

협대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 확률적 응답특성 Stochastic Responses of a Spring-Pendulum System under Narrow Band Random Excitation

조 덕 상*

Duk-Sang Cho*

<Abstract>

The nonlinear response statistics of an spring-pendulum system with internal resonance under narrow band random excitation is investigated analytically. The center frequency of the filtered excitation is selected to be close to natural frequency of directly excited spring mode. The Fokker-Planck equations is used to generate a general first-order differential equation in the dynamic moment of response coordinates. By means of the Gaussian closure method the dynamic moment equations for the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinary differential equations. The nonlinear phenomena, such as jump and multiple solutions, under narrow band random excitation were found by Gaussian closure method .

Key words : *Spring - pendulum system, Random excitation, Gaussian closure method, Internal resonance, Jump phenomenon*

1. 서 론

기존의 선형해석으로는 어떤 구조물의 동적 거동을 충분히 설명할 수 없을 만큼 복잡한 특성을 경험할 수 있다. 이러한 복잡한 응답특성은 그 계가 가지고 있는 고유의 비선형성에서 기인된다. 비선형 다자유도계의 경우 내부공진(internal resonance)은 정규모드들의 고유진동수 (ω_i) 사이에 $\sum \lambda_i \omega_i = 0, (\lambda_i = \text{정수})$ 의 관계가 존재할 때 발생할 수 있으며, 이로 인하여 관련된 모드들 사이에서 모드상호작용(modal interaction)

이 일어난다. 조화가진력을 받는 계의 경우, 정상상태 주기해의 점프현상과 포화현상(saturation phenomenon : 가진력이 특정 임계값에 도달하면 직접 가진되는모드의 운동이 더 이상 증가하지 않는 현상)을 비롯하여 Hopf 분기와 주기배가분기를 거쳐 혼돈운동을 가질 수 있음은 잘 알려져 있다⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾. 불규칙 가진력을 받는 비선형계의 경우, 동역학계의 응답 및 안정성 연구에는 확률과정(random process)과 확률미분방정식(stochastic differential equation)에 관한 수학적 이론을 필요로 할뿐만 아니라, 이 이론을

* 정희원, 영남대학교 공업기술연구소, 工博
영남대학교 대학원 졸업
(053) 814-4288

* Researcher, Institute of Industrial Technology,
Yeungnam University, Ph.D

직접 공학문제에 적용하는 데는 많은 어려움이 따르고 있다. 그 이유는 어떤 계를 해석하기 위해 적용하는 방법이 다르면 해석결과도 판이하게 달라질 수 있기 때문이다. 이러한 어려움에도 불구하고 불규칙 가진력을 받는 비선형 다자유도계의 응답특성에 미치는 내부 공진효과에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다⁽⁶⁾⁻⁽¹⁷⁾. 이 중에서 Ibrahim⁽¹⁰⁾과 이원경·조덕상⁽¹¹⁾은 확정적 비선형계에 존재하였던 포화현상은 비확정적 비선형계에서는 발견할 수 없었음을 보고하였다.

본 연구의 목적은 광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부 공진효과에 관한 연구^{(11),(12)}에 이어서 협대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부 공진효과를 조사하는 것이다. 탄성진자계의 운동방정식과 선형 필터방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트 방정식을 얻은 후 Gaussian closure 방법을 이용하여 27개의 자율상미분방정식을 구하고 이 방정식의 평형해와 응답의 통계적 특성을 조사하였다.

2. 운동방정식

스프링 방향으로 협대역 불규칙 가진력 $F(t)$ 를 받는 탄성진자계가 Fig. 1에 나타나 있다.

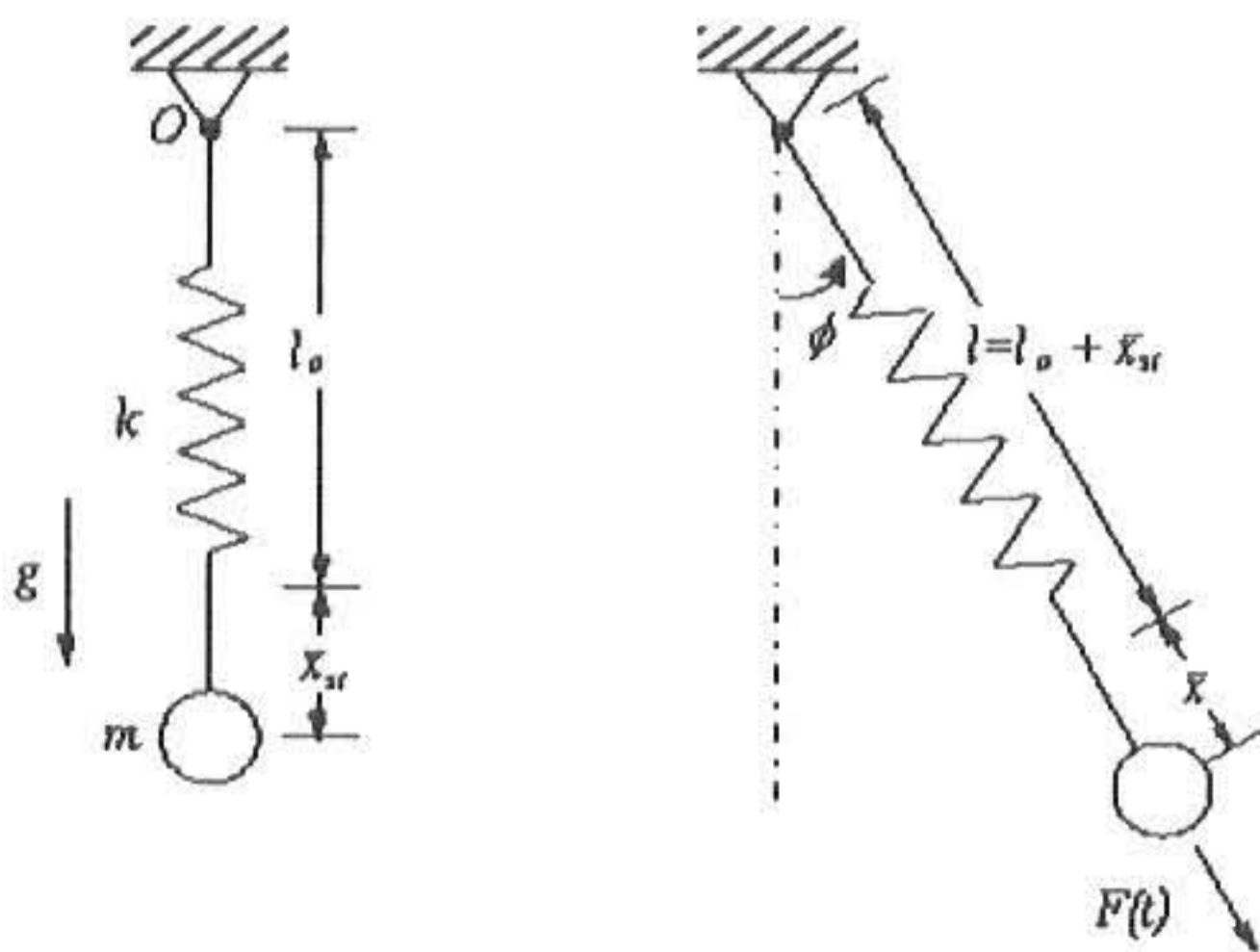


Fig. 1 A randomly excited spring-pendulum system

이 그림에서 $\bar{x}_{st} = mg/k$ 는 중력에 의한 처짐량, l_0 는 변형전의 길이, g 는 중력가속도, 그리고 k 는 스프링 상수이다. 선형 점성감쇠력 $c_1 dx/dt$ 와 $c_2 d\phi/dt$ 가 각각 스프링운동과 진자운동에

존재한다고 고려하면, 평면운동으로 구속되어 있는 이 계의 운동방정식을 다음과 같은 표현을 이용하여

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2m\omega_1}, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2ml^2\omega_2},$$

$$\tau = \omega_1 t, \quad r = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l},$$

$$z(\tau) = \frac{F(\tau/\omega_1)}{ml\omega_1^2}$$

무차원화 하면 다음 식을 얻는다⁽¹¹⁾.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x - (1+x)\phi'^2 + r^2(1-\cos\phi) = z(\tau), \quad (1)$$

$$(1+x)^2 \phi'' + 2\zeta_2 r \phi' + 2(1+x)x'\phi' + r^2(1+x)\sin\phi = 0 \quad (2)$$

여기서 x 와 ϕ 는 각각 스프링운동과 진자운동을 나타내며 '은 τ 에 대한 미분을 나타낸다. 근사해석을 위하여 이 계가 약비선형계라고 가정하기로 한다. 즉 식 (1)과 (2)에서 4차이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x + \frac{r^2}{2}\phi^2 - (1+x)\phi'^2 = z(\tau), \quad (3)$$

$$\phi'' + 2\zeta_2 r \phi' + r^2\phi - r^2 x\phi - 4\zeta_2 r x\phi' + 2x'\phi' - \frac{1}{6}r^2\phi^3 + r^2 x^2\phi + 6\zeta_2 r x^2\phi' - 2xx'\phi' = 0. \quad (4)$$

여기에서 $z(\tau)$ 는 선형필터방정식

$$z'' + c_f z' + r_f^2 z = W(\tau) \quad (5)$$

의 응답이고, c_f 는 주파수 폭, r_f 는 중심주파수이며 $W(\tau)$ 는 다음과 같은 상관관계를 가지는 백색잡음이다.

$$R_{ww}(u) = E[W(\tau)W(\tau+u)] = 2D\delta(u) \quad (6)$$

여기서 $2D$ 는 진동수를 $f(=\omega/2\pi)$ 로 표현할 때의 스펙트럼밀도이고 $\delta(u)$ 는 Dirac delta 함수이다.

3. Gaussian closure 방법

계의 응답과정을 다음과 같은 좌표변환을 이용하여

$$\{x, \phi, x', \phi', z, z'\}^T = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}^T = \mathbf{X}$$

Markov 벡터로 전환할 수 있으며, 또한 불규칙 과정 $W(\tau)$ 를 브라운과정(Brownian process) $B(\tau)$ 의 도함수(formal derivative) 즉 $W(\tau) = dB/d\tau$ 로 나타내면 식(3) ~ (5)는 다음과 같은 Ito방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_3 d\tau, \quad dX_2 = X_4 d\tau, \\ dX_3 &= (-2\zeta_1 X_3 - X_1 - \frac{r^2}{2} X_2^2 + X_4^2 \\ &\quad + X_1 X_4 + X_5) d\tau, \\ dX_4 &= (-2\zeta_2 r X_4 - r^2 X_2 + r^2 X_1 X_2 \\ &\quad + 4\zeta_2 r X_1 X_4 - 2X_3 X_4 + \frac{1}{6} r^2 X_2^3 \\ &\quad - r^2 X_1^2 X_2 - 6\zeta_2 r X_1^2 X_4 + 2X_1 X_3 X_4) d\tau \\ dX_5 &= X_6 d\tau, \\ dX_6 &= (-c_f X_6 - r_f^2 X_5) d\tau + dB(\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

이 Markov 벡터에 대한 응답의 확률밀도함수는 다음과 같이 Fokker-Planck 방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\mathbf{x}, \tau) &= - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 는 결합확률밀도함수(joint probability density function)이고 $a_i(\mathbf{x}, \tau)$ 와 $b_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ 는 각각 Markov 과정 $\mathbf{X}(\tau)$ 의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이다.

Fokker-Planck 방정식 (8)로부터 완전해 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 를 구하는 것은 불가능하다⁽¹⁶⁾. 그렇지만 임의의 차수 $n(=a+\beta+\gamma+\eta+\iota+\nu)$ 에 대한 $p(\mathbf{x}, \tau)$ 의 모멘트 방정식은 식 (10)에 $x_1^a x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta x_5^\iota x_6^\nu$ 를 곱하고 전 상태공간 $(-\infty < x_i < \infty)$ 에 대하여 적분함으로써 n 차에 대한 모멘트방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} m'_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} &= \alpha m_{a-1, \beta, \gamma+1, \eta, \iota, \nu} \\ &\quad + \beta m_{a, \beta-1, \gamma, \eta+1, \iota, \nu} \\ &\quad - \gamma m_{a+1, \beta, \gamma-1, \eta, \iota, \nu} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &- 2\gamma \zeta_1 m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} \\ &- D\nu(1-\nu) m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu-2} \\ &- \eta r^2 m_{a, \beta+1, \gamma, \eta-1, \iota, \nu} \\ &- 2\eta \zeta_2 r m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} \\ &+ \gamma m_{a, \beta, \gamma-1, \eta+2, \iota, \nu} \\ &- 2\eta m_{a, \beta, \gamma+1, \eta, \iota, \nu} \\ &- \frac{1}{2} \gamma r^2 m_{a, \beta+2, \gamma-1, \eta, \iota, \nu} \\ &+ \eta r^2 m_{a+1, \beta+1, \gamma, \eta-1, \iota, \nu} \\ &+ 4\eta \zeta_2 r m_{a+1, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} \\ &+ \gamma m_{a+1, \beta, \gamma-1, \eta+2, \iota, \nu} \\ &+ 2\eta m_{a+1, \beta, \gamma+1, \eta} \\ &- \eta r^2 m_{a+2, \beta+1, \gamma, \eta-1, \iota, \nu} \\ &+ \frac{1}{6} \eta r^2 m_{a, \beta+3, \gamma, \eta-1, \iota, \nu} \\ &- 6\eta \zeta_2 r m_{a+2, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} \\ &+ \gamma m_{a, \beta, \gamma-1, \eta, \iota+1, \nu} \\ &+ \iota m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota-1, \nu+1} \\ &- \nu r_f^2 m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota+1, \nu-1} \\ &- \nu c_f m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu} \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{a, \beta, \gamma, \eta, \iota, \nu}(\tau) &= E[X_1^a X_2^\beta X_3^\gamma X_4^\eta X_5^\iota X_6^\nu] \\ &= \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^a x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta x_5^\iota x_6^\nu p(\mathbf{x}, \tau) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \end{aligned}$$

방정식 (9)는 연성된 모멘트방정식이 무한 조(infinite set)로 구성되어 있다. 따라서 확률적 응답특성을 구하기 위하여 이 계를 약비선형계라고 가정할 경우 계의 응답의 확률밀도함수는 가우스 분포로 근사할 수 있다. 따라서 3차 및 4차 cumulant를 0으로 놓음으로써 3차 및 4차 모멘트를 다음 식과 같이 1차 또는 2차 모멘트로 전환할 수 있다^{(18),(19)}.

$$\begin{aligned} E[X_\alpha X_\beta X_\gamma] &= E[X_\alpha]E[X_\beta X_\gamma] \\ &\quad + E[X_\beta]E[X_\alpha X_\gamma] \\ &\quad + E[X_\gamma]E[X_\alpha X_\beta] \\ &\quad - 2E[X_\alpha]E[X_\beta]E[X_\gamma] \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 E[X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\eta] &= E[X_\alpha X_\beta]E[X_\gamma X_\eta] \\
 &+ E[X_\alpha X_\gamma]E[X_\beta X_\eta] \\
 &+ E[X_\alpha X_\eta]E[X_\beta X_\gamma] \\
 &- 2E[X_\alpha]E[X_\beta]E[X_\gamma]E[X_\eta]
 \end{aligned} \tag{11}$$

이 경우 식(9)는 $n = 1, 2$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있다. 따라서 27 개의 모멘트(6 개의 1차 모멘트와 21개의 2차 모멘트) 미분방정식을 얻을 수 있다.

편의상 Gaussian closure 방법으로 얻어진 27개의 자율상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{m}' = f(\mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \in R^{27} \tag{12}$$

여기서

$$\mathbf{m} = \{m_{1,0,0,0,0,0}, m_{0,1,0,0,0,0}, \dots, m_{0,0,0,0,1,1}\}^T$$

이며 $f(\mathbf{m}) = \{f_1(\mathbf{m}), f_2(\mathbf{m}), \dots, f_{27}(\mathbf{m})\}^T$ 은 이 계의 벡터장(vector field) 이다.

우선 계 (12)의 평형해 \mathbf{m}_0 는 다음의 식

$$f(\mathbf{m}_0) = 0 \tag{13}$$

으로부터 구해지며 이 평형해의 안정성을 판별하기 위하여 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}$ 으로 두고 평형해의 작은 교란 $\delta\mathbf{m}$ 에 대한 미분방정식으로 바꿔쓴 후 $\delta\mathbf{m}$ 의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 선형 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta\mathbf{m}' = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \delta\mathbf{m} \tag{14}$$

이 Jacobian 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 그 평형해 \mathbf{m}_0 는 점근적으로 안정하다고 판단된다. 식 (12)의 평형해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m_{2,0,0,0,0,0} &\equiv E[x^2] = \frac{D(2\xi_1 + 2c_f^2 \xi_1 + c_f(r_f^2 + 4\xi_1^2))}{2c_f r_f^2 \xi_1 P} \\
 m_{0,0,2,0,0,0} &\equiv E[x'^2] = \frac{D(2\xi_1 + c_f)}{2c_f \xi_1 P}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{0,0,0,0,2,0} &\equiv E[z^2] = \frac{D}{c_f r_f^2} \\
 m_{0,0,0,0,0,2} &\equiv E[z'^2] = \frac{D}{c_f} \\
 m_{1,0,0,0,1,0} &\equiv E[xz] = \frac{D(1 + c_f^2 - r_f^2 + 2c_f \xi_1)}{c_f r_f^2 P} \\
 m_{1,0,0,0,0,1} &\equiv E[xz'] = \frac{-D(c_f + 2\xi_1)}{c_f P} \\
 m_{0,0,1,0,1,0} &\equiv E[x'z] = \frac{D(c_f + 2\xi_1)}{c_f P} \\
 m_{0,0,1,0,0,1} &\equiv E[x'z'] = \frac{-D(1 - r_f^2)}{c_f P}
 \end{aligned} \tag{15}$$

나머지 모멘트는 0

여기서

$$P = 1 + c_f^2 + r_f^4 + 2c_f \xi_1(1 + r_f^2) - 2r_f^2(1 - 2\xi_1^2)$$

이다. 이 평형해들은 탄성진자계가 진자의 운동(ϕ)은 없이 스프링운동(x)만 하고 있음을 말해 주고 있다.

4. 수치결과

수치예를 위하여 우선 대수방정식 (13)을 수치적으로 풀어서 식(15)로 표시된 평형해가 유일한 평형해인가를 조사한 후, 이 평형해의 안정성을 판별하였으며, 이 평형해가 안정성을 잃는 경우에는 상미분방정식 (12)를 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다. 수치적분은 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하였다.

Fig. 2는 $\xi_1 = \xi_2 = 0.02$, $c_f = 0.001$, $D/c_f r_f^2 (= E[z^2]) = 0.00001$ 이고 진동수비 $r = \omega_2/\omega_1$ 이 각각 0.5, 0.48, 0.46, 0.45인 경우에, 가진되는 중심주파수 r_f 에 따라 정상상태(steady state)에서 운동의 제곱평균값이 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있다. Fig. 2(a)에서 내부공진 영역($B \leq r_f \leq B'$)을 벗어나 있는 두 응답은 각각 스프링운동과 진자운동의 제곱평균값이 시간 τ 에 무관한 정상과정(stationary process)이며, 이 결과는 정상가진(stationary excitation)에 의한 응답이 정상과정이므로 선형계의 응답특성과 일치한다. 이 사실은 비록 두 운동이 비선형항으로 연성되어 있다 하더라도 내부공진 영역을 벗어나면 이 계는 전혀 연성되어 있지 않은 선형계나 다름이 없음을 말해 주고 있다.

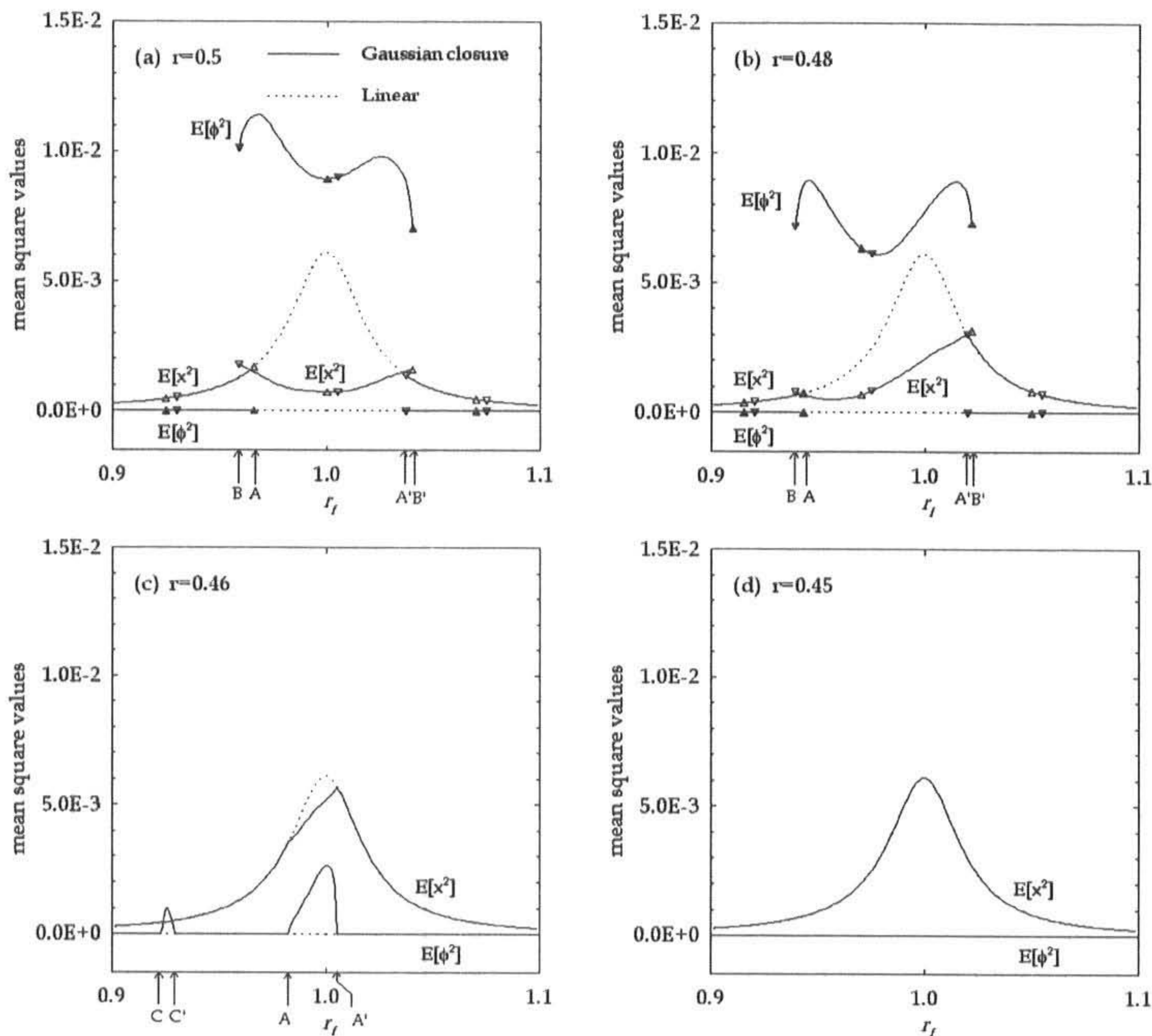


Fig. 2 Mean square responses as function of center frequency, r_f for $(\zeta_1, \zeta_2, c_f, D/c_f r_f^2) = (0.02, 0.02, 0.001, 0.00001)$. Δ, \blacktriangle , r_f increasing; $\nabla, \blacktriangledown$, r_f decreasing.

내부공진영역에서는 계의 비선형 연성(nonlinear coupling)으로 인하여 직접 가진되는 스프링운동으로부터 직접 가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달됨을 알 수 있으며, 응답과정은 비정상 과정(non-stationary process)으로 나타났다. 이 그림에서는 그 평균값만을 표시하였다. 평형해의 안정성 해석결과에 의하면 $r_f = A$ 와 $r_f = A'$ 에서 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었으며 수치적분을 수행한 결과 $r_f = B$ 와 $r_f = B'$ 에서도 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다. 다시 말하면 구간 $B \sim A$ 와 $A' \sim B'$ 에서 다중해(multiple solution)가 존재

하는 영역이 된다. 또한 B, A, A', B' 에서는 점프가 존재하는데 A 와 A' 에서는 상향점프(upward jump)가 B 와 B' 에서는 하향점프(downward jump)가 존재한다. 중심주파수 r_f 값을 증가시키면 A 에서 상향점프 발생하며 B 에서 하향점프 발생한다. 반대로 r 값을 감소시키면 A' 에서 상향점프 발생하며 B 에서 하향점프 발생한다. 이러한 점프현상은 초기조건에 매우 민감함을 해석을 통하여 파악할 수 있다. Fig. 2(b)도 Fig. 2(a)와 마찬가지로 4개의 점프가 존재하나 진자운동의 세평균값의 피크가 좌측으로 치우쳐짐을 알 수 있다.

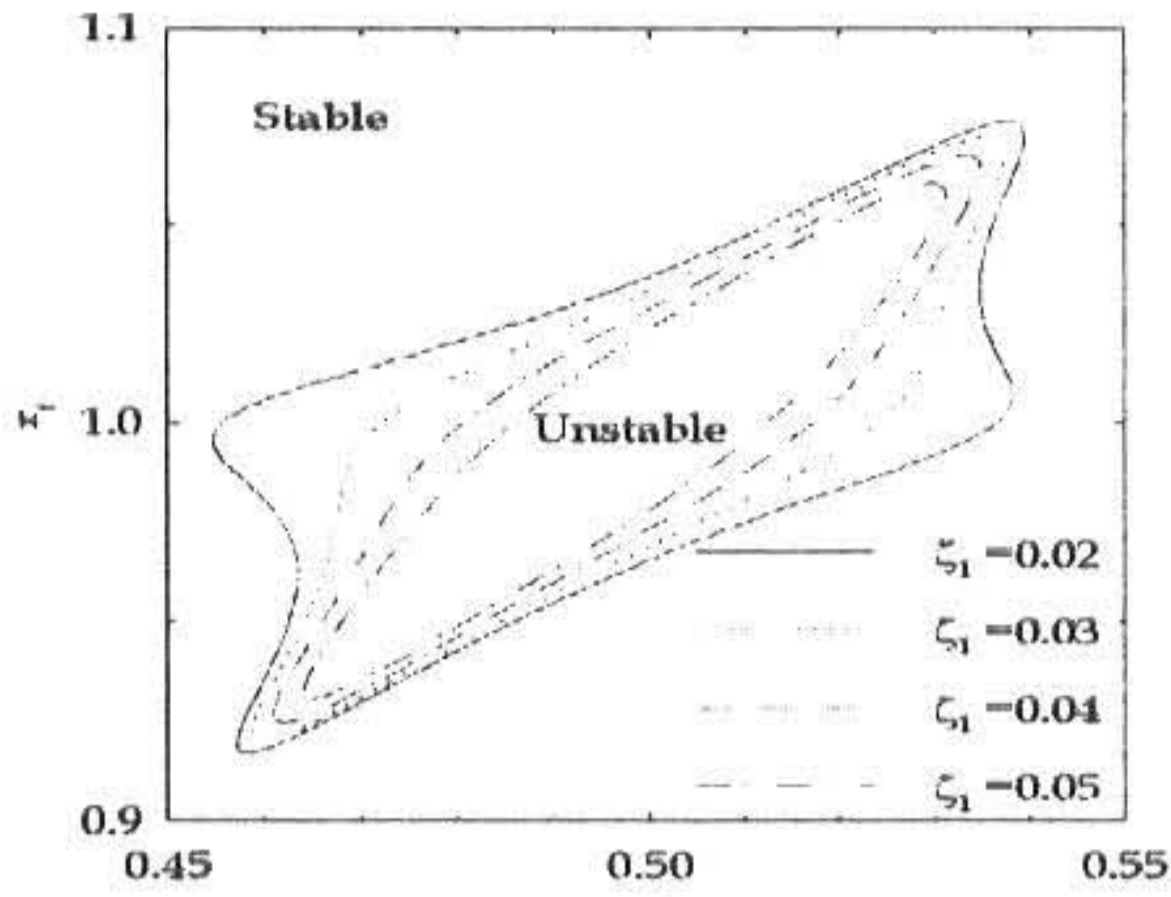


Fig. 3 Stability regions according to ζ_1 in $r-r_f$ plane for $(\zeta_2, c_f, D/c_f r_f^2) = (0.02, 0.001, 0.00001)$.

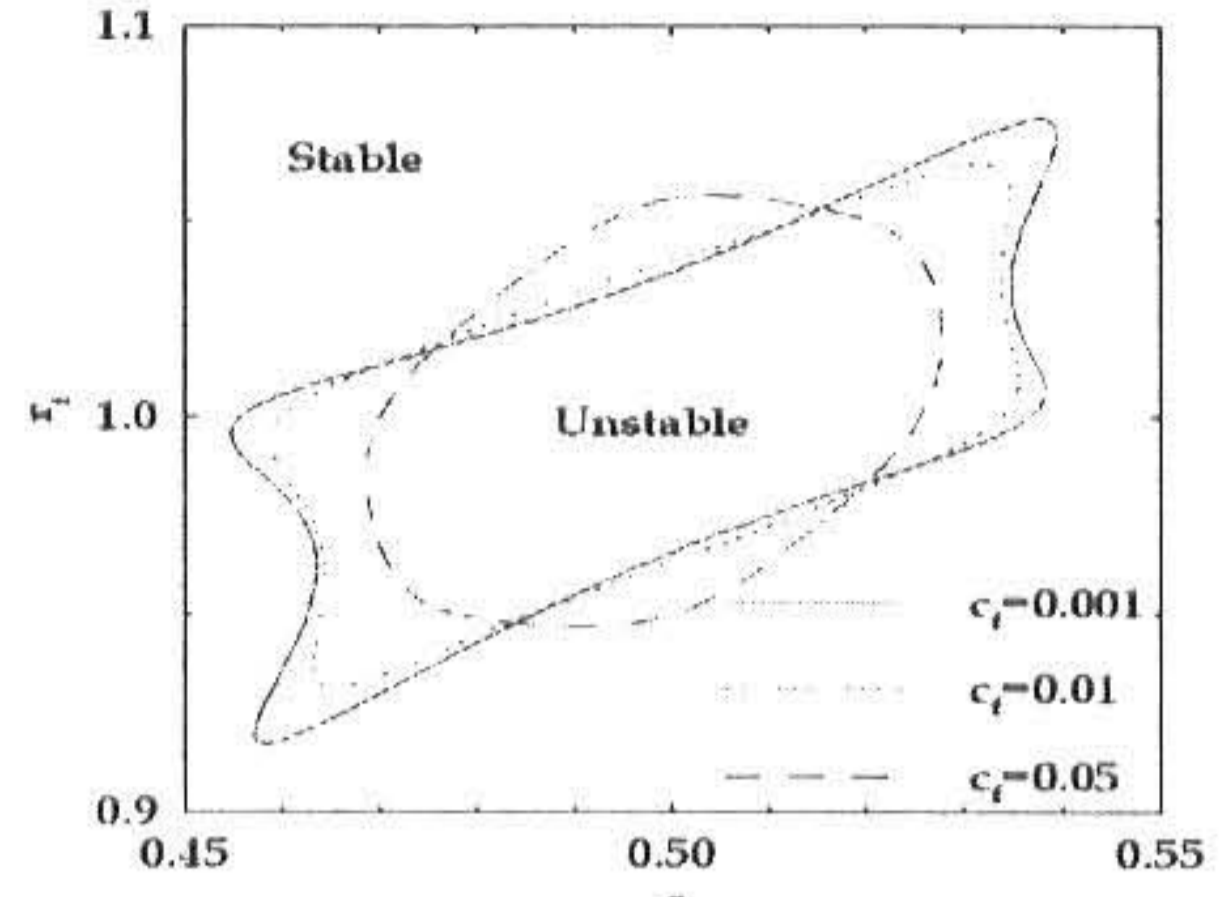


Fig. 4 Stability regions according to c_f in $r-r_f$ plane for $(\zeta_1, \zeta_2, D/c_f r_f^2) = (0.02, 0.02, 0.00001)$.

Fig. 2(c)에서는 점프현상은 존재하지 않으나 Fig. 2(a), 2(b)와 비교해서 특이한 사항은 $r_f = C$ 와 $r_f = C'$ 에서도 Hopf 분기에 의해 이 해가 안정성을 잃는 것으로 확인되었다.

Fig. 2(d)는 내부공진영역을 벗어나는 경우인데 해의 응답은 중심주파수의 전 구간에 대하여 선형계의 응답과 일치한다. 이러한 현상들은 조화가진하에서의 계의 응답⁽⁴⁾과 흡사하다

Fig. 3과 4는 각각 $r-r_f$ 평면에서 감쇠비 ζ_1 과 중심주파수의 폭 c_f 에 따른 스프링만의 운동이 안정성을 잃어버리는 영역을 표시한다.

Fig. 3은 감쇠비 ζ_1 이 증가함에 따라서 스프링만의 운동이 안정성을 잃어버리는 영역은 줄어들고 있음을 보여주고 있다.

Fig. 2(a), 2(b), 2(c)에 보여진 것처럼 r 값이 감소함에 따라서 진자운동의 피크가 좌측으로 이동하는 현상을 이 그림에서 잘 관찰 할 수 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이 중심주파수가 $r_f < 1.0$ 에서 가진되면 진동수비에 따른 제곱평균 응답은 좌측으로 이동함을 알 수 있다.

Fig. 4는 중심주파수 폭이 넓어지면 스프링운동이 안정성을 잃어버리는 영역이 줄어들고 있음을 보여준다.

5. 결 론

본 연구에서는 비선형 2자유도계의 내부공진효과로 인하여 발생하는 불규칙응답특성을 조사하기

위하여 협대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계를 선택하여 해석하였다. 협대역 불규칙가진력의 생성은 선형필터방정식을 이용하였다.

계의 응답의 확률적 특성을 파악하기 위하여 Gaussian closure 방법이 사용되었다. 내부공진 영역에서는 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되는 스프링운동으로부터 직접 가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달됨을 확인하였다.

확정적 탄성진자계에서 존재하는 다중해와 점프현상은 협대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계에서도 발견되었다. 이러한 다중해와 점프현상은 가진되는 중심주파수 r_f 의 유한한 구간에서 발견되었다.

참고문헌

- 1) Haxton, R. S. and Barr, A. D. S. : The autoparametric vibration absorber, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp.119-125, 1972.
- 2) Bux, S. L. and Roberts, J. W. : Non-linear vibratory interactions in systems of coupled beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 104, pp.497-520, 1986.
- 3) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Marshall, L. R. : Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions, Journal of Hydronautics, Vol. 7(4), pp.145-152, 1973.

-) Lee, W. K. and Hsu, C. S. : A global analysis of an harmonically excited spring - pendulum system with internal resonance, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171(3), pp.335-359, 1994.
- i) Lee, W. K. and Park, H. D. : Chaotic dynamics of an harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, pp.221-229, 1997.
- ii) Ibrahim, R. A. : Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 117, pp.222-233, 1995.
- 7) Ibrahim, R. A., Soundararajan, A. and Heo, H. : Stochastic response of nonlinear dynamic systems based on a non-Gaussian closure, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp.965-970, 1985.
- 3) Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W. : Broad band random excitation of a two-degree-of-freedom system with autoparametric coupling, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44(3), pp.335-348, 1976.
- 9) Ibrahim, R. A. and Heo, H. : Autoparametric vibration of coupled beams under random support motion, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 108, pp.421-426, 1986.
- 0) Ibrahim, R. A. : Nonlinear random vibration experimental results, *Applied Mechanics Review*, Vol. 44, pp.423-446, 1991.
- 1) 이원경, 조덕상 : 광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부공진효과, *한국소음진동공학회지*, Vol. 8 (3), pp.399-407, 1998.
- 2) 조덕상, 이원경 : 내부공진을 가진 탄성진자계의 불규칙 진동응답을 위한 두 해석해의 비교, *한국소음진동공학회지*, 제8권, 제4호, pp.715-722, 1998.
- 13) Lee, W. K. and Cho, D. S. : Damping Effect of a Randomly Excited Autoparametric System, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236(1), pp.23-29, 2000.
- 14) Cho, D. S. and Lee, W. K. : Modal Interactions of a Randomly Excited Hinged-Clamped Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237(3), pp.377-393, 2000.
- 15) 조덕상 : 불규칙적으로 가진되는 동흡진기계의 비선형응답현상, *한국산업응용학회지*, Vol. 3 (2), pp.141-147, 2000.
- 16) 조덕상, 이원경 : 불규칙 가진력을 받는 동흡진기의 내부공진효과, *한국소음진동공학회지*, Vol. 10 (6), pp.1041-1047, 2000.
- 17) 조덕상 : 불규칙 지반 가진력을 받는 탄성진자계의 비선형진동응답, *한국정밀공학회지*, Vol. 18 (3), pp.175-181, 2001.
- 18) Ibrahim, R. A. : Parametric random vibration, John Wiley, NewYork, 1985.
- 19) Soong, T. T. and Grigoriu, M. : Random vibration of mechanical and structural systems, Prentice-Hall International, Inc., 1993.

(2000년 10월 2일 접수, 2001년 4월10일 채택)