

다차원 유한요소법을 이용한 웹 기반의 범용적 편미분 방정식 해석 모형의 개발 및 적용

- I. 모형의 개발 -

김준현 · 한영한

강원대학교 공과대학 환경 · 생물공학부

Web based General Partial Differential Equation Solver using Multidimensional Finite Element Method

- I. Model Development -

Kim, Joon-Hyun · Han, Young-Han

Division of Environmental and Biological Eng., Kangwon National University

Abstract

This study is aimed at the development of a comprehensive web-based partial differential equation solver (WPDES) using multidimensional finite element method, which can be operated on the basis of world wide web. Overall issues of engineering and environmental information management and facility control could be implemented using this solver. This paper describes the development technique of the model, which is first part on development of partial differential equation solver.

Conventional commercial general solver of computational fluid dynamics problems were investigated. All the relevant environmental models were analyzed to develop integrated environmental management system using WPDES. The governing equations and the parameters of investigated models were analyzed and integrated. Several numerical modules were invented for each partial differential term in partial differential equation of many related modeling problems. Each module was coded in the fashion of object oriented method, and was combined independently for the overall governing equation. WPDES has unique characteristic, which can analyze the problem through the suitable combination of modules without development of additional models for each environment problem with different governing equation, main variables, and parameters.

Key words : Environment Management, Object oriented Module, Web based Partial Differential Equation Solver (WPDES)

I. 서론

심화되고 있는 환경 오염의 방지 및 관리를 위해 환경 정보 처리 및 시설 제어 등의 여러 분야에 관련된 문제의 해결에 있어서 수학적 해법을 이용한 이론적 해나 수치해석을 이용한 수많은 전산모형이 개발되어 적용되어 왔다¹⁾. 이론적 해법은 방정식의 해에 있어서, 경계조건, 비선형성, 복잡한 공간형상인 경우 많은 제약을 가지므로 일반적으로 수치모형을 많이 사용하고 있으나⁴⁾, 지배방정식이 달라지는 경우 매번 새로운 프로그램을 작성하여야 한다는 불편함 및 어려움이 있다⁵⁾. 이러한 프로그램의 개발 및 사용의 복잡성 때문에 유체역학 분야에서는 PHOENICS, FLUENT, ABAQUS, ANSYS 등 상용 편미분방정식 해석 프로그램이 개발되어 다양한 분야에 적용됨으로서 프로그램 개발에 투자되는 시간·노력 및 비용을 일부나마 해결하고 있다⁹⁾. 그러나, 환경의 오염현상 해석에 있어서는 생화학적 반응에 관계된 다양한 주 변수 및 매개변수 때문에 환경 문제에 관련된 반응식을 구성하는 등 프로그램의 숙련된 조작이 필요하다. 따라서, 환경 문제에 관련된 지배방정식을 직접적으로 해석할 수 있고, 경계조건을 쉽게 연결할 수 있으며, 1, 2, 3차원의 공간형상을 쉽게 해석할 수 있는 편미분방정식 해석 프로그램의 개발이 절실한 형편이다¹⁵⁾.

본 연구에서는 수환경 분야의 유동 및 오염물 이동에 관련된 지배방정식이 물질, 운동, 에너지 보존 법칙에 기초한 일반적인 편미분방정식임에 기초하여, 유역, 하수관로, 지하수, 방류수계, 하수처리장내의 각종 반응조, 해양 등 해석 대상 문제에 따라 매개 변수가 약간 달라지거나, 공간적으로 해석하려는 차원이 달라지는 경우에도 쉽게 적용할 수 있는 범용적 다차원 유한요소모형을 개발하는데 목적을 두었다.

따라서, 본 연구에서는 편미분 방정식의 각 미분항에 대한 수치해석 모듈을 개발하고 그 모듈

을 프로그래밍하여 객체지향적이고 독립적으로 통합될 수 있는 시스템을 개발하였다. 이러한 방법을 통해, 수환경에 관련된 각 문제들이 지배방정식, 주 변수, 매개변수가 다른 경우에도 사용자가 적절하게 각 모듈을 결합함으로써 새로운 모형을 개발할 필요없이 어려운 문제를 쉽게 해석할 수 있는 다차원 유한요소모형을 개발하였다.

II. 연구 내용 및 방법

1. 문헌 연구

다차원 유한요소법을 이용한 편미분 방정식 해석 모형(WPDES; Web based Partial Differential Solver)을 개발하기 위하여 기존의 CFD (Computational Fluid Dynamics) 분야에서 사용되는 상용 편미분 방정식 해석모형에 대한 조사가 수행되었으며^{1,15)}. 이들에 대한 장단점 및 문제에 대한 해석 방법 등을 고찰하였다. 그리고, 유역관리 모형^{8,15)}, 지표수 및 지하수의 수리 및 수질관리 모형^{2,3,4,5,6,7,14,15)}, 지중 가스 거동 해석 모형¹⁰⁾, 다중다상 지하수 모형^{4,5,12,15)}, 하수도 시설관리 모형⁸⁾, 상수도 관리 모형^{11,13)} 등 환경과 관련된 많은 모형을 조사하여, 이들 모형의 지배방정식 및 파라미터를 추출한 후 체계화하였다. 상기에 언급된 모형들중 많은 부분은 본 연구진에 의해 이미 연구가 수행된 바 있어 이를 WPDES 모형에 결합시키기 위한 체계화 작업을 수행하였다.

2. 다차원 유한요소 모듈의 개발

환경 문제에 관련된 분야의 지배방정식은 물질, 운동, 에너지 보존 법칙에 기초한 방정식으로 일반적인 편미분방정식이다. 해석 대상 문제에 따라 파라미터가 약간 달라지는 경향이 있고, 간략화된 실험식을 쓰는 경우가 있으나 원칙적으로는 연속방정식, 운동방정식, 에너지방정식, 물질이

동방정식으로 구분된다. 이러한 방정식들은 편미분방정식의 형태를 가지며, 공간에 대한 1차와 2차 미분항, 시간에 대한 1차 미분항을 포함하고 있다. 따라서, 각각의 경우에 대한 편미분 방정식을 해석할 수 있는 객체지향적 유한요소 모듈을 개발하였다.

3. 편미분 방정식 해석 모형의 적용

본 연구에서는 편미분 방정식의 각 미분항에 대한 수치해석 모듈을 개발하고 그 모듈을 프로그래밍하여 객체지향적이고 독립적으로 통합될 수 있는 시스템을 개발하였다. 이러한 방법을 사용하면, 각 문제별로 지배방정식, 파라미터, 주 변수가 다르다 하여도 해석자가 적절하게 각 모듈을 결합함으로써 새로운 모형을 개발할 필요없이 어려운 문제를 쉽게 해석할 수 있을 것이다. 또한, 모듈 개발을 다차원으로 수행함으로써, 사용자의 필요에 따라 1·2·3 차원을 선택적으로 쉽게 해석할 수 있도록 개발하였다.

대부분의 환경 모형들은 연속, 운동, 에너지, 물질이동방정식에 기초한 일반적인 방법을 적용하고 있으나, 일부분은 이러한 방법을 적용하고 있지 않으므로, 앞서 개발된 다차원 유한요소 모듈을 이용한 편미분 방정식 해석 모형을 개발하기 위해서 관련된 지배방정식을 재정리하였다. 정리된 지배방정식을 개발된 모듈을 이용하여 지표수 및 지하수의 수리 및 수질 해석 모형, 지중 가스 거동 해석 모형, 다중다상 모형, 하수 유동 및 오염 해석 모형 등의 환경 분야에 적용할 수 있는 다차원 유한요소 모형을 개발하였다.

III. 다차원 유한요소 모듈의 개발

1. 편미분 방정식 해석 모듈의 개발

자연 현상을 해석하기 위해서는 일반적으로 실

험적 방법, 해석적 방법, 수치해석적 방법이 사용된다. 이중 수치해석적인 방법은 선형성에 제한이 없고, 경비적 적게 들며, 이상적인 조건, 복잡한 물리현상, 임계 상황 등을 해석할 수 있는 특성 때문에 효율적으로 사용될 수 있다¹⁾. 본 연구에서는 WPDES(Web based Partial Differential Equation Solver)의 개발을 위하여 유한요소법을 사용하였다.

WPDES 모형을 개발하는데 있어 다음과 같은 이유로 유한요소법이 사용되었다 : (1) 가중잔차법을 사용함에 따른 수치 오차 및 불안정성의 최소화, (2) 편미분 방정식의 각 미분항별로 모듈의 조합 가능, (3) 경계 조건의 해석 용이, (4) 4각형 격자망을 사용함으로써 GIS의 Polygon과의 용이한 결합 가능, (5) 독립적인 수치해석 논리에 기초한 객체지향적 모형으로의 구성이 가능하다.

유한요소법의 가중잔차법을 사용하여 지배방정식은 다음과 같은 가중잔차식으로 구성된다.

$$\int W_i(x, y, z) L(C) dR = 0$$

유한요소법을 적용하는 데 있어, 본 연구에서는 공간적으로 여러 차원에서 모델링할 수 있는 모형을 개발하기 위하여 다음과 같이 다차원 기저함수를 사용하여 대표적인 변수, 파라미터를 이산화하였다. 본 기저함수는 각 차원에 대하여 선형이나 기타 더 높은 차원으로 구성할 수 있으며, 사상의 개념을 사용하여, 각 차원별로 같은 함수를 사용하기 때문에 1, 2, 3차원으로 차원이 높아짐에 따라, 각 차원에 대한 기저함수를 곱해주면 된다. 따라서, 이러한 구조적인 해석 방법으로 다차원 문제를 쉽게 해석할 수 있었다. 또한, 각 격자망이 시간에 따라 변하지 않는 경우, 프로그램 운영에 있어서, 초기에 기저함수를 한번만 평가한다. 왜냐하면, 기저함수, 격자망의 공간적인 특성에만 좌우되기 때문이다.

$$C = \sum_{i=1}^8 N_i C_i, \quad \vec{V} = \sum_{i=1}^8 N_i \vec{V}_i, \quad D = \sum_{i=1}^8 N_i D_i$$

또한, 각 요소별 x-, y-, z-방향의 절점별 좌표도 다음과 같이 기저함수를 사용하여 평가된다.

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i N_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i N_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 z_i N_i$$

공간 및 시간 미분항을 객체지향적으로 해석하기 위하여 다차원 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 각 요소에 대한 공간 미분항에 대한 요소적 분행렬을 정의하였다. Super Computer의 Vector Processing을 이용하기 위하여 요소적분행렬도 전체 요소에 대하여 한번에 평가된 후 합쳐지며, 배열 구성에 있어서, Dimension이 가장 큰 배열부터 평가된다.

$$ET_{i,j} = \langle W_i, N_j \rangle = \int \int \int W_i N_j dx dy dz = \int \int \int W_i N_j |J| d\xi d\eta d\zeta = \sum_{ig=1}^m W_{i,ig} N_{j,ig} |J|$$

$$EW_{jd,ij} = \langle \frac{dW_i}{dx_{id}}, N_j \rangle = \sum_{ig=1}^m \frac{dW_{i,ig}}{dx_{id}} N_{j,ig} |J|,$$

$$EN_{jd,ij} = \langle W_i, \frac{dN_j}{dx_{jd}} \rangle = \sum_{ig=1}^m W_{i,ig} \frac{dN_{j,ig}}{dx_{jd}} |J|$$

$$EWN_{id,jd,ij} = \langle \frac{dW_i}{dx_{id}}, \frac{dN_j}{dx_{jd}} \rangle = \sum_{ig=1}^m \frac{dW_{i,ig}}{dx_{id}} \frac{dN_{j,ig}}{dx_{jd}} |J|$$

위 식에서, 각각 $ET_{i,j}$ 는 공간미분항이 없는 경우, $EW_{jd,ij}$ 는 가중함수에 대한 미분항, $EN_{jd,ij}$ 는 주변수에 대한 미분항, $EWN_{id,jd,ij}$ 는 주변수에 대한 이차미분항이 있는 경우에 대하여 부분적분과 Green의 원리를 사용하여 일차미분과 경계조건으로 변환된 경우이다.

이러한 알고리즘을 사용하여 범용적 편미분 방정식 해석모형의 개발이 가능하였다.

2. WPDES 모형의 구성

개발된 모형은 입·출력 모듈, 기저 및 가중 함수와 같이 공간영역에 관련된 모듈, 각 요소에 대한 절점 및 계수 평가 모듈, 요소 행렬 계산 및 조립 모듈, 비선형 시스템 해석 모듈, 해석 문제별 반응식 및 구성식 해석 모듈, 경계조건 해석

모듈 등 다양한 모듈로 구성되어, 해석 대상 문제에 따라 적절한 모듈이 조합되어 문제를 해석할 수 있는 객체 지향적 모듈로 구성되었다.

IV. 범용적 편미분 방정식 해석 모형의 적용

조사된 전산모형들의 지배방정식 및 변수들이 분석 및 통합되었다. 환경질 문제에 관련된 편미분 방정식에서 각 편미분 항에 대한 수치 모듈들이 앞서 개발되었다. 각 모듈은 객체지향적으로 프로그래밍되었으며, 전체 지배방정식에 대해 독립적으로 결합된다. 이러한 방법을 통해 개발된 WPDES 모형은 다른 지배방정식, 주 변수 및 상수를 가지는 각각의 환경문제에 대해 해로운 모형을 개발할 필요없이 본 연구에서 개발된 모듈들의 적절한 결합을 통하여 문제를 해석할 수 있는 전산모형을 구성하는 특성을 가지고 있다.

개발된 다차원 유한요소 모듈을 이용하여 여러 환경 해석 대상 문제에 대하여 개발된 방법을 적용하였다. 연속방정식, 운동방정식, 에너지방정식, 물질이동방정식으로 나누어 모형의 모듈내에 포함시켰으며, 1·2·3차원에 따라 식이 달라지기도 하나, 다차원 식으로 표현하여 일반화시킨 모형으로 개발하였다. 다음과 같은 분야에 대한 지배방정식이 재정립되었으며, 개발된 방법을 이용해 다차원 유한요소 모형으로 개발되었다.

1. 유역내 강우 유출 및 오염물 이동 해석 모형

1) 강우에 의한 2차원 유출

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = i$$

$$uH = \frac{1}{n} R^{2/3} S_{ox}^{1/2} H = R_x H, \quad vH = \frac{1}{n} R^{2/3} S_{oy}^{1/2} H = R_y H$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(R_x H) + \frac{\partial}{\partial y}(R_y H) = i$$

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon(R_x[EWX] + R_y[EWY]) \right] \{H\}^{n+1} \right. \\ & = \left. \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon-1)(R_x[EWX] + R_y[EWY]) \right\} \{H\}^n \right. \\ & \left. + [ET] i + \{f\} \right\} \end{aligned}$$

2) 수로내 흐름

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad Q = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} A = R_x WH$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (WH) + \frac{\partial}{\partial x} (R_x WH) = q$$

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t} W[ET] + \varepsilon(R_x W[EWX]) \right] \{H\}^{n+1} = \left\{ \frac{1}{\Delta t} W[ET] \right. \right. \\ & \left. \left. + (\varepsilon-1)(R_x W[EWX]) \right\} \{H\}^n + [ET] q + \{f\} \right\} \end{aligned}$$

2. 지표수 수리 모형

1) 1차원 지표수 유동 (연속방정식)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{elmax} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] - \varepsilon(u^*[EWX]) \right] h^{n+1} = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] - (1-\varepsilon) \right. \right. \\ & \left. \left. (u^*[EWX]) \right\} h^n - f_h^n \right\} \end{aligned}$$

2) 1차원 지표수 유동 (운동방정식)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{elmax} \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] u^{n+1} + \varepsilon(g[EVX]) h^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} [ET] u^n \right. \\ & \left. + (1-\varepsilon)(g[EVX]) h^n + f_u^n \right] \end{aligned}$$

3) 천해 해양에서의 2차원 유동 (연속방정식)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla[(h+g)\vec{V}]$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left[[ET] \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} h[EWX]\{u\} - h[EWY]\{v\} = -\{f_\eta\} \right]$$

4) 천해 해양에서의 2차원 유동 (운동방정식)

$$h \frac{D\vec{V}}{Dt} = -gh\nabla\eta - \frac{h}{\rho} \nabla\tau + h\vec{f}$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left[[ET] \frac{\partial u}{\partial t} + gh[EVX]\eta - hf[ET]v + \lambda[ET]u = \{f_{wx}\} \right]$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left[[ET] \frac{\partial v}{\partial t} + gh[EVY]\eta - hf[ET]u + \lambda[ET]v = \{f_{wy}\} \right]$$

5) 호수나 하천에서의 2차원 지표수 유동 (연속 방정식)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \nabla h = 0$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] \{h^{n+1}\} \right] - \varepsilon(h[EWX]\{u\} + h[EWY]\{v\})^{n+1} \right.$$

$$\left. = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] \{h^n\} \right\} - (\varepsilon-1)(h[EWX]\{u\} + h[EWY]\{v\})^n - \{f_h\}^n \right\}$$

6) 호수나 하천에서의 2차원 지표수 유동 (연속 방정식)

$$h \frac{D\vec{V}}{Dt} = -gh\nabla h - \frac{h}{\rho} \nabla\tau + h\vec{f}$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} + \varepsilon\lambda \right) [ET] u^{n+1} + \varepsilon\{gh[EVX]h - hf[ET]v\}^{n+1} \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\Delta t} [ET] u^n + (\varepsilon-1)\{gh[EVX]h - hf[ET]v\}^n + \{f_{wx}\}^n \right]$$

$$\sum_{e=1}^{elmax} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} + \varepsilon\lambda \right) [ET] v^{n+1} + \varepsilon\{gh[EVY]h + hf[ET]u\}^{n+1} \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\Delta t} [ET] v^n + (\varepsilon-1)\{gh[EVY]h + hf[ET]u\}^n + \{f_{wy}\}^n \right]$$

7) 연속방정식과 운동방정식의 유한요소식을 연립한 행렬의 구성

$$\begin{bmatrix} \frac{[ET]}{\Delta t} & -\varepsilon h [EWX] & -\varepsilon h [EWY] \\ \varepsilon gh [EVX] & \left(\frac{1}{\Delta t} + \varepsilon\lambda \right) [ET] & -\varepsilon hf [ET] \\ \varepsilon gh [EVY] & \varepsilon hf [ET] & \left(\frac{1}{\Delta t} + \varepsilon\lambda \right) [ET] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ u \\ v \end{Bmatrix}^{n+1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{[ET]}{\Delta t} & -(\varepsilon-1)h[EWX] & -(\varepsilon-1)h[EWY] \\ (\varepsilon-1)gh[EVX] & (\frac{1}{\Delta t}+(\varepsilon-1)\lambda)[ET] & -(\varepsilon-1)h[ET] \\ (\varepsilon-1)gh[EVY] & (\varepsilon-1)h[ET] & (\frac{1}{\Delta t}+(\varepsilon-1)\lambda)[ET] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ u \\ v \end{Bmatrix}^n + \begin{Bmatrix} f_h \\ f_{wx} \\ f_{wy} \end{Bmatrix}^n$$

3. 지표수 수질 관리 모형

1) 수질 해석 모형

$$\frac{\partial C_w^i}{\partial t} + \nabla(C_w^i \vec{V}_w) = \nabla(D_w^i \nabla(C_w^i)) + k_w^i C_w^i + S_w^i$$

$$\sum_1^{elmax} \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon([EN] + [EWN] - k[ET]) \} \{ C^{n+1} \}$$

$$= \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon-1)([EN] + [EWN] - k[ET]) \} \{ C^n \}$$

$$+ [ET] \{ S \} + \{ f_D \}$$

2) 수체내 온도 변화 해석 모형

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \vec{V}_w) = \nabla(D_t \nabla T) + \frac{k_T(T_0 - T)}{\rho C_p} + S_T$$

$$\sum_1^{elmax} \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon([EN] + [EWN] - k[ET]) \} \{ T^{n+1} \}$$

$$= \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon-1)([EN] + [EWN] - k[ET]) \} \{ T^n \}$$

$$+ [ET] (k \{ T_0 \} + \{ S \}) + \{ f_T \}$$

4. 지하수 유동 및 오염 이동 해석 모형

1) 지하수 수리 모형

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla(K \nabla h) + W = 0$$

$$\sum_{el=1}^{elmax} \{ [\frac{1}{\Delta t} S_s [ET] + \varepsilon [EWN] \} \{ h \}^{n+1} = \{ \frac{1}{\Delta t} S_s [ET] + (\varepsilon-1) [EWN] \} \{ h \}^n - [ET] \{ W \}^n + \{ f_h \}$$

2) 지하수 오염 이동 해석 모형

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{V_i}{R_f} \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{1}{\phi R_f} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j}) - \frac{\Sigma [W(C'-C)]}{\phi R_f} + \lambda C = 0$$

5. 다차원 지중 가스 유동 해석 모형

1) 지중 가스 유동 해석

$$\frac{\phi}{RT} \rho_w g \frac{\partial h_g}{\partial t} = \nabla(\rho_g K_g \nabla h_g) + \nabla(\rho_g K_g (\frac{\rho_g}{\rho_w} \nabla y)) + Q_g$$

$$\sum_1^{elmax} \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon [EWN] \} \{ h \}^{n+1} = \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon-1) [EWN] \} \{ h \}^n + [ET] \{ Q_g \} + \{ f_K \}$$

2) 가스상내 복합물 이동 해석

$$\frac{\partial(\phi C_g^i)}{\partial t} + \nabla(\phi C_g^i \vec{V}_g) = \nabla(\phi D_g^i \nabla(C_g^i)) + \phi(k_g^i C_g^i + S_g^i)$$

$$\sum_1^{elmax} \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon([EV] + [EWN] - k[ET]) \} \{ C^{n+1} \} = \{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon-1)([EV] + [EWN] - k[ET]) \} \{ C^n \} + [ET] \{ S \} + \{ f_D \}$$

6. 지하 난용성 물질의 다중다상 유동 해석 모형

$$\sum_{\alpha=1}^3 [\sum_{\beta=1}^3 (\rho_\beta w_\beta^i S_\beta S_{\beta\alpha}) \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha w_\alpha^i \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha S_\alpha \frac{\partial w_\alpha^i}{\partial t}]$$

$$+ \frac{\partial((1-\phi)\rho_s w_s^i)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 [\nabla(\rho_\alpha w_\alpha^i K_\alpha (\nabla h_\alpha + \frac{\rho_\alpha}{\rho_w} \vec{j}))]$$

$$+ \nabla(\phi S_\alpha D_\alpha^i \nabla(\rho_\alpha w_\alpha^i)) - \nabla((1-\phi)\rho_s w_s^i \vec{V}_s) + \sum_{\alpha=1}^4 [\theta_\alpha (I_\alpha^i + g_\alpha^i)]$$

$$\sum_{e=1}^{nel} [\sum_{j=1}^{nm} [\sum_{\alpha=1}^{na} [\frac{1}{\Delta t} [ET]_{ij}] [(\sum_{\beta=1}^{na} (\rho_\beta w_\beta^i S_{\beta\alpha})) (h_{\alpha j}^{n+1} - h_{\alpha j}^n)]]]$$

$$+ (\phi \rho_\alpha w_\alpha^i) (S_{\alpha j}^{n+1} - S_{\alpha j}^n) + (\phi \rho_\alpha S_\alpha) (w_{\alpha j}^{i, n+1} - w_{\alpha j}^{i, n})]$$

$$+ \sum_{id=1}^{nd} [\sum_{jd=1}^{nd} [\varepsilon [EWN_{id,jd,i,j}] \{ (\rho_\alpha w_\alpha^i K_\alpha)_j^{n+1} h_{\alpha j}^{n+1}]]]$$

$$+ (\phi S_\alpha \rho_\alpha D_\alpha^i) (w_{\alpha j}^{i, n+1} (w_{\alpha j}^{i, n+1})^{n+1}) + (1-\varepsilon) [EWN_{id,jd,i,j}] \{ (\rho_\alpha w_\alpha^i K_\alpha)_j^n h_{\alpha j}^n \}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\phi S_{\alpha} \rho_{\alpha} D_{\alpha}^i (w_{\alpha}^i)^n) + \frac{1-\phi}{\Delta t} [ET_{ij}] \{(\rho_s w_s^i)^{n+1} - (\rho_s w_s^i)^n\} \\
 & + \sum_{\alpha=1}^{na} \left[\sum_{j=1}^{nm} [EN_{ij}] (\rho_{\alpha} w_{\alpha}^i K_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_w})^n + [ET_{ij}] (\phi S_{\alpha} (I_{\alpha}^i + g_{\alpha}^i))^n \right. \\
 & \left. - \int W_{\alpha}^i dB - \int W_{\alpha}^i dB \right]
 \end{aligned}$$

7. 하수 유동 및 오염 해석 모형

1) 연속 방정식

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{elmax} \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] - \varepsilon (u^* [EWX]) \right] h^{n+1} \\
 & = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] - (1-\varepsilon) (u^* [EWX]) \right\} h^n - f_h^n
 \end{aligned}$$

2) 운동 방정식

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{elmax} \left[\frac{1}{\Delta t} [ET] u^{n+1} + \varepsilon (g [EVX]) \right] h^{n+1} \\
 & = \frac{1}{\Delta t} [ET] u^n + (1-\varepsilon) (g [EVX]) h^n + f_u^n
 \end{aligned}$$

8. 상수도 시설 관리 모형

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \nabla(D \nabla C_i) - \vec{V} \nabla C_i + k C C^* + S$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \varepsilon ([EN] + [EWN] - k C^*) [ET] \right\} \{C^{n+1}\} \\
 & = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\varepsilon - 1) ([EN] + [EWN] - k C^*) [ET] \right\} \{C^n\} + [ET] S + \{f\}
 \end{aligned}$$

V. 결론

본 연구는 지표수나 지하수, 해양 등 수환경 문제의 유동 및 오염물 이동에 관련된 지배방정식을 물질, 운동, 에너지 보존 법칙에 기초한 일반

적인 편미분방정식으로 정리하고, 다차원유한요소법을 이용하여 수환경 관리에 적용될 수 있는 Web 기반의 범용적 편미분 방정식 해석 모형 (Web Based P.D.E. Solver: WPDES)을 개발하는데 목적을 두고 수행되었다. 본 논문에서는 모형의 개발 기법을 제시하며, 개발된 모형의 검증 및 적용 결과에 대해서는 차후의 논문에서 제시하고자 한다.

본 연구 수행을 위해, 우선 기존의 편미분 방정식 해석 프로그램에 대한 조사를 수행하였다. 종합적 환경 관리 모형을 개발하기 위하여 여러 환경 분야에 관련된 기존 모형의 이론 및 수치해석 부분을 조사하였다. 이러한 조사 결과는 유역 유출 관리 모형, 지표수 및 지하수의 수리 및 수질 해석 모형, 지중 가스 거동 해석 모형, 지하 다중다상 모형, 하수도 시설 관리 모형, 상수도 시설 관리 모형 등을 포함하며, 본 연구를 통하여 WPDES 모형으로 통합되었다. 본 연구에서는 범용적인 편미분 방정식 해석 프로그램 기법을 적용하기 위하여, 기존의 수치해석 방법 대신에 지배방정식을 직접 수치해석 할 수 있는 모듈을 개발하여 위의 여러 모형에 대한 종합적인 해석을 수행하였다.

기존 모형들의 지배방정식 및 매개변수를 조사하여 체계화한 후, 편미분 방정식의 각 미분항 및 주변수, 매개변수 등에 대한 수치해석 모듈을 개발하고 그 모듈을 프로그래밍하여 객체지향적이고 독립적으로 통합될 수 있는 시스템을 개발하였다. 이를 통해, 각 문제별로 지배방정식, 매개변수, 주 변수가 다른 경우에도 사용자가 적절하게 각 모듈을 결합함으로써 새로운 모형을 개발할 필요 없이 어려운 문제를 쉽게 해석할 수 있는 다차원 모형을 개발하였다. 다차원 유한요소 모형의 개발로 사용자의 필요에 따라 차원을 선별적으로 해석할 수 있다.

지배방정식 및 파라미터 조사 결과를 바탕으로 편미분 방정식의 각 미분항에 대한 수치해석 모

들을 개발하고 그 모듈을 프로그래밍하여 객체지향적이고 독립적으로 통합될 수 있는 편미분 방정식 해석 모형(WPDES)을 개발하였다. 이를 통해, 각 문제별로 지배방정식, 파라미터, 주 변수가 다른 경우에도 사용자가 적절하게 각 모듈을 결합함으로써 새로운 모형을 개발할 필요없이 문제를 쉽게 해석할 수 있도록 하였으며, 다차원으로 모듈을 개발하여, 사용자의 필요에 따라 1·2·3 차원을 선택적으로 용이하게 해석할 수 있도록 개발하였다.

사 사

본 연구는 1998~2000년도 국립환경연구원의 G7 연구사업(공공기반기술개발과제, “통합 환경관리 시스템의 개발 및 적용”)의 연구비 지원에 의해 수행되었으며, 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

1. ACT Eng., 1999, A First Training Course of PHOENICS, ACT Eng.
2. Chiang, W. H. and W. Kinzelbach, 1998, Processing Modflow for Windows (PMWIN) - A Simulation System for Modeling Groundwater Flow and Pollution.
3. Jacob Bear, 1979, Hydraulics of Groundwater, McGraw-Hill, New York.
4. Kim, Joon Hyun, 1996, A Study on Fluid Flow and Mass Transformation in Immiscible Liquids, WEFTEC '96, Water Environment Fedration.
5. Kim, Joon Hyun, and M. K. Stenstrom, 1996, An Integrated Modeling for The Prediction of Subsurface Fluid Flow and Contaminant Migration, Asian Waterqual '97, IAWQ.
6. Kim, Joon Hyun, and M. K. Stenstrom, 1997, Modeling and Parameter Studies for Optimal Chlorination, Asian Waterqual '97, IAWQ.
7. Kim, Joon Hyun, and Lee, Yoon Seok, 1997, A Portable Code for Surface Water Quality Modeling using Multidimensional Finite Element Method, Asian Waterqual '97, IAWQ.
8. U.S. EPA, 1995, SWMM Windows Interface User's Manual, EPA-823-B-95-008.
9. 광승현, 1993, 계산 유체역학의 기술 개발과 선형 설계, 대한조선학회지, 30(2): 8-10.
10. 김교선, 김준현, 박진용, 1998, 지하매설 가스 배관중 누출가스의 지중 확산거동에 관한 연구, 한국가스안전공사.
11. 김준현, 1990, 정수장 운영의 자동화를 위한 역학적 염소 주입 모형, 강원대학교 과학 기술 연구 논문집, 29: 148-156.
12. 김준현, 1996, 다중 다상이론을 이용한 통합적 지하수 모델링 : 1. 다차원 유한요소 모형의 개발, 한국 토양환경학회지, 1(1): 89-102.
13. 문형극, 1996, 염소 소독 공정의 최적화를 위한 전산모형의 개발, 강원대학교 석사학위논문.
14. 이원환, 조원철, 최성열, 1993, 1차원 이류·확산 방정식에 대한 유한차분법과 유한해석법의 비교연구, 수공학연구발표회논문집, 7: 73-80.
15. 한영한, 2001, Web 기반의 환경관리를 위한 범용적 편미분방정식 해석모형의 개발, 강원대학교 박사학위논문.