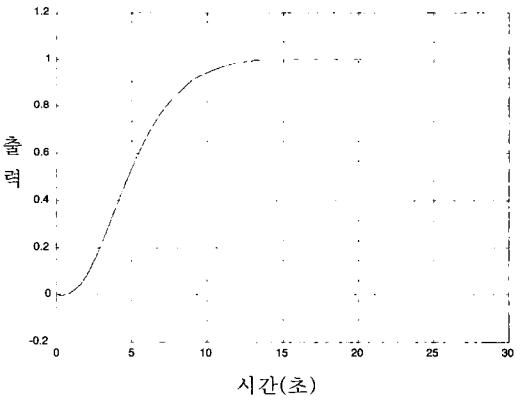

그림 4. r_{01} 단위 계단입력에 대한 출력 z_{01}의 파형
Fig. 4. Step response of z_{01}.

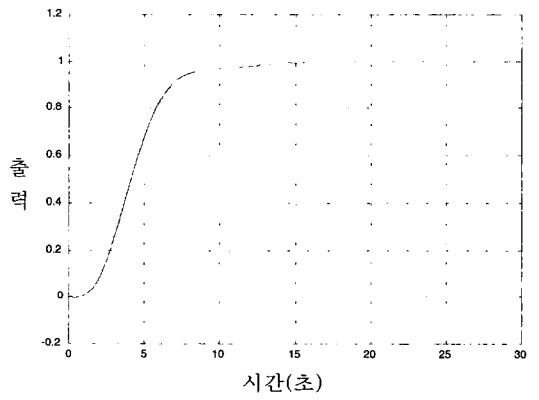

그림 5. r_{02} 단위 계단입력에 대한 출력 z_{02}의 파형
Fig. 5. Step response of z_{02}.

1(r_{01})과 기준입력 2(r_{02})에 각각 단위 계단입력을 인가했을 경우 이에 따른 각각의 출력파형(z_{01}, z_{02})을 나타냈고, 그림 6과 그림 7은 단위 계단 입력에 대한 플랜트 입력 파형(u_{01}, u_{02})를 나타내고 있다.

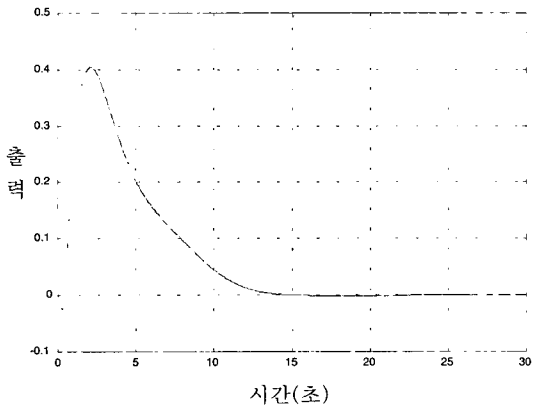

그림 6. r_{01} 단위 계단입력에 대한 플랜트입력 u_{01}의 파형

Fig. 6. Step response of u_{01}.

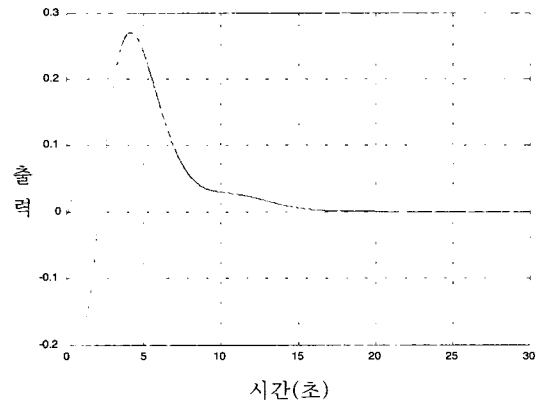

그림 7. r_{02} 단위 계단입력에 대한 플랜트입력 u_{02}의 파형

Fig. 7. Step response of u_{02}.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 2자유도 구조의 표준 플랜트 모델에서 기준입력과 지정된 출력사이의 전달행렬을 대각화시키는 비결합 제어기 설계문제를 다루었다. 정리1에서 제시된 제어기는 입출력 사이의 전달행렬을 대각화 시키고 주어진 자승형태의 성능 평가 함수를 최소화시키는 비결합 제어기이다. 이러한 비결합 제어기의 공식에 계산의 편의를 위하여 상태공간 변수를 이용한 LMI기법 적용이 Ⅱ장의 4절에서 제시되었다. 이 때 상태공간 변수의 공식 유도에서 핵심적인 단계는 $\triangle_L(s)\triangle_R(s)$가 우측 소거소가 되는 조건을 이용하는 것이다. 또한 최종적으로 LMI기법에 적용하기 위한 $D(s)$의 상태공간 모델의 형태를 $vecdD(s)$로 설정하여 비결합 제어기를 LMI기법에 적용함에 있어서 고려돼야 할 대각화 형태에 따른 구조적인 제한사항을 해결하였다. Ⅲ장에서는 LMI기법을 이용하여 $D(s)$를 구하는 과정을 적용예를 통하여 예시하였는데, 주파수영역에서 구한 비결합 제어기[17]와 비교해 볼 때 매우 유사한 성능을 보여주었다. 따라서 상태공간영역에서 비결합 제어기의 H_2 설계가 성공적으로 이루어 졌음을 확인할 수 있었다.

앞으로 더 연구되어야 할 내용은 $\triangle_L(s)\triangle_R(s)$의 우측 소거소를 LMI형태로 표시하여 보다 일반화된 형태의 비결합 제어기를 LMI기법을 이용하여 설계하는 것이다.

참 고 문 헌

[1] D. C. Youla, H. Jabr, and J. J. Bongiorno, Jr., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part Ⅱ ; The Multivariable Case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-21, No. 3, pp. 319-338, June, 1976.

[2] D. C. Youla and J. J. Bongiorno, Jr., "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf Design," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 7, pp. 652- 665, July, 1985.

[3] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State space solutions to stan- dard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 831-847, 1989.

[4] K. Park and J. J. Bongiorno, Jr., "A General theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 619-626, 1989.

[5] A. Ailon, "Decoupling of square singular systems via proportional state feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 36, No. 1, pp. 95-102, Jan., 1991.

[6] P. N. Paraskevopulos and F. N. Koumboulis, "The decoupling of generalized state-space systems via state feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 148-152, Jan., 1992.

[7] A. I. G. Vardulakis, "Internal stabilization and decoupling in linear multivariable systems by unity output feedback compensation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 8, pp. 735-739, Aug., 1987.

[8] M. G. Safanov and B. S. Chen, "Muti-variable stability margin optimization with decoupling and output regulation," *in Proc. Conf. Decision Contr.*, pp.616-622, Orlando, FL, Dec. 1982, and *IEE Proc.*, Vol. 129, pp. 276-282, Nov., 1982.

[9] C. A. Desoer and A. N. Gündes, "Decoupling linear multiinput-multioutput plants by dynamic output feedback : An algebraic theory," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 31, No. 8, pp. 744-750, 1986.

[10] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupled multi-variable feedback control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, No. 12, pp. 1838-1843, Dec., 1993.

[11] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupling controllers for plant with non-square transfer matrices," *Interantional J. of Control*, Vol. 58, No. 6, pp.1227-1246, 1993.

[12] S. Boyd, L. E. Ghoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, Vol. 15, 1994.

[13] K. Park and D.C. Youla, "Numerical calculation of the optimal three-degree-of-freedom Wiener-Hopf controller," *International Journal of Control*, Vol. 56, No. 1, pp. 227-244, July, 1992.

[14] 박기현, "비결합 제어 시스템의 위너-호프 설계와 상태공간 계산 공식," *Report SKK-CAL-99-02*

[15] J. W. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, No. 9, Sep., 1978.

[16] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimazation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, Jul., 1997.

[17] H. P. Lee, "Wiener-Hopf design of decoupled multivariable feedback control systems," *Ph. D. dissertation, Polytechnic University, Farmingdale, New York*, 1992.

저 자 소 개

李 鐘 星(正會員)

1967년 11월 24일생. 1990년 성균관대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1996), 동대학원 박사(2000). 1996년~현재 성균관대학교 강사. 관심분야는 지능형 제어, 최적제어 및 강인제어

姜 奇 遠(正會員)

1968년 7월 29일생. 1992년. 성균관대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1996), 동대학원 박사(2000). 1996년~2000년 9월~현재 (주)마이다스코리아 수석연구원. 관심분야는 선형행렬부등식 이론, 강인제어 이론 및 응용

朴 基 憲(正會員)

1955년 7월 5일생. 1978년 서울대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1980), Polytechnic Univ. 박사(1987), 1990년~현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수. 관심분야는 최적제어 및 강인제어, LMI 최적화, 시스템 식별, CAN을 이용한 시스템 제어