컴퓨터 매체를 이용한 논리 교수법에 관한 연구
- 이질적 추론을 중심으로 -

김 영 정 (서울대 철학과)

【요약문】 컴퓨터라는 새로운 매체의 도입의 이점이 컴퓨터 매체의 제반 특성들을 잘 활용함으로써 학생들의 호기심을 유발하고 학생들의 학습 효과를 높일 수 있다는 데에만 국한되는 것은 아니다. 새로운 컴퓨터 매체의 도입은 논리학의 여러 중심 개념들 자체에 대한 이해의 심도를 증진시킴으로써 논리학을 새로운 영역으로 확대시켜 주기도 한다. 그 새로운 영역은 그림과 같은 비언어적 표상을 핵심적으로 포함한 추론, 즉 문자와 그림을 동시에 포함하는 이질적인 추론(heterogeneous reasoning)을 허용하는 영역이다.

논리학은, 정보가 어떻게 표상되든 상관없이, 정보 추출의 타당한 형태들에 관한 연구이다. 전통적으로 논리학자들은 정보 추출의 타당한 형태들의 매우 작은 부분(즉, 언어적 표상)에만 초점을 맞추었다. 그러나 컴퓨터 매체의 활용과 더불어 이제 논리학은 시각적 표상을 포함하여 다양한 표상들을 어떻게 사람들이 사용하는지 파악해야 한다. 이러한 과업의 성취를 위해, 구문론, 의미론, 논리적 귀결, 증명, 반례 등의 전통적 개념을 이러한 새로운 형태의 표상들을 수용할 수 있는 방식으로 확장하고 풍부하게 만들어야 한다. 그림 표상과 문자 표상을 함께 사용하는 추론 체계인 Hyperproof에 대한 연구는 이러한 확장된 논리 이론을 형성하는 데 기여한다.

【주요어】 컴퓨터 매체, 논리 교수법, 이질적 추론, 비언어적 표상(그림 표상), Hyperproof

1. 서 론

컴퓨터는 논리학 교육에 매우 큰 진보를 가져오고 있다. 학교에서 교사의 책과 칠판을 사용한 논리학 교육이 이루지 못한 것을 좋은 교육용 논리 프로그램은 쉽게 이룬다. 논리학을 가르치기 위한 초보적인 보조 컴퓨터 프로그램은 이미 미국에서 여러 가지가 만들어져 있으며(예: Logic Works, Tarski's World), 필자도 벤슨 메이츠 교수의 『기호논리학』에서 제시된 자연 연역 방식을 토대로한 논리 교육 프로그램(Logician)을 두 종류(학생용과 교사용) 개발하여 이미 논리학 수업 시간에 사용하고 있다. 필자가 개발한 프로그램은 미국에서 개발된 프로그램들보다 다소 정도가 높은 것으로, 자칫 딱딱하고 융통성 없는 교과 내용으로 인해 학생들이 관심을 보이지 못할 기호논리학 분야를 새로운 매체를 도입하여 호기심을 유발함으로써 학생들로부터 좋은 반응을 얻고 있다.

논리학과 같은 내용을 컴퓨터 매체를 이용하여 보다 효율적으로 가르칠 수 있다는 것은 자명한 듯싶다. 우선 논리적인 내용을 애니메이션을 활용하여 보다 쉽게 잘 이해시킬 수 있을 것이며, 주어진 문제를 잘 풀었을 때 음향과 그래픽 등을 이용한 보상 방식은 학습 의욕을 더욱 고취시킬 것이다. 또 입력 방식과 진행 방식의 편의성은 반복 숙달을 요하는 논리와 같은 분야에서는 자칫 비슷한 내용의 반복으로 인해 지루해질 수 있는 학습을 보다 역동감 있게 진행할 수 있도록 하여준다. 더구나 수정의 용이성은 시행착오적 작업을 많이 요하는 논리 교육에서는 매우 중요한 강점이 될 것이다.

그러나 컴퓨터라는 새로운 매체의 도입의 이점이 컴퓨터 매체의 제반 특성들을 잘 활용함으로써 학생들의 호기심을 유발하고 학생들의 학습 효과를 높일 수 있다는 데에만 국한되는 것은 아니다. 새로운 컴퓨터 매체의 도입은 논리학의 여러 중심 개념들 자체에 대한 이해의 심도를 증진시킴으로써 논리학을 새로운 영역으로 확대시켜 주기도 한다. 이점에서 Jon Barwise와 John Etchemendy의 책과 프로그램의 한 묶음인 Hyperproof는 다른 여타의 논리 교육용 프로그램에 비해 월등한 장점이 있다. 이 프로그램은 전통적인 자연 연역 체계에서의 증명의 구성을 컴퓨터 화면을 통해 가능하게 하고, 학생들이 형식 언어의 의미를 그림을 통해 효과적으로 배우도록 할 뿐만 아니라, 더 나아가, 기존의 논리학을 새로운 영역으로 확대하고 있다는 점이 놀랄 만하다. 그 새로운 영역은 그림과 같은 비언어적 표상을 핵심적으로 포함한 추론, 좀 더 정확하게 말한다면, 문자와 그림을 동시에 포함하는 추론, 즉 이질적인 추론(heterogeneous reasoning)을 허용하는 영역이다.

우리의 일상 생활 속에서 그림, 지도, 차트, 그래프, 사진을 통한 많은 타당한 이질적 추론을 발견할 수 있다. 예를 들면 당신이 처음 가보는 도시에서 어떤 사람에게 길을 물어볼 때, 그 사람으로부터 얻은 언어적 정보와 당신이 눈앞에 보고 있는 장면들로부터 얻은 시각적 정보를 종합하여 길을 찾아야 한다. 비단 일상 생활 속에서뿐만 아니라 수학에서 피타고라스정리의 기하학적 증명, 집합론과 논리학에서의 벤 다이어그램의 사용이 예로서 지적될 수 있다. 진실로 모든 과학적 기술적 학문 분야는, 화학의 분자 그림부터 기하학적 그림, 일반적인 지도와 청사진에 이르기까지, 문제 해결에 정보를 시각화하는 자체의 시스템을 가진다. Hyperproof는 그림을 사용한 타당한 추론을 체계적으로 표상하는 데 성공함으로써, 이러한 일상적, 과학적 영역에서 빈번한, 그러나 전통적인 논리학 교육에서 무시된 논리 영역을 포섭하고 있다.

Hyperproof가 이러한 새로운 영역을 포섭할 수 있었던 것은 오직 컴퓨터의 시각적 정보를 보여주는 탁월한 능력에 의해서만 가능하게 되었다는 것을 이해해야 한다. 활자 매체에 의해서는 이러한 그림 표상을 통한 체계적 추론이 가능하지 않거나 실질적으로 어려울 것이다. 그 이유는 그림을 통한 추론이 그 성격상 동적인데 반하여 활자 매체는 정적이기 때문이다. 그림을 통한 추론은 많은 그림들과, 그림들의 변형을 포함하는데 컴퓨터는 이것을 가능하게 해준다. 이 점에서 컴퓨터는 논리학 교육에 있어 혁명적인 변화를 가져올 뿐만 아니라 논리학의 본성 자체에 대한 새로운 반성을 자극한다. 기존의 논리학자가 언어적 형태의 추론 연구에 집중하여 타당성 개념의 설명을 제시한 반면, Hyperproof 프로그램은 그림을 통한 추론을 체계적으로 구현함으로써, 비언어적 추론의 타당성 개념을 토대로 일반화된 타당성 개념 자체에 대한 새로운 설명을 제시하도록 논리학자를 자극한다.

필자는 먼저 Hyperproof가 채택하고 있는 이질적 추론에 대한 이론적 배경을 설명한 후 그 프로그램의 내용 및 특징 그리고 함축을 서술할 것이다.

2. 이질적 추론(Heterogeneous Inference)

타당한 연역적 추론은 이미 얻어진 정보에 암묵적으로 있는 정보를 추출하거나 명료하게 만드는 과정으로 기술된다. 현대 논리학은 추론을 1차 술어 언어와 같은 형식 언어의 문장들 사이의 관계로 모형화함으로써 이러한 직관을 설명한다. 특히 현대 논리학은 타당한 연역적 증명을 전제들로부터 형식적 규칙들의 적용에 의해 구성된 문장들의 구조로서 여긴다. 그러나 언어는 단지 정보가 전달될 수 있는 여러 형태 중의 하나이다. 그림, 지도, 실제 세계의 시각적 장면 등의 시각적 상은 다른 표상 형태이다.

2.1. 이질적 추론의 예들

추론에 있어 비언어적 표상의 중요성을 인식하는 좋은 방식은 단순히 일상적으로 나타나는 타당한 연역적 논증들 몇 개를 살펴보는 것이다. 그러면 몇 가지 예를 들어보자.[1]

---

1) 이 예들은 Jon Barwise and John Etchemendy[2]의 예들을 조금 변형하여 제시한 것이다.

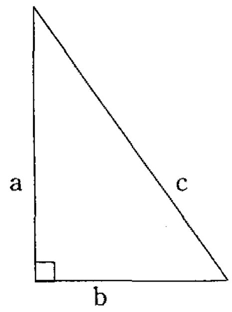
예1) 당신은 부산을 처음 여행하는 여행객이라고 하자. 어떤 운전자가 당신 앞에 멈추어서 태종대에 어떻게 가는지 물어본다. 당신은 지도를 사용하여 그 운전자에게 그 길을 가르쳐 준다.

여기서 당신은 어떤 연역적 추론을 하고 있다. 그 추론의 전제는 지도에 의해 제공된 정보이고 결론은 어떤 길이 태종대로 가는 길이라는 주장이다. 그러나 당신은 종이 위에 쓰여진 어떤 문자 정보를 단순히 읽는 것과 같이 지도를 읽고 있는 것은 아니다. 지도는 많은 정보를 포함하고 있고, 그것들의 대부분은 태종대의 방향을 아는데 사용되지 않는다. 당신은 이 정보를 그 지도로부터 추출해야 한다. 이것은 지도로부터 문자 정보를 추출하는 연역적 추론으로 불려질 수 있다.

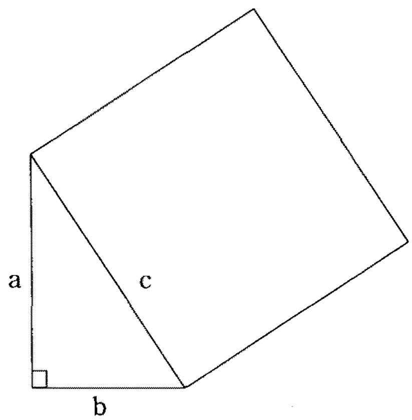
예2) 당신이 어떤 파티에 참석하고 있다고 가정하자. 당신은 어떤 사람, 예를 들면, 철수를 만나기를 원한다. 그러나 당신은 철수를 한번도 본적이 없어서 그 많은 사람 중 누가 철수인지 모른다. 옆에 있는 철수를 아는 사람에게 물어보니 철수는 옆방에서 수염을 기른 어떤 남자와 대화하고 있다고 듣는다. 그러나 옆방에 가보니 수염을 기른 사람이 두 사람 있다는 것을 알게된다. 다행히 그들 둘 다 어떤 한 남자와 대화를 나누고 있다. 당신은 바로 그 남자가 철수라고 결론 내린다.

여기서 당신의 결론은 두 형태의 정보에 기초를 두고 있다는 것에 주목하라. 첫 번째 정보는 "철수가 수염을 기른 남자와 대화하고 있다"는 옆사람의 진술이고, 두 번째 정보는 당신이 눈앞에 보고 있는 장면이다. 이 예의 특징은 추론의 결론이 어떤 이름을 어떤 사람과 관련시킨다는 것이다. 그리고 이러한 관련은 언어적 표상과 시각적 표상 둘 다를 어떤 점에서 넘어서고 있다. ('철수'라는 언어적 표상을 시각적 장면에 있는 어떤 사람과 관련시키기 때문이다.) 이것 때문에 이 추론은 형식적 언어의 연역적 추론에 의해 포착될 수 없다. 이 결론과 가장 유사한 문장 형태는 '철수'라는 이름을 철수 자체와 관련시키는 것이 아니라 어떤 기술과 관련시키는 것이 될 것이다 : "철수는 ... 한 남자이다". 그렇지 않다면 어떤 지시적(indexical) 표현을 도입하는 것이 될 것이다 : "저 남자가 철수이다." 물론 이 문장은 그 자체로는 당신의 결론이 아니다. 그 지시적 표현이 철수를 지시하는 것으로 해석할 수 있을 때만, 그 결론의 진정한 내용을 포착할 수 있을 것이다.

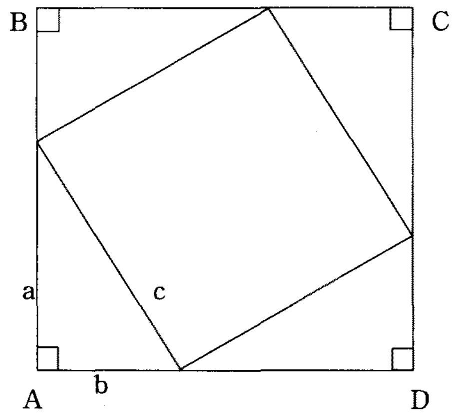
예3) 피타고라스 정리는 다음과 같이 어떤 직각 삼각형이 주어졌을 때, 빗변의 제곱 c^2은 양변의 제곱 $a^2 + b^2$과 같다는 것을 주장하는 정리이다.



이 정리의 잘 알려진 한 증명은 빗변에 대해 정사각형을 구성하는 것으로부터 시작한다.



그리고 원래의 삼각형을 다음과 같이 세 번 그린다.



삼각형의 세 각의 합은 직선이 된다는 사실에 의해 ABCD가 정사각형이 된다는 것을 증명한다. ABCD의 면적은 두 방식으로 계산될 수 있는데, 먼저 큰 정사각형의 한 변의 길이는 a+b이므로, 그 면적은 $(a + b)^2$이 된다. 다른 한편 그 면적은 작은 정사각형의 면적과 네 삼각형의 면적의 합으로 계산된다. 작은 정사각형의 면적은 c^2이고 네 삼각형의 면적의 합은 2ab이므로 전체 면적은 $c^2 + 2ab$가 된다. 따라서

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

가 된다. 이것에 의해 증명하고자 하는 결론

$$a^2 + b^2 = c^2$$

이 따라나온다.

이것이 피타고라스 정리의 올바른 증명이라는 것은 분명한 것 같다. 그러나 이 증명에서 기하학적 그림이 결정적인 역할을 수행하고 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 필자는 이러한 증명과 유사한 오직 문장으로만 된 증명이 없다는 것을 주장하는 것이 아니라, 이 주어진 증명은 그림을 핵심적으로 사용하고 있다는 것만을 주장하고 있다.

이 증명은 그림의 기하학적 조작과 대수적 기호 조작의 흥미로운 조합이다. 그러나 그 그림을 이해하자마자, 그 증명의 대수적 기호 조작은 거의 자동적이다. 그리고 그림 표상을 제거하고 오직 언어적 표상만을 사용한 증명을 구성하려는 것은 매우 복잡하고 길어서 원래의 증명을 모른다면 그 언어적 증명을 이해하기 어려울 것이다.

기하학적 증명에서 그림의 사용과 관련된 잘 알려진 위험이 있다. 그 위험은 증명에서 어떤 특별한 그림의 우연적 특성에 호소하는 가능성과 관련된다. 예를 들면, 위의 증명 단계에서 a가 b보다 크다는 우연적 특성에 호소한다면, 그 증명은 타당하지 않거나, 최소한 피타고라스 정리가 요구하는 일반성을 줄 수 없을 것이다. 위의 증명이 이러한 우연적인 특성을 사용하지 않았다는 것은 분명하다. 더군다나, 언어적으로 제시된 증명도 잘못으로 이끌 수 있는 우연적 특성을 가질 수 있다. 예를 들면, 증명을 구성하는 문장들 중 하나가 애매한 표현일 수 있으며, 그 애매함 때문에 추론 과정에 잘못이 발생할 수 있다.

그림을 사용한 추론에서 잘못될 가능성은 항상 있다. 그러나 언어적 형태의 추론에서 발생할 수 있는 오류보다 더 심각한 것은 아니다. 언어적 형태의 오류가 언어적 증명 단계들을 면밀히 연구하여 이해함으로써 피할 수 있는 것처럼, 그림을 사용한 추론에 대한 유사한 연구가 이러한 기법의 합당한 사용과 오류 사용에 대한 이해를 깊게 해줄 수 있을 것이다.

그림을 사용한 추론은 또한 퍼즐 문제나 GRE(Graduate Record Examination)의 분석적 추론 부분의 문제에서 전형적으로 나타난다. 다음 예는 이러한 종류의 간단한 예이다.

예4) 당신은 나란히 나열된 다섯 개의 의자에 4명의 사람 A, B, C, D를 앉혀야 한다. A와 C는 사이에 빈 의자를 두고 나란히 앉기를 바란다. C는 D보다 중심에 가깝게 앉혀야 하고, B는 D 옆에 앉아야 한다. 이 정보로부터 빈 의자는 중앙이나 양끝에 있지 않다는 것을 보여라. 당신은 중앙에 앉는 사람이 누군지 말할 수 있는가? 당신은 양끝 자리에 앉는 사람이 누군지 말할 수 있는가?

당신이 이 문제를 풀 때, 어떤 시각적 그림을 사용한다는 것은 분명하다. 이러한 종류의 문제들에서 그림의 사용은 중요하다. 그러면 이 문제를 푸는 추론 단계들을 살펴보자.

먼저 5개의 의자를 표상하는 다음과 같은 그림을 사용하자.

___	___	___	___	___

첫 번째 정보는 A와 C가 사이에 빈 의자를 두고 나란히 앉는다는 것이다. 의자가 비었다는 것을 나타내기 위해 ×를 사용하자. 그때 우리는 6개의 가능한 경우로 나눌 수 있다. 그러나 이 문제가 왼쪽과 오른쪽을 구별하지 않기 때문에 단지 3가지 가능한 경우로 나타낼 수 있다. 다른 3개의 가능한 경우는 이것들의 대응 상이다.

경우 1

A	×	C	___	___

경우 2

___	A	×	C	___

경우 3

___	___	A	×	C

C가 D보다 중앙에 앉아야만 한다는 정보를 사용하여, 우리는 경우 3을 제거할 수 있다. 왜냐하면, 그 경우에 C는 어떤 이용 가능한 의자보다 중앙에 더 가까이 있을 수 없기 때문이다. 유사하게 D는 B 옆에 앉아야만 하기 때문에, 경우 2를 제거할 수 있다. 어떤 연속된 두 개의 의자도 없기 때문이다. 결국 우리는 다음과 같은 두 가능성만을 가진다.

경우 1.1

A	×	C	B	D

경우 1.2

A	×	C	D	B

이 두 가지 경우 각각에서 진술된 제약 조건 모두가 만족되기 때문에, 두 경우 중 어떤 것도 배제될 수 없다. 이제 그 퍼즐의 질문들에 답할 수 있다. 첫째, 우리는 두 경우 모두에서 빈 의자가 중간이나 양끝에 있지 않다는 것을 알 수 있다. 둘

째, C는 중간에 앉아야만 한다는 것을 알 수 있다. 마지막으로 A는 한 끝에 앉아야만 한다는 것을 알지만, B나 D중 누가 다른 끝에 앉는지 알 수 없다. 각각의 경우가 가능하다.

위의 증명은 전통적인 논리학자가 생각하듯이 타당한 증명을 발견하기 위한 심리적 발견법이 아니라, 그 자체가 결론의 타당한 증명이라고 생각된다. 더 중요한 점은 위의 증명이 추론의 전통적인 설명이 놓치고 있는 증명의 어떤 특징을 보여주고 있다는 것이다. 예를 들면 위의 증명 단계들은 어떤 동질적인 것들(그림들)의 연쇄이지만, 전통적인 관점에서 보았을 때 위의 세 가지 질문은 다른 특성을 가진다는 것에 주목할 필요가 있다. 첫 번째 질문은 어떤 특별한 사실이 주어진 정보로부터 따라나온다는 것을 증명하도록 요청하고 있다. 두 번째 질문은 어떤 사실이 주어진 정보로부터 따라나오는지 혹은 그렇지 않은지 묻고 있고, 그 답은 '그렇다'이다. 세 번째 질문은 동일한 종류이지만, 그 답은 어떤 것이 주어진 정보로부터 따라나오지 않는다는 것을 보여주는 것으로 끝난다 : 위의 증명에서 끝자리에 B가 앉는 경우와 끝자리에 D가 앉는 경우가 모두 가능하다는 것을 보여주는 것으로 일종의 비귀결(nonconsequence) 결과를 보여주고 있다. 일반적으로 어떤 것이 어떤 가정으로부터 따라나온다는 것을 보여주는 것과 어떤 것이 어떤 가정으로부터 따라나오지 않는다는 것을 보여주는 것은 다른 두 종류의 일로 생각된다. 앞의 것은 연역이고, 뒤의 것은 모형 구성 작업으로 이해된다. 그러나 위와 같은 추론을 분석할 때, 이러한 이분법은 도움이 되지 않을 것이다. 왜냐하면 귀결을 보여주는 증명의 부분과 비귀결을 보여주는 증명의 부분 사이에 어떤 분명한 이분법도 없기 때문이다. 이러한 이중적 성격(연역과 모형 구성)을 통합된 틀에서 설명하는 것은 이질적 추론에 관한 이론의 중요한 부분을 차지할 것이다.

다음과 같은 주장을 살펴보자 : 그림과 같은 다양한 시각적 표상들은 타당한 연역적 추론에 본질적이고 합당한 구성요소가 될 수 있다. 물론 이 주장은 수학이나 논리학의 전통적 관점에서 보면 이단적 주장이다. 그러나 이 주장은 올바른 주장이다. 이러한 주장에 회의의 눈길을 보내는 사람에게는 오직 표준적 연역 체계만을 사용하여 예4)의 문제를 풀어보도록 권하고 싶다. 이러한 시도에 의해, 언어적 증명을 구성하는 것이 가능할 때에도, 그 증명은 그림을 사용한 실제적이고 타당한 논증의 어떤 매우 좋지 않은 복사판이라는 것을 알 수 있다.

2.2. 타당한 추론에서 시각적 정보의 이용 형태

위의 예들을 볼 때, 시각적 표상이 타당한 추론의 부분이 될 수 있는 3가지 다른 방식이 있다.
(i) 시각적 정보가 추론을 시작하는 주어진 정보의 부분인 경우이다. 가장 간단한 경우 이러한 종류의 추론은 시각적 장면으로부터 정보를 추출하여 언어적으로 표상하는 것이다.
(ii) 시각적 정보는 추론 그 자체에 필수적인 요소가 될 수 있다. 명시적인 경우 그러한 추론은 실제의 그림을 사용할 것이다. 그러나 어떤 경우에는 그 추론 단계를 머릿속에서 그릴 수 있기 때문에 그림을 필요로 하지 않을 것이다.
(iii) 시각적 표상은 추론의 결론에서 어떤 결정적인 역할을 할 수 있다. 예2)의 '철수'라는 이름을 가진 사람을 찾는 원래의 문제를 어떤 사진 속의 인물을 찾는 문제로 대치할 때, 그 결론은 '철수'라는 이름을 사진 속의 어떤 인물과 대응시키는 것이 될 것이다. 그 때 그 결론은 근본적으로 그림 표상을 포함할 것이다.

그림을 사용한 추론에서 그 추론의 동적인 특징에 주목해야 한다. 그 추론은 연속적으로 그림을 더하거나, 그림을 변형하는 형태를 가진다. 이것은 교실에서 칠판을 사용할 때, 그림을 사용한 추론을 비교적 용이하게 만드는 특징이다. 그러나 이 특징은 전통적인 언어적 문서, 즉 책이나 논문에서는 그 추론을 표현하기 어렵게 만든다. 이러한 문제뿐만 아니라 정적인 그림을 인쇄하는 것 자체가 더 많은 시간과 노력을 요하는 작업이다. 그러나 컴퓨터의 도입은 이러한 상황을 바꾸고 있다. 컴퓨터는 정확하고 덜 힘든 방식으로 그림이나 다른 형태의 시각적 정보를 쉽게 구성하거나 복사하게 한다. 컴퓨터 기술의 발전은 수학자가 그의 논문이나 책에서 그림을 사용하는 것을 용이하게 한다.

물론 기존의 정적으로 인쇄된 문서를 넘어서 컴퓨터에 기초한 동적인 문서를 생각할 수 있을 것이다. 이러한 문서 안에서는 독자의 눈앞에 펼쳐지는 동적인 시각적 표상을 산출하는 것이 가능하다. 그러한 동적인 문서가 정적인 문서에서는 발견하거나 이해하기 어려운 증명을 구성하는 것을 가능하게 해줄 수 있다. 논리 교육용 프로그램 Hyperproof는 이러한 방향에서의 첫 걸음으로 이해될 수 있다.

3. 이질적 추론의 구문론과 의미론

많은 연역 체계들 - 자연 연역 체계, 겐젠의 sequent calculus, 힐베르트 유형의 형식 체계등을 구성하고 연구하는 동기는 무엇인가? 그 동기는 우리가 일상적으

로 가지고 있는 타당한 추론의 사례를 형식적으로 포착하려는 시도에서 나온다. 예를 들면, "철수는 피곤하고, 영희는 집에 가기를 원한다"에서 "영희는 집에 가기를 원한다"를 추론한다. 가장 간단한 논리 체계인 명제 논리는 이러한 추론의 타당성이 "철수", "영희", "피곤하다", "집", "가다", "원하다"의 의미에 의존하지 않고, 단지 문장 연결사인 "...고(and)"의 의미에만 의존한다는 것에 주목한다. 따라서 "○이고, □이다"에서 "□이다"의 형태의 추론은 항상 타당한 것으로 여겨진다. 명제 논리는 진술들을 원자 문장 문자와 논리 상항들, 즉 "그리고", "혹은", "...이 아니다", "만약 ...이면, ...이다"로 구성된 구문론적 대상으로 보면서, 이러한 원자 문장 문자를 진리치에 의해 해석하고, 복합 문장의 진리치를 그 복합 문장을 구성하는 원자 문장 문자들의 진리치와 논리 상항들의 의미에 의존하는 방식으로 해석한다. 위에서 언급된 추론은 "철수는 피곤하다"를 문자 "P"로 대체하고 "영희는 집에 가기를 원한다"를 "Q"로 대체하는 것에 의해 표시될 수 있다. 전제는 "P이고 Q"로 표시되고 결론은 "Q"로 표시된다. 그 추론의 타당성은 전제를 참으로 만드는 "P"와 "Q"의 진리치의 어떠한 할당도 결론을 참으로 만드는 할당이라는 사실에 의해 포착될 것이다. 여기서 논리 상항들의 의미는 그 논리 상항을 포함한 복합 문장의 진리치 할당의 규칙에 의해 포착되고 있다.

형식 체계에서 정의된 논증의 타당성은 상대적인 개념이다. 우리가 문장 논리를 넘어서 1차 술어 논리의 형식 체계를 살펴볼 때, 그 체계에서 논증의 타당성 개념은 문장 논리 상항 "그리고", "혹은", "...이 아니다", "...이면 ...이다"에만 의존하는 것이 아니라 양화사, 즉 "모든"과 "어떤"의 의미에도 의존한다는 것을 알 수 있다. 진리치 할당 규칙은 양화사 "모든", "어떤"의 의미를 포착해야 하므로, 1차 술어 논리의 진리치 할당 규칙은 문장 논리의 진리치 할당 규칙에 비해 매우 복잡해진다. (구문론도 문장 문자뿐만 아니라 개체 상항, 자유 변항, 술어를 포함하도록 확장된다.) 1차 술어 논리에 의해 타당한 것으로 밝혀진 양화 문장을 포함한 논증이 문장 논리의 관점에서 타당하지 않을 수 있다. 그 이유는 양화사에 대한 해석을 문장 논리는 규정하지 않기 때문이다.

명제 논리나 1차 술어 논리와 같은 논리 분석의 친숙한 영역을 넘어서, 어떤 논리 체계들은 어떤 잘 정의된 개념에 의해 타당하게 되는 추론을 설명한다. 예를 들면, "무한하게 많은 소수가 있다"와 "단지 하나의 소수만이 짝수이다"라는 진술들로부터 "무한하게 많은", "단지 하나", "있다"의 의미에 의해 "짝수가 아닌 무한하게 많은 소수가 있다"가 귀결된다. 일반적인 논리 상항의 의미에 의존하는 추론처럼, "무한하게 많은"의 의미에 의존하는 추론을 형식화하는 논리 체계가

있다. 마찬가지로, "필연적으로", "가능하게", "항상", "안다" 등의 단어들에 의해 표현된 개념을 포함하는 추론을 형식화하는 논리 체계를 발견할 수 있다.

또한 논리 체계는 어떤 문장들에서 다른 문장을 도출하는 구문론적 규칙을 포함할 수 있다. 그래서 타당한 추론이 그 체계에서 표상될 수 있는 또 다른 방식은 이러한 구문론적 규칙들을 적용하여 전제로부터 결론에 이르는 증명의 존재에 의해서이다.

그러나 논증의 타당성을 오직 이러한 구문론적 방식에 의해 정의하는 것은 적절하지 않다고 주장된다. 그 이유는 간단하다. 모든 문장에 대해서, 어떤 체계 내에서 어떤 문장들로부터 그 문장의 도출은 항상 가능하다. 왜냐하면 우리는 그 도출을 허용하는 구문론적 규칙들을 가지는 어떤 형식 체계를 임의적으로 정의할 수 있기 때문이다. 이러한 문제점을 제거하기 위해서는 특정한 하나의 구문론적 형식 체계를 정의하고, 그 형식 체계가 건전하다는 (그리고 완전하다는) 것을 보여주어야 한다. 왜냐하면 그것을 보여줄 수 없다면, 그 형식 체계가 추론의 타당성을 포착하고 있다는 어떤 보장도 없기 때문이다. 그 형식 체계의 건전성(그 형식 체계에서 문장들의 집합 Γ로부터 문장 S의 도출이 있으면, Γ에서 S로의 논증은 타당하다)[2]을 증명한다면 그러한 보장은 있다. 그러나 이러한 건전성 개념은 우리로 하여금 다시 타당성 개념의 정의를 요구할 것이므로 구문론적 방식으로 타당성 개념을 정의하는 것은 순환에 빠질 것이다. 우리의 직관적인 타당성 개념을 잘 모형화한 의미론에 의해서 어떤 형식 체계의 건전성과 완전성을 보여줄 수 있을 때에만, 그 형식 체계는 우리의 비형식적 추론 관행과 그 추론 관행의 근저에 깔려있는 타당성 개념을 잘 포착한 형식 체계가 될 것이다.

위의 논의를 종합할 때, 다음과 같이 (형식적인) 논리 체계의 대략적인 특징을 제안할 수 있을 것이다.

> 논리 체계는 귀결(혹은 타당성)의 어떤 선-이론적 개념과 그 개념을 준수하는 일상적 추론 관행을 추상화하여 모형화한 수학적 시스템이다.
>
> 의미론은 귀결 개념을 규정하는 수학적 모형으로, 구문론적 추론 체계는 추론 관행을 포착하는 수학적 모형으로 생각될 수 있다.

---

2) 앞으로 'Γ로부터 S로의 논증이 타당하다'와 'S는 Γ의 귀결이다'를 동일한 의미를 표현하는 것으로 사용할 것이다.

논리 체계의 특징을 표현하는 이러한 가장 일반적인 진술에 의한다면, 전통적인 논리 체계가 놓치고 있는 어떤 부분이 있다. 위의 진술처럼 논리 체계가 우리의 직관적인 귀결 개념과 현존하는 추론 관행의 수학적 모형이라면, 전통적인 논리 체계가 단지 우리의 언어 표상의 추론 관행과 언어 표상의 귀결 개념에 집중되어 있다는 점을 지적할 수 있다. 앞에서 말한 것처럼 우리의 직관적인 귀결 개념과 추론 관행은 단지 언어 표상에만 그치는 것이 아니다. 그림 혹은 비언어적 표상 형태를 사용한 추론 관행이 있고 우리는 그 추론의 타당성 개념에 대한 직관적인 이해를 가지고 있다. 그렇다면 프레게, 러셀, 힐베르트 등이 발전시킨 전통적인 논리 체계는 이러한 비언어적 표상의 추론 관행과 귀결 개념을 포착하지 못하고 있는 것이 된다. 그림과 같은 비언어적 표상을 사용한 우리의 일상적인 추론 관행을 모형화하는 어떤 논리 체계가 필요할 것이다.

우리의 효율적인 일상적 추론이 언어적 표상과 비언어적 표상을 함께 사용하는 추론, 즉 이질적인 추론이라면 이러한 추론을 형식화하는 논리 체계는 다른 형태의 표상들 사이의 추론을 허용하는 논리 체계가 될 것이다. 이러한 이질적 논리 체계의 구문론과 의미론을 구성하는 것은 쉬운 작업이 아닐 것이다. 그러나 이질적 추론의 엄밀한 이해를 위해서는, 이질적 추론은 그 추론이 언제 타당하고 언제 타당하지 않은지 말해줄 수 있는 어떤 수학적 체계를 필요로 할 것이다.3) 그러한 형식 체계는 우리가 가지고 있는 이질적 추론의 직관적 타당성 개념을 이해하는 데 도움이 될 것이다. Jon Barwise와 John Etchemendy는 그들의 논문 [3]에서 이질적 추론 체계인 Hyperproof의 구문론과 수학적 의미론의 구성에 관한 몇 가지 아이디어를 제시하고 있다.

그들은 추론을 정보의 관점에서 접근하고 있다 : 구조가 있는 곳에는 정보가 있다. 행위자(동물, 사람, 컴퓨터 등)가 정보를 주고받기 위해, 그 정보는 그 행위자에 의해 어떤 방식으로든 표상되어야 한다. 어떤 주어진 표상들은 어떤 정보를 명시적으로 표상하지만, 어떤 다른 정보는 그 표상된 정보 안에 암묵적으로 포함되어 있을 것이다. 추론은 명료하게 표상된 어떤 정보 안에 이미 암묵적으로 포함되어 있는 정보를 추출하는 작업이다.

이러한 관점에서 어떤 추론 규칙은 그 추론 규칙의 결론에 의해 표상된 정보가 전제들에 의해 표상된 정보 속에 이미 암묵적으로 있다는 보장이 있을 때 타당하

---

3) 그러나 추론의 타당성을 정의하는 엄밀한 형식적 체계가 제시되기 전에, 수학에서 받아 들여진 비형식적 증명에 의해 수학의 진보가 이루어졌고, 비슷한 점에서 이질적 추론을 모형화하는 형식적 논리 체계가 없다고 하여, 이질적 추론이 타당한 것으로 받아들여지고 사용되고 있다는 사실에 큰 영향을 미치지 못할 것이라는 점이 지적되어야 한다.

다. 이러한 정보의 관점은 정보를 표상하는 다양한 방식들을 수용하기 때문에 이질적 추론을 형식화하는 하나의 통합적인 관점을 제공한다.

전통적인 의미론은 문장의 정보를 그 문장이 참이 되는 구조(모형)들의 집합으로 표상한다 : 만약 어떤 문장 S의 정보가 다른 문장들의 집합 Γ의 정보에 포함되어 있다면, 즉 Γ를 참으로 만드는 모든 구조들이 S를 참으로 만드는 구조들이라면, S는 Γ의 귀결, 즉 Γ로부터 S로의 논증은 타당하다. 그림과 같은 비언어적 표상을 사용한 추론의 타당성 정의는 언어적 경우와 유사하게 진행될 것이다.[4]

예를 들면 Hyperproof의 이질적 추론 체계에 대해, 정보에 기초한 엄밀한 수학적 의미론을 주는 것은 가능하다. 물론 그러한 의미론을 제시하기 전에 구문론을 제시해야 한다. 이러한 구문론과 의미론이 제시된다면, Hyperproof의 이질적 추론 규칙은 진실로 타당하다는 건전성 증명을 줄 수 있을 것이다. 그러나 우리는 이러한 수학적으로 엄밀한 건전성 증명을 주기 전에 Hyperproof의 추론 규칙이 타당하다는 선-이론적 이해를 가질 수 있다. 진실로 수학적 형식 체계가 포착해야 하는 것은 바로 이러한 선-이론적 이해이다.

4. 시각적 표상과 언어적 표상의 비교

시각적 표상들은 언어적 표상들과 구별되는 특징들을 가진다. Hyperproof를 살펴보기 전에 시각적 표상과 언어적 표상 사이의 구별되는 특징을 간략하게 알아보는 것은 도움이 될 것이다.

4.1. 동형적(homomorphic) 표상과 비-동형적 표상

그림은 그림이 표상하는 실제 세계와 유사하다. 물론 그 유사성의 정도는 여러 단계일 것이다. 예4)에서 2차원적인 그림 표상의 배열과 의자와 사람의 3차원적 배열사이에 어떤 대응이 있다. 앞으로 살펴볼 Hyperproof에서도 2차원적인 입체

---

4) 여기에는 많은 복잡한 문제가 있을 것이다. 먼저 다양한 정보 표상 형태들에 독립적인 엄밀한 정보 개념을 주어야 한다. 보통 정보를 구조들 혹은 모형들의 집합으로 정의하는 것이 일반적이다. (혹은 그것에 의해 배제되는 구조들의 집합으로 정의한다) 문장의 내용(정보)은 그 문장이 참이 되는 구조들 혹은 모형들의 집합으로 정의하는 의미론적 전통에 의해, 그림의 내용(정보)은 그림이 참이 되는 구조들 혹은 모형들의 집합으로 정의된다. 그러나 그림이 어떤 구조에서 참이 된다는 것은 이상하게 들리므로, 어떤 그림 표상이 어떤 구조에서 성립한다고 말하는 것이 적절하다.

도형의 그림과 3차원적인 입체들로 구성된 세계 사이에 어떤 대응이 있다. 어떤 표상을 어떤 것의 그림이나 사진 혹은 다른 시각적 표상으로 만드는 것은 바로 이러한 동형적 관계이다. 이러한 동형성 때문에 우리는 그림이나 사진에서 어떤 사실을 '직접적'으로 읽어낼 수 있다. 그러나 문장들과 문장들이 표상하는 것과의 관계는 매우 복잡하다. 분명히 이것은 동형적인 관계로 불릴 수 없다. 따라서 어떤 문장들에 이미 암묵적으로 있는 어떤 정보는 그림에서 어떤 정보를 직접적으로 추출하듯이 바로 읽혀지는 것이 아니라 의식적으로 추론되어야한다.

4.2. 연언적 정보와 선언적 정보

하나의 그림은 수천 개의 단어 만한 가치가 있다고 종종 이야기된다. 이것은 간단한 그림도 매우 많은 사실들, 즉 그 그림으로부터 단순히 '읽혀지는' 많은 사실들을 나타낸다는 것이다. 따라서 그림은 셀 수 없이 많은 문장들이 표현하는 것을 압축된 형태로 표현한다. 그러나 문장도 그 자신의 가치를 가지고 있다. 예를 들면 대부분의 선언 문장이나 부정 문장, 존재 양화 문장은 그림이 표현할 수 없는 사실을 표현한다. 선언 문장에서 각각의 선언지가 서로 양립 불가능한 가능성을 표현한다면, 어떤 단일한 그림에 의해 그 가능성을 표현할 방법은 없다. 그림 표상은 '연언적' 정보를 쉽게 표현하고, 문자 표상은 '선언적' 정보를 쉽게 표현한다고 말할 수 있다.

4.3. 지각적 추론

지각 체계는 상당한 자율성을 가진다. 지각 체계가 하는 것은 우리가 의식적으로 하는 추론으로부터 분리될 수 있다. 그럼에도 불구하고, 지각 체계는 매우 강력한 힘을 가지고, 추론이라 불릴 수 있는 많은 것을 행한다. 예를 들면 앞에서 말한 것처럼 수많은 사실들은 비교적 단순한 그림에서 단지 '읽혀지며', 이것은 추론의 일종이다. 따라서 사람들이 연역적 추론에서 시각적 표상을 사용한다는 것은 놀랄 만한 사실이 아니다. 시각적 추론이 매우 빈번히 도처에서 발생한다는 것을 이해한다면, 수학에서 그것이 사용되지 않는다고 주장하는 것은 잘못일 것이다.

지금까지 시각적 표상을 사용한 이질적 추론의 예들과 그 추론의 본성을 이론

적 관점에서 살펴보았다. 이러한 이해 위에서 기초적인 논리학의 내용을 가르치는 책과 프로그램의 한 묶음인 Hyperproof의 내용과 특징들을 간략히 살펴보자.

5. Hyperproof의 간략한 소개

Hyperproof는 사용자가 블록들의 세계에 대한 두 형태의 정보 위에서 추론하도록 해주는 프로그램이다. 화면 위에는 블록들의 세계에 대한 그림이 있다. 블록들의 세계는 8*8 크기의 격자 위에 놓여져 있는 다양한 형태와 크기를 가진 물체들로 이루어진다. 가능한 형태는 정6면체(cube), 정4면체(tetrahedron), 정12면체(dodecahedron)이다. 가능한 크기는 작거나(small), 중간이거나(medium), 크거나(large)이다. 그림의 중요한 특성은 그 그림이 표현하는 정보가 다양한 방식으로 불완전하다는 것이다. 먼저 블록 세계 안에 있는 블록들은 이름을 가질 수 있지만, 그 이름이 그림에서는 표시되지 않을 수 있다. 블록의 위치, 크기, 형태도 그림 표상에서는 정해지지 않을 수 있다.[5)]

그림 아래에, 사용자는 표준적인 1차 형식 언어를 사용한 문장들에 의해 정보를 제공받는다. 이러한 정보는 일반적으로 그림에서 제공된 불완전한 정보와 양립 가능하면서 더 많은 정보를 제공한다. 그 문자 정보는 대부분 그림 표상을 사용해 나타내기 어려운 정보들이다.

블록 세계에 대한 이러한 두 종류의 정보와 함께, 사용자에게 어떤 해결해야할 문제가 제시된다. 이러한 해결해야할 문제들은 여러 형태로 나타난다. (27개의 문제 형태들이 있다.) "어떤 것이 다른 어떤 것으로부터 따라나온다는 것을 보여라"와 같은 일반적인 귀결 문제뿐만 아니라, "어떤 것이 다른 어떤 것으로부터 따라나오지 않는다는 것을 보여라"와 같은 형태의 비귀결 문제가 있다. 또 다른 형태의 문제는 "어떤 것이 다른 어떤 것으로부터 따라나오는가?"라는 질문을 받는 문제이다. 그것이 따라나온다면, 사용자는 문장과 그림을 사용하는 증명을 구성함으로써 이것을 보여주어야 한다. 그것이 따라나오지 않는다면, 사용자는 그 주장을 거짓으로 만드는 세계를 표상하는 원래 그림의 확장을 구성함으로써 이것을 증명해야 한다. 이것들을 섞은 좀 더 복잡한 추론 문제는 "d의 왼쪽 편에 있는 정6면체의 수에 대해 당신은 최대한 무엇을 말할 수 있는가?"와 같은 종류의 문제

---

5) Hyperproof의 그림은 그 그림이 표상하는 블록 세계의 대상들의 수에 대해서는 완전한 정보를 제공한다. 즉 Hyperproof에는 블록들의 수에 대한 불완전한 그림 정보를 줄 수 있는 방법이 없다.

이다. 그러한 문제를 풀기 위해 사용자는 d를 확인해야 하고, 주어진 글자 정보와 그림 정보에 양립 가능한 모든 세계에서, 예를 들면 d의 왼쪽 편에 최소한 3개, 최대 4개의 정육면체가 있다는 것을 보여주어야 한다.

Hyperproof는 두 형태의 표상을 제공하면서, 아울러 정보를 다루는 추론 규칙들도 제공한다. 그 추론 규칙들은 1차 논리의 일반적인 문장 추론 규칙을 포함할 뿐만 아니라, 그림에 의해 제공된 비언어적 정보를 다루는 규칙도 포함한다. 증명을 입력하기 위해 사용할 수 있는 "자판"이 화면의 오른쪽에 나타난다.

여기서는 Hyperproof가 제공하는 논리학의 교육 내용들과 Hyperproof의 추론 규칙들에 대한 더 이상의 설명은 생략하고, 추론에서 그림을 사용할 때 제기될 수 있는 몇 가지 질문에 대해서만 살펴보기로 하자. 이론적으로 흥미있는 질문은 '그림은 추론 과정에서 정말로 필수적인가?'라는 질문이다. Hyperproof의 문제들 중 어떤 것은 그림 추론을 사용해야만 쉽게 풀릴 수 있는 문제가 많이 있다. 전통적인 수학자나 논리학자는 그림 정보의 사용은 추론에 필수적이 아니라고 주장해 왔다. 어떤 그림 정보와 문장 정보가 전제로 주어진다면, 그 그림의 정보를 문장 형태로 변형하여 문장만으로 이루어진 추론을 할 수 있기 때문에, 증명의 과정에서 그림을 사용한 추론은 나타나지 않을 것이라고 그들은 생각한다.

그러나 Hyperproof는 이것이 잘못된 생각이라는 것을 보여준다. Hyperproof는 주어진 그림에서 문장 형태의 정보를 추출하는 관찰(Observe) 규칙을 허용하기 때문에 위의 전통적 생각에 대한 정확한 형식화가 가능하다. 그림 표상을 전제로 포함하지만 오직 관찰(Observe) 규칙만을 포함한 표준적인 문장 논리의 확장을 '관찰에 의해 확장된 문장 논리(observationally augmented sentential logic, OASL)'이라고 부르자. 따라서 OASL 체계에서는 Apply 규칙이나 Case Exhaustive와 같은 그림 변형 규칙은 없다.

Hyperproof의 완전한 논리체계에 의해 주어진 증명들 모두가 OASL 체계의 증명으로 변형될 수 있다면, 추론에서 그림의 사용은 단지 부수적인 역할만을 수행한다는 전통적 생각을 강화시켜줄 것이다. 먼저 그림 추론을 사용한 증명이 OASL의 증명으로 변형될 수 있다고 하여도, 전자의 증명이 매우 단순하고 효율적인 경우가 많다는 것이 다양한 연습 문제에 의해 보여진다 : 많은 경우 증명의 OASL 판은 원래의 그림 증명 보다 훨씬 길고 비직관적이다. 그리고 OASL 증명을 구성하는 가장 좋은 방식은 먼저 그림 증명을 구성하고, 다시 되돌아가 관찰 규칙과 문장 규칙만을 사용하여 그림 추론 단계를 차례로 제거하는 것이다.

먼저 주목해야 할 것은 단지 귀결 증명들만이 OASL에서 주어질 수 있다는 사실이다. 다른 종류의 증명(예를 들면 비귀결 증명, 독립성 증명, 일관성 증명) 등은 그림의 변형을 요구하기 때문이다. 또한 귀결 증명에서도 오직 문장이 귀결이 되는 경우에만 OASL에서 구성 가능하다.

문장 귀결에 한정할 경우, 이론적인 쟁점과 실용적인 쟁점이 있다. 이론적인 쟁점은 'Hyperproof에서의 모든 문장 귀결 증명들이 OASL의 증명으로 대체될 수 있는가'이다. 실용적인 쟁점은 'Apply 규칙이나 Cases Exhaustive 규칙과 같은 그림 변형 규칙을 제거하는 것이 얼마만한 희생을 강요하는가'이다.

실용적인 쟁점에 대한 답은 그림 변형 규칙을 사용해야만 쉽게 할 수 있는 증명이 많다는 것이다. 사실 어떤 증명은 문장 추론 규칙을 사용하여 구성하는 것이 쉽고, 어떤 증명은 그림 변형 규칙을 사용하여 구성하는 것이 쉽다. 그리고 두 종류의 추론 규칙을 함께 사용해야 쉽게 구성할 수 있는 증명들도 있다.

이론적인 쟁점에 대한 답은 '아니다'이다 : OASL의 증명이 없는 Hyperproof 문장 귀결 증명이 있다. 그림 변형 추론 규칙을 포함한 완전한 Hyperproof 체계가, OASL에서는 증명할 수 없는 문장을 증명할 수 있는 이유는 관찰 규칙에 의해서 그림의 모든 정보가 추출되는 것이 아니기 때문이다. 예를 들면 그림은 어떤 블록 d가 어디에 정확히 위치해 있는지 표현할 수 있다. 그러나 언어의 제한 때문에 이 사실을 정확히 표현하는 문장은 없다. 만일 이 위치 정보가 증명의 과정에서 사용된다면, 그 증명에 대응되는 OASL 증명은 없을 것이다.

전통적인 논리학자나 수학자가 생각했듯이 그림은 추론에 단지 부수적인 역할만을 하는 것이 아니라 어떤 본질적인 역할을 할 수 있다. 그림 표상과 글자 표상은 다른 표상력을 가진다. 효율적인 증명은 이러한 다양한 표상들을 모두 사용한 증명일 것이다.

6. Hyperproof의 특징

기초적인 논리학 프로그램인 Hyperproof의 특징에 대해 다음과 같이 정리할 수 있을 것이다.

6.1. 그림 표상을 이용한 이질적 추론 체계

우리의 일상적인 영역 그리고 과학적인 영역에서 그림과 같은 비언어적 표상을

사용한 많은 추론 관행을 발견할 수 있다. 전통적인 논리학자나 수학자가 생각했듯이 비언어적 표상의 사용은 단지 유용한 부수적 수단 혹은 발견법으로 치부될 것이 아니라 엄밀한 연역적 증명으로 생각되어야 한다. Hyperproof는 그림 표상과 문장 표상을 동시에 사용함으로써 우리의 빈번한 이질적 추론 관행의 많은 부분을 새롭게 이해할 수 있게 하여주고, 또 그 추론 기법을 익히게 하여준다.

그리고 그림을 사용한 추론 체계이기 때문에, Hyperproof는 전통적인 문장 논리에 대한 의미론적 접근법을 제공하고 있다. 대부분의 대학 강단에서 논리학 강의가 행해지고 있지만, 구문론적인 추론 규칙에 집중함으로써 추론의 본성에 대한 어떤 이해를 놓치기 쉽다. 즉 우리의 자연 언어든 형식화된 1차 술어 언어든, 그것은 세계에 대한 어떤 정보를 표상하는 수단이라는 것이다. 형식 문장의 구문론적 구조에만 집중하지 않고, 그 문장의 내용 혹은 의미에 관심을 기울임으로써 타당한 추론에 대한 의미론적 이해를 주는 것이 논리학의 1차적 목표일 것이다. 진실로 우리가 선-이론적으로 가지고 있는 타당한 추론의 본성을 정확히 반영하고 이해할 수 있게 하는 것이 논리학을 배우는 중요한 이유일 것이다. 만일 학생들이 어떤 전제들에서 어떤 결론을 연역하는 증명 문제가 주어졌을 때, 전제들이나 결론의 내용에 주의하지 않고, 전제들에 구문론적 추론 규칙을 생각 없이 적용하여 결론을 도출하려고 한다면, 종종 길을 잃고 그 문제를 풀 수 없게 될 것이다. 주어진 전제들과 결론의 의미론적 내용에 주의를 기울여, 진실로 주어진 정보에서 결론이 따라나올 수 있는 어떤 대략적인 비형식적(informal) 증명을 마음속에 가지고 그에 대응되는 형식적 증명을 구성하는 것이 효율적인 방식일 것이다.

전통적인 논리학에서 추론의 타당성에 대한 이해는 수학적(집합론적)으로 형식화된 의미론에 의해 주어졌다. Hyperproof는 그림 표상을 포함함으로써 이러한 의미론의 많은 부분을 시각화하고 있다. 의미론의 '해석 하에서의(모형에서의) 참'을 '그림(이 표상하는 세계)에서의 참' 개념으로 대체함으로써 비귀결 증명, 일관성 증명, 독립성 증명을 구성할 수 있게 해준다. 또한 '그림(이 표상하는 세계)에서의 참'은 주어진 문장의 구문론적 형태가 아니라 내용에 관심을 기울이게 한다. Hyperproof는 어떤 의미에서 의미론을 시각화한 체계로 이해할 수 있다. 그리고 컴퓨터의 강력한 그림 표상 능력에 의해서만 의미론의 시각화가 가능하게 되었다는 것이 지적되어야 한다.

6.2. 논리 문제 해결에 관한 다양한 전략 전술의 효과적 학습

Hyperproof 교재는 다양한 추론 문제를 풀 때 도움이 되는 많은 전략과 전술을 설명하고 있다. 예를 들면 다음과 같은 다양한 전략들을 그 교재는 설명하고 있다. (i) 어떤 특정한 주장이 어떤 주어진 정보로부터 따라나오는지 그렇지 않은지 결정하라는 열린 문제가 주어지고, 당신이 어떤 것이 성립하는지 확신하지 못할 때, 그 문제를 해결하는 효율적인 전략은 그 주어진 정보가 성립하지만, 그 결론이 성립하지 않는 어떤 가능한 세계를 (표상하는 그림을) 구성하려고 먼저 시도하는 것이다. 만일 그러한 세계를 구성할 수 있다면 당신은 그 결론이 주어진 정보로부터 따라나오지 않는다는 것을 증명한 것이다. 한편 당신이 이러한 세계를 구성하는 것이 불가능하다는 것을 발견하게 되었을 때, 이 발견은 그 결론이 주어진 정보부터 따라나온다는 귀결 증명을 위한 어떤 방향을 제시해줄 수 있다. (ii) 일관성 증명 문제에서는 주어진 문장들의 내용에 관심을 기울임으로써 가장 정보가 큰 문장을 먼저 사용하여 주어진 그림을 확장하는 것이 좋은 전략일 것이다. (iii) Case Exhaustive 규칙을 사용할 때, 나누어지는 경우의 수를 가장 작게 해주는 문장을 사용하는 것이 그림 추론을 효율적으로 하는 방식이다. 그리고 경우의 수를 작게 해주는 문장은 정보가 가장 큰 문장일 것이다. (iv) 문장 추론 증명에서 주어진 전제들과 결론의 구문론적 특성에만 관심을 집중하는 것보다, 그것들이 말하는 것에 관심을 집중하는 것이 올바른 증명을 구성하는 첫 걸음이다. 그리고 이러한 문장들의 내용에 근거하여 어떤 비형식적 증명을 마음속에 구성하고, 그것에 대응되는 형식적 증명을 찾는 것이 좋은 전략이다. (v) 문장 추론 증명에서, 또 다른 좋은 전략은 "뒤로부터의 작업(working backwards)"으로 불려질 수 있는 것이다. 먼저 목표로 하는 결론을 살펴보고, 그 결론을 추론할 수 있기 위해 어떤 다른 문장이 필요한지 살펴보라. 그리고 그 문장을 새로운 추론 목표로 생각하고 이것을 증명할 수 있는지 살펴보는 것이다. 이것을 할 수 있다면 당신의 증명은 완성되는 것이다.

Hyperproof 교재는 위와 같은 다양한 전략을 상세히 설명하고 있다.

6.3. 일상적 추론 과정의 반영 1 (증명과 반례의 통합적 이해)

현대 논리학에서 증명과 반례는 매우 중요한 두 개념이다. 증명은 어떤 정보가 주어진 정보로부터 따라나온다는 것을 보여주기 위해 사용된다. 반례는 그렇지 않다는 것을 보여주기 위해 사용된다. 그러나 이 두 개념은 추론 과정 자체에 대한 모형이 아니라, 그것의 가능한 두 결과의 모형으로 여겨진다.

증명과 반례 이외에 어떤 것이 남는지 알아보기 위해, 어떤 형사 사건의 진행 과정을 생각해보자. 증명은 검사가 해야 할 것이다. 반례는 변호사가 일반적으로 사용하는 기법이다(변호사의 일은 피고의 유죄가 주어진 증거로부터 따라나오지 않는다는 것을 보여주는 것이다). 그러나 남겨진 것은 형사의 일로서, 형사는 증거에 의해 누가 유죄이고 누가 유죄가 아닌지 밝혀내야 한다. 셜록 홈즈가 살인 사건을 해결하고자 할 때, 그는 예를 들면 집사가 살인을 했다는 것을 증명하려고 시도하는 것으로부터 시작하지 않는다. 그의 목표는 살인자의 신원을 밝혀내는 것이다. 의심할 만한 가능한 용의자들의 집합이 있다. 홈즈가 수집한 증거는 그 가능한 용의자들 중 하나를 제외하고 다른 모든 경우를 제거할 수 있게 하거나, 혹은 살인자가 누군지 결정하기에는 충분하지 않을 수 있다. 따라서 홈즈의 추론 과정은, 증명이나 반례 중 어떤 것이 성립하는지 아는 것 없이, 가능성들의 공간을 탐색하는 과정으로 생각되어야 한다. 그 탐색의 결과가 증명이거나 반례이다.

현대 논리 이론은 수학적 추론을 패러다임으로 삼아 고안되었다고 생각되었다. 그러나 이것은 정확하지 않은 것 같다. 현대 논리 이론이 일상적인 추론이나 문제 해결 과정을 설명하지 않는 것처럼, 수학적 추론 과정 또한 설명하지 않는다. 아마도 현대 논리 이론이 수학적 대화의 패러다임 위에서 고안되었다고는 말할 수 있다 : 수학자가 그의 결과를 다른 수학자들에게 전달하는 엄격한 증명(혹은 반증)의 패러다임 위에서 고안되었다. 이것이 현대 논리 이론이 추론의 일상적 과정을 정확히 반영하지도, 혹은 실제적인 도구를 제시하지도 않는 이유이다.

더 정확하고 유용한 논리 이론은, 추론의 궁극적인 결과를 미리 아는 것 없이 적용될 수 있는 연역적으로 올바른 방법을 제공해 주어야 한다. 그 방법은 당신이 추론의 결과를 미리 아는 것이 없이, 추론을 진행시킬 수 있도록 해주어야 한다. Hyperproof는 그림 표상을 사용하는 당신이 미리 규정된 결론 없이 추론하도록 해주는 방법을 제공하고 있다. (Hyperproof에는 추론의 결론을 미리 규정하지 않은 많은 열린 문제들(open questions)이 있다)[6]

6.4. 일상적 추론 과정의 반영 2(자연 연역 체계)

지금까지 개발된 많은 1차 술어 논리 체계가 있다. 예를 들면 힐베르트 방식의

6) 이 글의 결론에서 이 특징에 대해 좀 더 설명할 것이다.

체계, 자연 연역 체계, 겐첸의 sequent calculus, 진리 나무 방식 등. 이러한 각각의 체계는 모두 동치이지만 각각의 독특한 특징을 가지고 있다. 예를 들면 힐베르트 형식의 체계는 무엇이 무엇으로부터 따라나올 수 있는가에 대한 매우 단순한 모형을 제공하고, 겐첸의 sequent calculus는 논리 체계 그 자체에 대한 메타-수학적 작업에 매우 적합하다. 자연 연역 체계는 일상 생활 속에서 그리고 수학에서 나타나는 추론(증명)의 구조를 잘 반영한다.

Hyperproof는 기본적으로 Fitch 방식의 자연 연역 체계를 채택함으로써, 가정에 의한 추론, 귀류법, 케이스에 의한 추론 등, 일상생활과 과학적 활동에서 빈번하고 중요한 추론 관행을 잘 반영하고 있다. 따라서 Hyperproof를 충실히 공부한 사용자는 이러한 일상적 추론을 더 잘 그리고 효율적으로 할 수 있을 것이다.

6.5. 흥미로움과 용이성

키보드(물리적 키보드와 화면 위의 키보드)를 사용하여 문장을 입력시킬 때, Hyperproof 프로그램은 다양한 default 기능을 가지고 있기 때문에 입력의 수고를 줄여준다. 예를 들면 대부분의 문장 도입 규칙과 제거 규칙들은 default 기능을 포함하고 있어서 적절한 근거 문장과 규칙을 지적하고 Enter 키를 누르면 자동적으로 적절한 결론이 입력된다.

또한 Hyperproof는 쉬운 문제에서 어려운 문제들까지 다양한 수준의 흥미로운 문제들을 제공하기 때문에 학생들은 상당한 도전 의식을 가지고 문제를 풀어나갈 수 있다. 정규적인 논리학 강의에서 표준적인 증명 문제들은 처음부터 너무 어렵거나, 문장의 내용보다는 단순한 규칙의 적용의 문제이기 때문에, 학생들은 쉽게 흥미를 잃을 수 있다. Hyperproof는 일상 생활에서 빈번히 나타나는 다양한 그림 추론을 포함하고 있다. 그리고 블록 세계를 표상하는 그림에 의해 문장의 내용에 관심을 기울이게 한다. 이것들은 학생들이 상당한 흥미를 느끼면서 문제를 풀 수 있게 해준다.

7. 결　　론 : 이질적 추론과 논리학의 성격

컴퓨터의 시각적 능력을 잘 이용한 논리 프로그램인 Hyperproof는 그림 표상과 문장 표상을 동시에 사용하는 이질적 추론 체계이다. 논리학이 일상적인 그리고 과학적인 영역에서 나타나는 비형식적인 추론 관행과 그 관행의 근저에 깔려

있는 선-이론적 귀결 개념을 포착하는 형식 체계에 대한 연구라고 한다면, 기존의 논리학이 문장 표상에만 집중한 것은 논리학의 영역을 부당하게 제한한 것이다. 일상적 영역과 과학적 영역 모두에서 그림과 같은 비언어적 표상들을 사용한 타당한 비형식적 추론이 빈번히 나타나고 있다. Hyperproof는 이러한 이질적 추론의 일부를 컴퓨터의 그림 표상 능력을 이용하여 체계화한 논리 시스템이다.

이질적 추론 영역의 포함은 타당한 추론의 본성 자체에 대한 반성을 불러일으킨다. 먼저 전통적인 1차 술어 논리를 통해 이질적 추론을 포섭하려는 시도가 있을 것이다. 예를 들면, 그림에 의해 주어진 시각적 정보를 (효율적인 방식으로 동시에 제공된) 매우 많은 문장 정보들의 집합으로 생각하는 논리학자가 있을 것이다. 이 경우, 시각 정보를 문장 정보로 옮기는 과정이 끝난다면, 추론 과정은 오직 문장 표상의 조작만을 포함할 것이다. 그러나 이러한 생각 방식에 대해 세 가지 난점을 지적할 수 있다.

(i) 그것이 가능할 때조차도, 그림 표상으로부터 문장들의 집합으로 정보를 옮기는 방식에서 많은 자의적인 선택이 있을 것이다. 어떤 1항 술어와 어떤 관계 술어를 가진 어떤 언어를 사용할 것인가? "저 블록이 d이다"와 같은 지시적 형태를 가지는 결론을 어떻게 표상할 수 있는가? 그림에서 참인 무한히 많은 문장들 중에서 당신은 정확히 어떤 문장들을 선택할 것인가? 이러한 각각의 문제들에서 잘못된 결정은 그 문제들을 풀 수 없도록 만들 것이다. 그래서 실제적인 관점에서 볼 때, 그림을 사용한 증명을 전통적인 문자 증명으로 전환하는 것은 단지 그 문제가 풀려진 후에만 이루어질 수 있는 어떤 것이다. 이러한 변환 과정은 사람들이 실제로 행하는 과정이 아닐 뿐 아니라, 사람들에게 도움이 되는 실용적인 도구를 제공하는 것도 아니다.

(ii) 좀 더 흥미로운 난점은 그림 표상을 사용한 추론의 특징과 관련된다. Hyperproof의 추론 과정을 살펴보면, 그것은 전통적인 논리학에서 가르치는 추론 과정과 매우 다르다는 것을 알 수 있다. 그것은 형식적 연역 체계에서 구문론적으로 정의된 방법과 다르게, 분명히 "의미론적" 성격을 띠고 있다. 예를 들면, 전통적 논리에서 선언 문장을 근거로 경우들을 나누는 것처럼, 그림 추론에서는 원자 문장, 부정 문장 혹은 양화 문장을 근거로 하여서 경우들을 나눈다. 이러한 기법은 문장의 구문론적 구조에 근거한 추론 방식이 아니고 그림(의 정보)과 문장의 의미에 근거한 추론 방식이다. 따라서 문장만을 사용하여 그림 추론을 표현하려는 시도는 그 추론의 '의미론적' 특성을 충실히 반영한 것이 아니다.

(iii) 그림 표상의 모든 정보를 언어 표상의 정보로 옮기기 위해서는 풍부한 언

어가 필요하다. Hyperproof의 11장에서, 그림 변형 규칙을 포함한 증명에 대해, 그림 변형 규칙이 없는 OASL 증명을 구성하는 것이 불가능한 예가 보여진다. 그 이유는 Hyperproof의 언어가 그림 정보를 남김없이 표현하기에는 어휘가 부족하기 때문이다.

사실 Hyperproof에서 블록 세계 그림의 핵심적 특징들을 포착하는 문장들을 줄 수 있을 때에도, 그러한 문장들은 그 그림의 귀결로 생각될 수 있다. 그림의 정보를 문장 형태로 추출하는 것은 그 자체가, 타당할 수도 그렇지 않을 수도 있는, 논리의 문제인 것이다. 결국 Hyperproof의 추론들은 환원불가능하게 이질적으로, 두 종류의 표상들 사이의 상호 작용을 포함하는 추론이다.

일상적 추론 과정을 탐색에 비유하는 것은 유용할 것이다. 추론 문제를 풀기 위해, 주어진 정보와 일관적인 가능한 경우들 혹은 세계들의 공간을 탐색한다. 문장은 이러한 가능한 경우들의 공간을 분할한다. 즉, 그 문장이 참이 되는 가능한 경우들의 영역과 거짓이 되는 가능한 경우들의 영역으로 분할한다. 전통적인 논리학은 문장들에 의해 분할된 가능성 공간의 관계에 대한 연구로 생각될 수 있다. 타당한 추론은 어떤 가능한 경우들의 집합을 특징짓는 문장들로부터 그 가능한 경우들에 대해 성립하는 새로운 문장을 끌어내는 것이다. 반례를 보여주는 것은 주어진 정보와 일관적이지만, 문제되는 주장이 성립하지 않는 가능한 경우를 보여주는 것이다.

이런 방식으로 추론을 생각할 때, 그림을 사용하는 추론이 어떻게 생각될 수 있는지는 분명하다. 문장처럼 그림도 정보를 전달한다. 그림도 동일한 가능성의 공간을 분할한다. 그러나 이 분할 방식은 매우 다르다. 좋은 그림은, 문장이나 다른 종류의 그림이 할 수 없는 방식으로, 그 문제에 적절한 형태로 정보를 표상한다.

따라서 문장 표상과 그림 표상을 모두 사용하는 추론에 관한 논리 이론은 가능성 공간을 그 대략적인 출발점으로 가진다 : 그림이든 문장이든, 주어진 전제 표상이 특징짓는 가능한 경우들의 총체에 대해 어떤 특정한 표상 정보가 성립한다면, 그 표상 정보는 주어진 정보로부터 따라나온다. 전제 표상이 성립하지만, 주장된 특정한 표상이 성립하지 않는 가능한 경우가 있다면, 그 특정한 표상 정보는 전제된 정보로부터 따라나오지 않는다. 다양한 표상들의 정보적 양의 형식화도 이러한 가능성 공간이라는 점에서 설명될 수 있다 : 더 많은 정보는 더 적은 가능한 경우들의 총체를 의미한다. 달리 말하면, 어떤 표상의 정보적 양은 그 표상에 의해 제거되는 가능한 경우들의 수에 의해 측정된다.

최근까지 비언어적 표상을 사용한 추론을 논리학자들은 거북한 일로 꺼려왔다. 그러나 컴퓨터가 가져온 혁신은 이 상황을 변화시켰다. 컴퓨터에 의해 가능하게 된 다양한 형태의 표상들은 우리를 훨씬 풍부한 표상들의 배열과 그것들을 사용한 타당한 추론의 새로운 형태에 직면하게 했다. 전통적인 논리학자는 이러한 종류의 추론이 어떤 깊은 수준에서 1차 술어 논리에 의해 설명될 수 있다고 생각해 왔다. 그러나 이러한 추론을 자동적으로 수행하는 시스템(예를 들면 Hyperproof)을 구현하는 실천적 문제는 이러한 주장을 포기하도록 만든다.

정교한 시각적 표상 능력을 가진 컴퓨터는 다양한 형태의 비언어적 표상을 구성하고, 보여주고, 이해하기 위한 강력한 도구를 제공한다. 특히 그림이나 도표와 같은 표상은 다소 쉽게 산출하고 변형할 수 있어서, 동적인 이질적 추론 과정이 화면 위에 보여질 수 있게 되었다. Hyperproof 체계가 컴퓨터에서 구현된다는 것은 우연한 일이 아니다. 컴퓨터의 정교한 그림 표상 이용 능력이 복잡한 그림을 사용한 연역적 체계를 산출하는 것을 실천적으로 가능하게 만들었다.

논리학은, 정보가 어떻게 표상되든 상관없이, 정보 추출의 타당한 형태들에 관한 연구이다. 전통적으로 논리학자들은 정보 추출의 타당한 형태들의 매우 작은 부분에만 초점을 맞추었다. 결국 논리학은 사람들이 다양한 표상들을 어떻게 사용하는지 파악해야 한다. 이러한 과업의 성취를 위해, 구문론, 의미론, 논리적 귀결, 증명, 반례 등의 전통적 개념을 이러한 새로운 형태의 표상들을 받아들일 수 있는 방식으로 확장하고 풍부하게 만들어야 할 것이다. 그림 표상과 문자 표상을 함께 사용하는 추론 체계인 Hyperproof는 이러한 확장된 논리 이론을 형성하는데 도움이 될 것이다.[7]

---

7) 이 논문은 서울대학교 1996년 해외 연수 특별지원(97, 3 - 98, 2)에 의해 씌어졌다.

참 고 문 헌

Jon Barwise and John Etchemendy, *Hyperproof*, Stanford: CSLI, and Cambrige : Cambridge University Press, 1994

Jon Barwise and John Etchemendy[1], "Computers, visualization, and the nature of reasoning" CSLI 홈페이지

Jon Barwise and John Etchemendy[2], "Visual Information and Valid Reasoning" in *Logical Reasoning with Diagrams*, New York: Oxford University Press, 1996.

Jon Barwise and Eric Hammer, "Diagrams and the Concept of Logical System" in *Logical Reasoning with Diagrams*, New York: Oxford University Press, 1996.

Jon Barwise and John Etchemendy[3], "Heterogeneous Logic" in *Logical Reasoning with Diagrams*, Hew York: Oxford University Press, 1996.

John Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.