

## 탄성기계 시스템의 동적 거동 해석을 위한 수치 적분 알고리즘 개선에 관한 연구

# A Study on the Improvement of Numeric Integration Algorithm for the Dynamic Behavior Analysis of Flexible Machine Systems

김외조\*, 김현철\*\*  
Oe-Jo Kim\*, Hyun-chul Kim\*\*

### <Abstract>

In multibody dynamics, differential and algebraic equations which can satisfy both equation of motion and kinematic constraint equation should be solved. To solve this equation, coordinate partitioning method and constraint stabilization method are commonly used. The coordinate partitioning method divides the coordinate into independent and dependent coordinates. The most typical coordinate partitioning method are LU decomposition, QR decomposition, projection method and SVD(singular value decomposition). The objective of this research is to find a efficient coordinate partitioning method in flexible multibody systems and a hybrid decomposition algorithm which employs both LU and projection methods is proposed. The accuracy of the solution algorithm is checked with a slider-crank mechanism.

*Key Word: LU decomposition, QR decomposition, SVD, Gram-Schmidt orthogonalization, Multibody dynamics, Hybrid Coordinate Partitioning Method, Projection Method*

### 1. 서 론

일반적으로 기계시스템은 여러 개의 조인트에서 발생하는 기구학적인 구속이 발생 하게된다. 이러한 구속다물체계를 해석하기 위하여 대표적으로 사용되는 라그랑지 곱수(Lagrange multiplier) 기법은 일반좌표를 선택하고 다른 방법에 비해서 구속력을 구하기 쉬우므로 복잡한

시스템에서는 구속력의 계산이 길어지는 단점에도 불구하고 많이 사용된다.

구속 조건을 갖는 시스템의 해석에서 널리 사용되는 라그랑지 곱수 기법은 2차 미분방정식의 형태의 운동방정식과 대수 방정식이 된다. 이런 방정식은 해석적인 방법으로는 풀 수 없으므로 특수한 해법이 필요하며 이에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. Orlandea<sup>(1)</sup> 및 Cardona<sup>(2)</sup> 의

\* 정회원, 두원공과대학 기계과, 조교수, 工博  
E-mail : ojkim@doowon.ac.kr

\*\*정회원, 두원공과대학 기계과, 부교수, 工博  
E-mail : hckim@doowon.ac.kr

\* Ph.D., Assistant Professor, Mechanical Engineering,  
Doowon Technical Institute

\*\*Ph.D., Associate Professor, Mechanical Engineering,  
Doowon Technical Institute

(본 연구는 두원공과대학 학술연구 과제비의 지원에 의하여 수행되었습니다.)

방법 처럼 특수한 시간적분법을 사용하면 경제적인 계산은 가능하지만 구속식의 오차누적을 방지할 수 없는 단점이 있다. 그러므로 기하학적인 구속조건을 갖는 다물체동역학의 해석은 미분방정식과 구속식의 비선형방정식을 동시에 만족시키는 수치해석기법을 필요로 한다.

Baumgarte<sup>(3)</sup>는 미분방정식의 안정을 위해 피드백제어 게인값을 도입하여 엄밀해의 주위로 해를 안정화시키는 구속조건 안정화 방법(Constraints stabilization method)을 도입하였다.

한편, 또다른 미분-대수 방정식을 푸는 방법으로 독립좌표의 성분만으로 적분과정을 수행하여 뉴우톤 방법(Newton Raphson method)등을 이용하여 해의 보정을 실시하는 방법이 주종인 좌표분할법이 제안되었다. 이 방법은 적분에 필요한 방정식의 수를 줄이면서도 수렴성을 동시에 보장하는 방법이다. 대표적인 좌표분할 방법으로 Wehage 와 Haug<sup>(4)</sup>가 제안한 LU 좌표분할방법이 있다. 이 방법에서는 구속식을 만족시키기 위한 비선형 방정식에서 반복횟수가 증가될 때나 수정자 단계(corrector step)에서 반복횟수가 증가될 때 좌표분할을 다시 실시하게 된다. 따라서 조건이 나빠지면 독립좌표를 다시 찾아야하고, 이 과정동안 실행속도의 증가와 오차의 전파가 수반된다.

Kim과 Vanderploeg<sup>(5)</sup>는 구속조건식의 자코비안 행렬을 Household변환을 이용하여 직교행렬 Q와 R로 분할하여 자코비안행렬의 차수(rank)와 직교 부공간(subspace)을 구하였다. 이 방법은 자코비안 행렬의 접평면 유지를 위해 매 시간마다 좌표분할을 실시하지 않고 기준 영공간에 대해 매 시간마다 자코비안의 곱셈을 통하여 접평면을 개선시켰다.

이러한 여러 기법중에 LU법과 QR법이 효율성이 있는 것으로 알려져 있으며 특이구간이 존재하는 기계시스템에 대하여 이 두방법의 효율성과 정확성을 동시에 만족하는 혼합좌표분할법<sup>(6)</sup>도 소개되었다.

한편, 미분-대수방정식에서 구속력을 발생시키는 자코비안 행렬을 영공간(null space)과 행공간(column space)으로 분할하는 방법을 사용하여 구속력항을 제거하여 순수한 미분방정식 형태로 운동방정식을 유도하는 기법이 사용되고

있다.

Kamman<sup>(7)</sup>등은 영 고유치 이론(zero eigenvalue theorem)을 이용하여 구속력항을 제거하여 유도하였고, Idler<sup>(8,9)</sup>등은 자코비안 행렬의 단순한 행 연산을 통하여 상위삼각행렬(uptriangular matrix)을 만들고 그람-슈미트법으로 영공간을 계산한 뒤 운동방정식의 수를 줄이는 방법을 제안하였다. Blajer<sup>(10,11)</sup>등은 구속조건의 자코비안 행렬에 대한 일반적인 직교보족 행렬(orthogonal complement matrix)을 구해서 구속력 제거를 시도하였으나, 직교보족 행렬을 구하는 자체가 매우 까다로운 면이 있다. S.Vlase<sup>(12)</sup>는 자코비안의 좌표분할을 이용하여 구속력을 제거하는 행렬을 유도하여 적용하였으나 구속력의 계산에 관한 처리가 미흡하다.

또한, 준역행렬(pseudo-inverse matrix)법과 투영행렬(projection matrix)법을 이용하여 구속조건의 자코비안의 행공간 및 영공간을 유도하고, 속도벡터를 일반속도와 독립속도로 분리하여 순수 독립좌표의 항으로 가속도식을 유도하는 방법<sup>(13)</sup>도 사용되고 있다.

본 연구에서는 미분-대수방정식 해법으로 사용되는 좌표분할법인 LU법과 준역행렬(pseudo-inverse matrix)법과 투영행렬(projection matrix)법을 이용한 방법에 대하여 4절기구 예제를 통하여 해석의 결과를 비교분석 하였다. 특히, 특이구간을 갖는 시스템에 대하여 LU분할법과 투영행렬법을 사용하여 각 해석법의 장점인 효율성과 정확성을 동시에 만족하면서 적분을 수행하는 새로운 형태의 혼합좌표분할법을 제안하고자 한다. 연구에 사용된 수치해석 기법은 기본적으로 S.S.kim<sup>(5)</sup>에 의해 개발된 속도 변환법을 이용하고 탄성체 해석에 관계되는 조인트좌표와 모우드좌표로 표현된 운동방정식을 사용하였다.

## 2. 조인트 좌표계를 이용한 운동방정식

본 절에서는 절대좌표계의 운동방정식을 속도 변환기법을 도입하여 조인트좌표계의 운동방정식으로 유도하고자 한다. 이 방법은 폐쇄연쇄계의 경우 기준물체에서 외향경로를 따라 절단 조인트 물체까지 순차적으로 위치, 속도, 가속도 변환을 실시하여 전체 물체에 대한 정보를 구하

는 방법이다.

속도 및 가속도 변환식은 다음 식과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B\dot{q} \\ \ddot{x} &= \dot{B}\dot{q} + B\ddot{q} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $q = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_{nb}^T]^T$ 로 정의되는 일반좌표 벡터(generalized coordinates vector)로서 조인트에서의 상대적인 회전각 및 변위로 정의되고,  $\dot{q}$  및  $\ddot{q}$ 는 각각 속도 및 가속도 벡터를 의미한다.  $B$ 는 조인트 좌표계의 속도를 절대좌표계의 속도로 변환하는 속도변환 행렬이다.

일반적인 절대좌표계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x} + \Phi_x^T \lambda = F \quad (2)$$

위 식에 가속도 변환식을 대입하면 다음 식과 같은 조인트 좌표계의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q} \\ \gamma^* \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $\overline{M}$ 은 일반질량행렬(Generalized mass matrix)이고,  $\overline{Q}$ 는 수정일반력 벡터(modified generalized force vector)이며 각 항의 의미는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{M} &= B^T M B \\ \overline{Q} &= B^T [F - M\dot{B}\dot{q}] \\ \gamma^* &= -\Phi_q \dot{q} + \Phi_t \end{aligned}$$

## 2.1 운동방정식의 해법

### 2.1.1 LU 좌표분할법을 이용하는 경우

구속조건의 자코비안의 행과 열이 서로 독립이면, 자코비안을 LU 분리를 하여 행렬형태로 만들 수 있다.

행렬 L과 U는 종속좌표 u를 R은 독립좌표 v를 나타내며 자코비안은 다음과 같은 형태로 최

종 분할될 수 있다.

$$\Phi_q = [\Phi_u \ \Phi_v]$$

여기서,  $\Phi_u = LU$ 이며  $\Phi_v = LR$ 이다.

N개의 일반좌표 q와 m개의 기구학적 구속 조건에 의해 발생하는 구속식은 다음과 같은 일반식으로 쓸 수 있다.

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (4)$$

독립좌표 v를 알고있으면, 종속좌표 u는 구속식의 비선형방정식 해법인 Newton-Raphson 법등을 도입하여 행렬형식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\Phi_u \ \Phi_v] \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = -\Phi \quad (5)$$

독립좌표는 고정하고, 다음식을 이용해서 종속좌표성분을 구한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_v \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

종속좌표의 성분은 다음식으로 연속 반복계산으로 계산한다.

$$u^{i+1} = u^i + \Delta u$$

여기서, i는 반복횟수를 나타낸다.

## 2.2 투영행렬법을 이용하는 경우

일반적으로 완전 행차수(row rank)를 가지는 자코비안 행렬에 대하여 초기시간  $t_0$ 에서 일반좌표  $q_0$ 의해 구속식이 만족한다면 구속식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi(q_0, t_0) = 0 \quad (7)$$

위식을 시간에 대해 미분하면 다음식과 같다.

$$\Phi_q(q_0, t_0) \dot{q}_0 = b_0 \quad (8)$$

여기서,  $b_0 = -\Phi_t(q_0, t_0)$  이다

위식의 해를 특별해와 일반해의 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{q}_0 = I_R b_0 + P_T \dot{z} \quad (9)$$

여기서  $\dot{z}$  는 구속조건의 접평면 성분과 평행한 자유변수벡터이며,  $I_R$ 은 자코비안의 우측 역행렬 성분,  $P_T$ 는 자코비안의 영공간 성분을 추출하는 투영행렬이다.

위의 식을 이용하여 일반적인 형태의 속도 방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\dot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} b \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$P_{NT} = P_T - I_R (\Phi_q I_R)^{-1} \Phi_q P_T \text{ 이다.}$$

가속도 관계식을 구하기 위해서 위식을 시간에 대하여 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\ddot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{\dot{z}} \end{bmatrix} - I_R \Phi_q \dot{q} \quad (11)$$

$$\ddot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} a \\ \dot{\dot{z}} \end{bmatrix}$$

여기서  $a = -\Phi_q \dot{q} - \Phi_t$  이다.

계 전체의 운동방정식에다 위에서 유도한  $[I_R, P_{NT}]^T$  행렬을 곱하면 구속력을 제거하여 계의 자유도 수와 동일한 순수미분방정식 형태로 다음과 같이 고칠 수 있다.

$$\ddot{z} = M_{11}^{-1} P_T^T (\overline{g} - \overline{M} I_R^T a) \quad (12)$$

$$\lambda = I_R^T (\overline{M} \ddot{q} - \overline{g}) \quad (13)$$

여기서,  $\ddot{z}$ 는 계의 독립가속도 벡터이며  $M_{11} = P_T^T \overline{M} P_T$  이다.

### 3. 혼합좌표분할법의 제안

일반적으로 특이 구간을 가지는 기계시스템을 LU법을 이용하여 해석하는 경우 적분시간 간

격이 매우 줄어들 뿐만 아니라 새로운 독립좌표를 찾기 위해서 좌표분할을 계속 실시하게 되므로 효율성 저하와 수치적인 오차가 증가하여 결국 발산하는 결과를 초래하게 된다. 이에 반하여 투영행렬법은 구속식의 영공간을 매시간 추적하면서 적분을 수행하므로 특이구간에서도 해의 수렴성이 LU법에 비하여 좋은 결과를 보인다.

즉, LU법은 효율성 측면에서 좋으나 정확도의 측면에서는 투영행렬법을 이용한 적분방법이 보다 정확한 결과를 준다는 것이 알려져 있다. 그러나 투영행렬법은 자코비안 역행렬의 연산, 구속력을 제거하여 계의 자유도 수와 동일한 순수미분방정식 형태로 소거 과정 등에서 많은 계산이 수반되므로 효율성 측면에서 LU법에 비해 다소 불리한 방법이다.

본 연구에서는 이와 같은 LU법의 장점인 효율성과 투영행렬법의 정확성을 동시에 취하기 위하여 전체구간 적분은 LU법으로 수행하면서 특이구간에서는 투영행렬법을 사용하여 해의 안전한 수렴성을 보장해주고 특이 구간을 벗어나면 다시 LU법으로 적분을 수행하는 것으로 이루어지는 혼합 좌표분할법 (Hybrid coordinate partitioning method)을 제안하고자 한다.

전체 적분 과정은 다음과 같이 진행된다.

**단계 1 :** 먼저 주어진 초기조건들이 구속식들을 만족하는지 체크한다.

**단계 2 :** 자코비안 행렬을 구하고 LU 분할법을 이용하여 독립좌표 및 독립속도벡터를 계산한다.

**단계 3 :** 식(6)을 이용하여 독립좌표는 고정하고 종속좌표성분을 Newton-Raphson법을 이용하여 반복적으로 계산한다. 수정자 단계일 경우 독립좌표의 선정여부를 체크한다. 그 기준은 적분간격이 이전 단계보다 줄어들거나 혹은 동일 간격으로 5번 이상 지속될 때이다. 만약 독립좌표의 선정이 바뀌면 단계2로 되돌아가서 다시 계산을 수행한다. 또한 이 과정에서 좌표분할법의 선택 여부를 체크하게 된다. 그 기준은 짧은 시간간격 동안 독립좌표의 선택이 지속적으로 자주 바뀌거나, 계 전체의 에너지의 요동이 현저해질 때 또는 적분 간격이 이전 스텝에서보다 현저히 줄어들 때 좌표분할법을 바꾸고 단계8 로 간다.

**단계 4 :** 독립속도벡터에 대해서 종속 속도벡터

를 구한다.

단계 5 : 식 (3)을 이용하여 가속도와 라그랑지 곱수를 구한다.

단계 6 : 가속도 성분중 독립좌표 성분인  $\ddot{v}$  와 독립속도 벡터  $\dot{v}$ 를 적분한다.

단계 7 : 최종 시간이 될 때까지 단계3으로 되돌아간다.

단계 8 : 좌표분할법을 LU법에서 투영행렬법으로 바꾸어서 행렬  $I_R, P_{NT}$  를 계산하고 자코비안의 차수를 계산한다.

단계 9 : 독립좌표인  $z$ 는 고정하고 다음 식으로 위치를 Newton-Raphson 법으로 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ P_{NT}^T \end{bmatrix} \Delta q = \begin{bmatrix} -\Phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q^{i+1} = q^i + \Delta q, i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

단계 10 : 일반좌표의 속도를 계산한다.

단계 11 : 독립가속도인  $\ddot{z}$  를 계산한다. 계산된  $\ddot{z}$ 를 이용하여  $\dot{q}$ 를 구하고, 라그랑지 곱수인  $\lambda$ 를 계산한다.

단계 12 : 수정자 단계이고, 최대허용 적분간격으로 5회 이상 적분이 연속적으로 수행되면, LU 좌표분할을 실시한다. 이때 연속적으로 일정한 독립좌표가 채택되면 다시 단계 2로 되돌아간다.

단계 13 : 구해진  $\dot{q}$ 와  $\ddot{z}$ 를 explicit/implicit Adams PECE 알고리즘을 사용하여 적분한 뒤 최종 시간까지 단계 9로 되돌아가 반복적으로 적분을 수행한다.

#### 4. 수치예제

예제로 사용된 시스템은 4절 기구로서 초기 각도가 10° 기울어진 상태로 시뮬레이션을 수행한다. 그 이유는 각각의 기구가 수평 상태에 도달하면 특이구간이 형성되고 특이구간에서 많은 시뮬레이션이 이루어지는 악 조건이 고려되기 때문이다. 전체 기구의 개략도는 Fig. 6.1과 같다. 이 기구는 초기상태로부터 자유낙하 하여 0.18초가 경과되면 거의 수평이 되는 첫 번째 특이구간에 도달하게 되고, 1.0초 정도 경과하면

두 번째 특이구간에 도달한다.

Fig. 1에서 3번 물체인 커플러를 탄성체라 가정하고 그 유한 요소모델은 모두 10개의 요소와 11개의 절점을 가지는 것으로 가정하였다. 그 개략도는 Fig. 2에 표시하였다.

사용된 재료의 물성치는 Table 1과 같다.

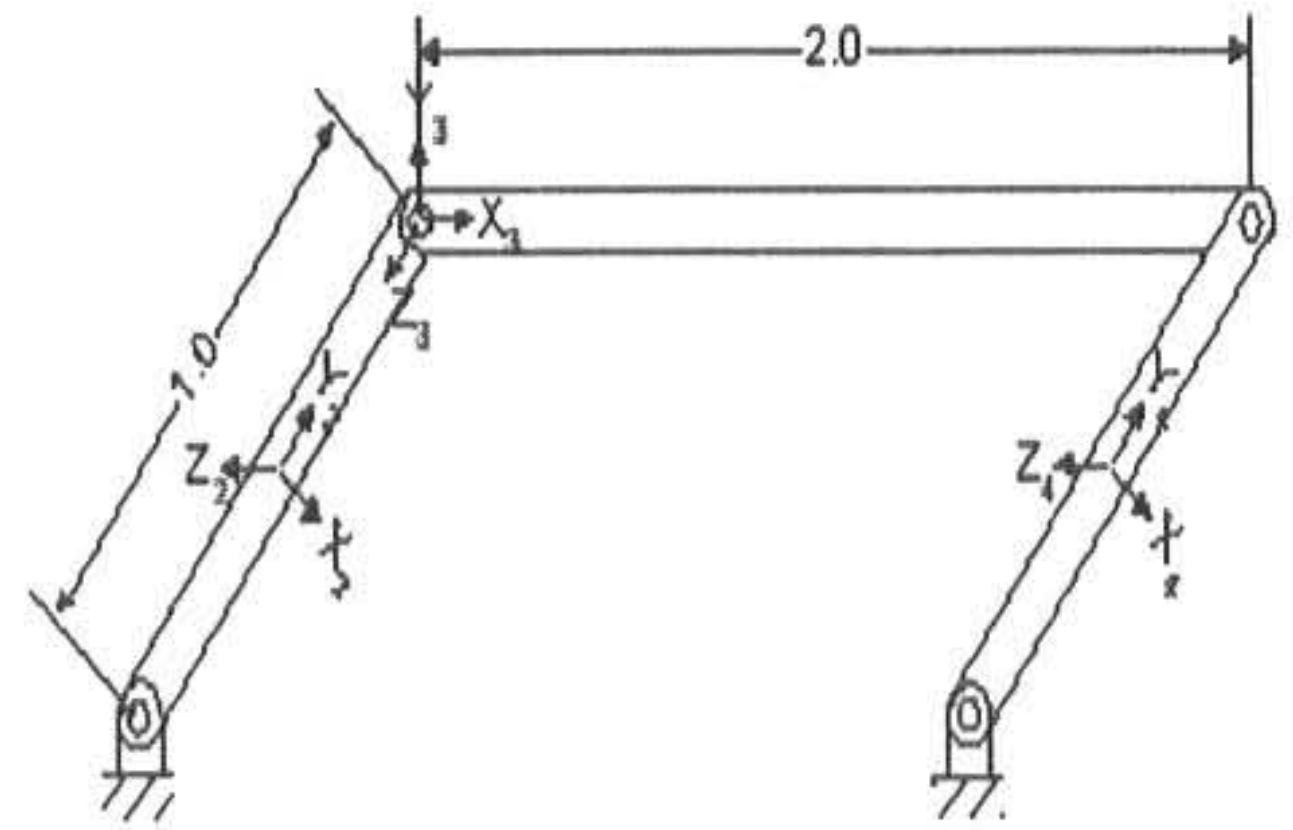


Fig.1 Schematic diagram of 4-bar linkage

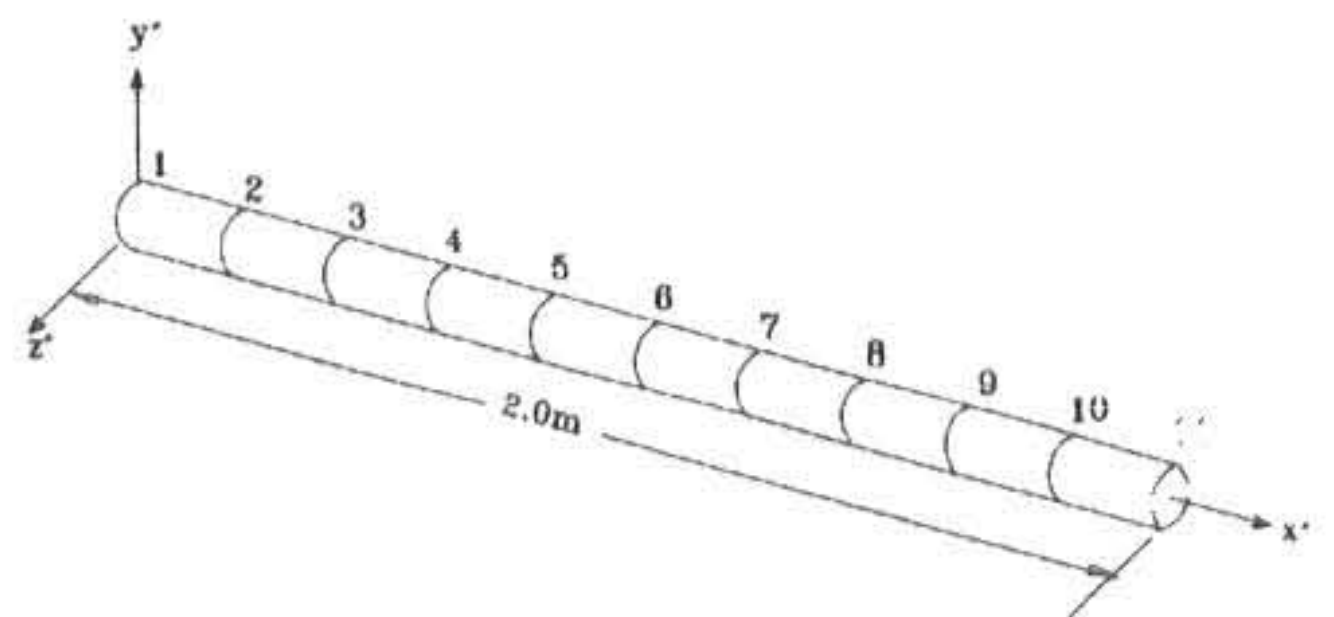


Fig. 2 Finite element model of the coupler

Table 1. Material properties of the coupler

Density ( Kg / m <sup>3</sup> )	Young's Modulus ( Pa )	Poisson's ratio
8.91E+ 03	117.0E + 9	0.35

#### 4.1 강체 4절기구

해석에서 사용된 최대 허용 적분간격은 0.01 초, 해의 만족도는 0.0001로 하였다. Fig. 3는 커플러의 수직방향 가속도를 나타내는 그림이다.

그림에서 보면 두 번째 특이구간에서 LU법은 가속도의 큰 불연속이 생겨 이후거동은 정해와 크게 벗어난 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 그러나, 투영행렬법과 혼합법은 정확히 서로 일치함을 알 수 있다. Fig. 4은 커플러의 수직방향의 변위를 표시한 것인데 두 번째 특이구간에서 위치에너지가 증가하는 쪽으로 오히려 상승되는

결과를 보이고 있지만 혼합법의 경우는 해의 발산이 없이 적분이 원활히 수행되고 있음을 볼 수 있다. Fig.5에서는 계 전체의 에너지를 비교하였다. LU법은 특이구간에서 큰 에너지 증가가 수반되면서 이후의 거동은 믿을 수 없는 현상을 보이고 있다.

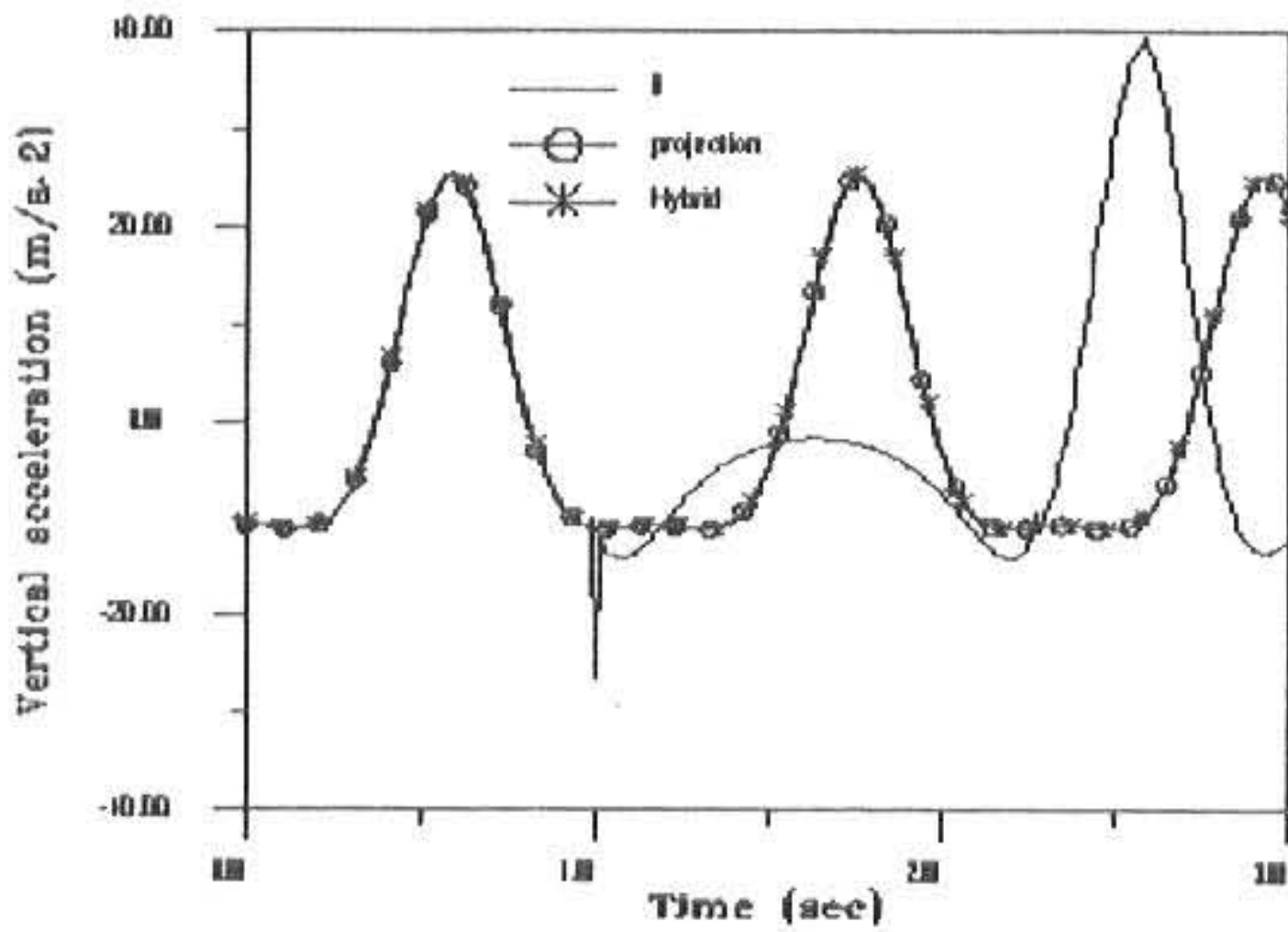


Fig. 3 Vertical acceleration of the coupler

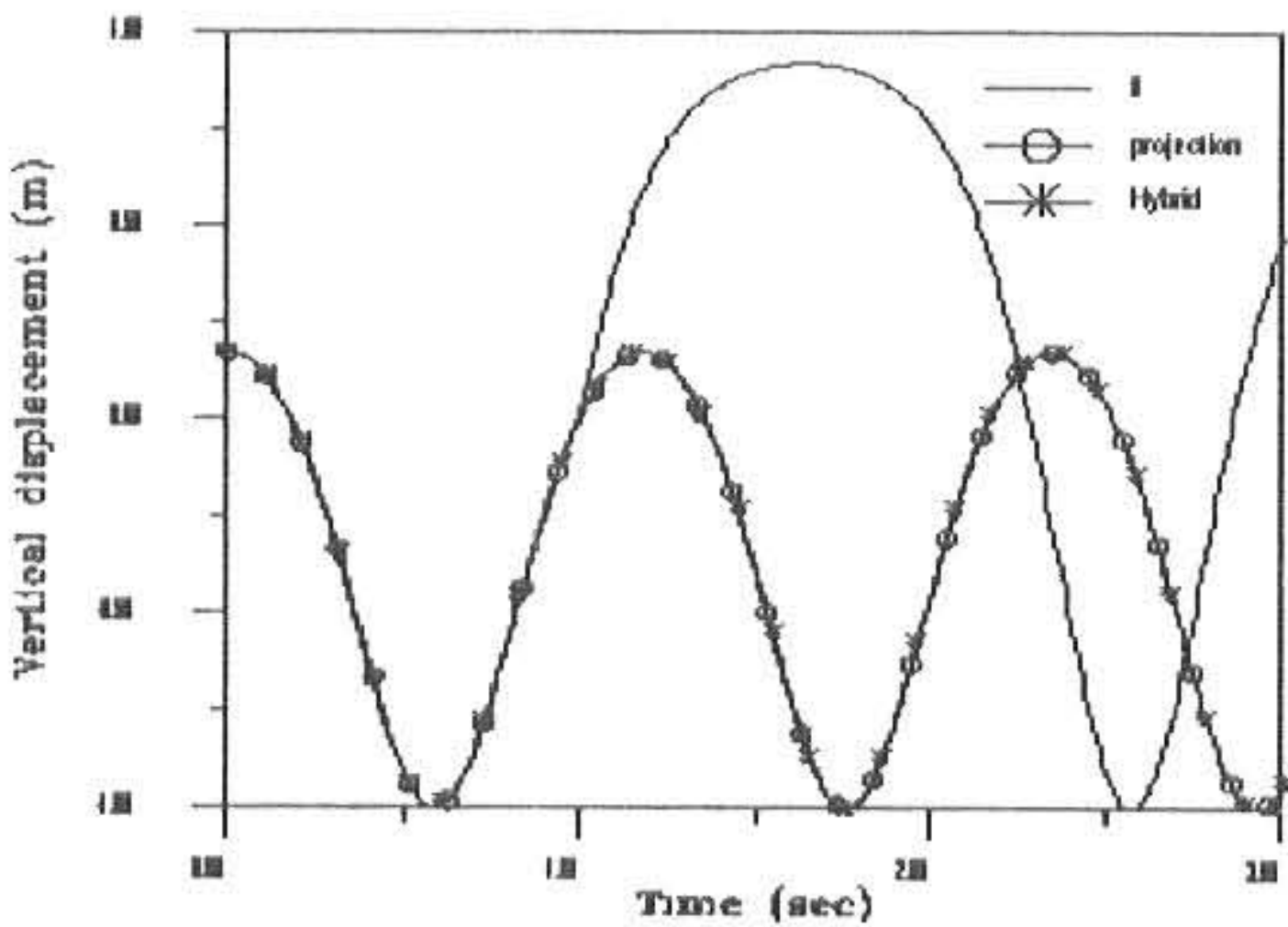


Fig. 4 Vertical position of the coupler

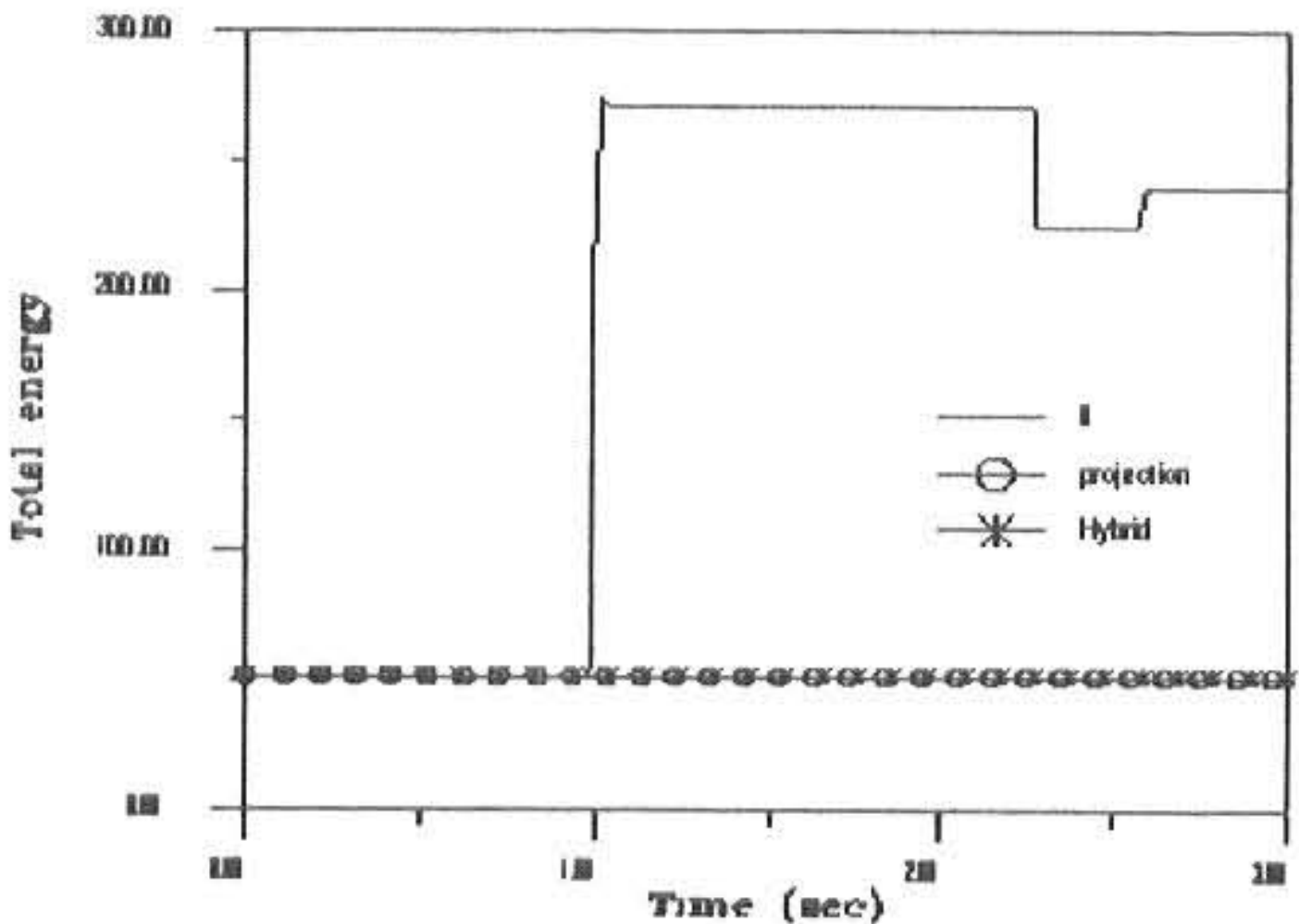


Fig. 5 Total energy of the system

본 예제를 R10000 CPU를 장착한 INDIGO 2 워크스테이션에서 시뮬레이션을 수행하였을 때 각 방법의 CPU 사용시간을 Table 2에 표시하였다.

Table 2. Comparison of CPU times

LU Method	Projection method	Hybrid Method
2.30	15.63	9.65

표에서 알 수 있는 바와 같이 LU법으로 해석하면 해의 정확성만 보장된다면 가장 바람직한 결과를 줄 수 있을 것으로 사료되나, 본 예제와 같은 특이구간이 존재하는 시스템에서는 보다 정확성이 보장되는 투영행렬법을 동시에 사용하게 되면 효율성은 두 방법의 평균값 정도에서 이루어지지만 해의 정확성은 보장되기 때문에 혼합법의 사용이 큰 장점이 있다고 사료된다.

#### 4.2 탄성 4절기구

앞서 사용한 탄성체 예제를 그대로 사용하여 앞의 강체 경우와 마찬가지로 시뮬레이션을 수행하였다. 예제에서 사용된 모드 좌표의 수는 진동모우드 2개, 최대 허용 적분간격은  $5E-4$  이고, 해의 정확도는  $1E-5$ 을 사용하였다. Fig. 6에 첫 번째 모드좌표의 가속도 성분을 나타내었다. 혼합법의 정확성을 나타내기 위해서 매우 오차가 큰 LU법의 경우를 배제하였다. LU법에 대한 자료는 앞선 예제에서 언급되었다. 그림에서 보는바와 같이 두 경우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 7에는 탄성체인 커플러의 수직 방향 가속도를 나타내는 그림이다. LU 법의 경우 특이구간에서 갑자기 큰 국부 탄성변형이 발생하는 이유는 이 구간에서 에너지 보존이 성립되지 않고 큰 에너지 증가가 수반되므로 국부변형량도 급격히 발생된 것으로 판단된다. 그러나 혼합법과 투영행렬법은 정확히 서로 일치하는 것을 확인할 수 있다. 계 전체의 에너지를 비교한 Fig. 8에서도 강체 해석의 경우와 같은 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

Table 3에서는 각 경우의 CPU 사용시간을 나타내고 있다.

Table 3 Comparison of CPU times

LU Method	Projection method	Hybrid Method
50.36	248.89	127.13

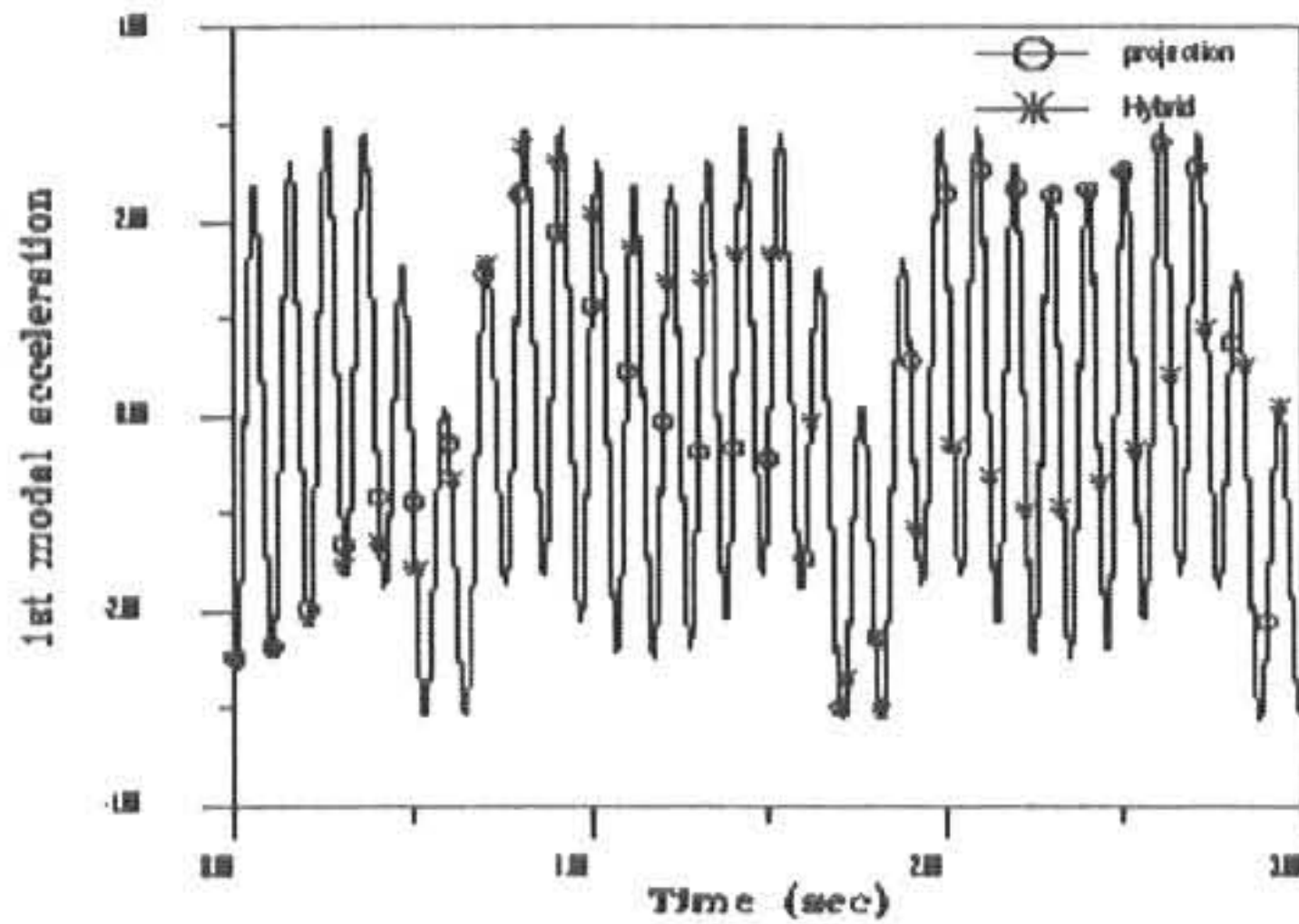


Fig. 6 Acceleration of the first modal coordinate

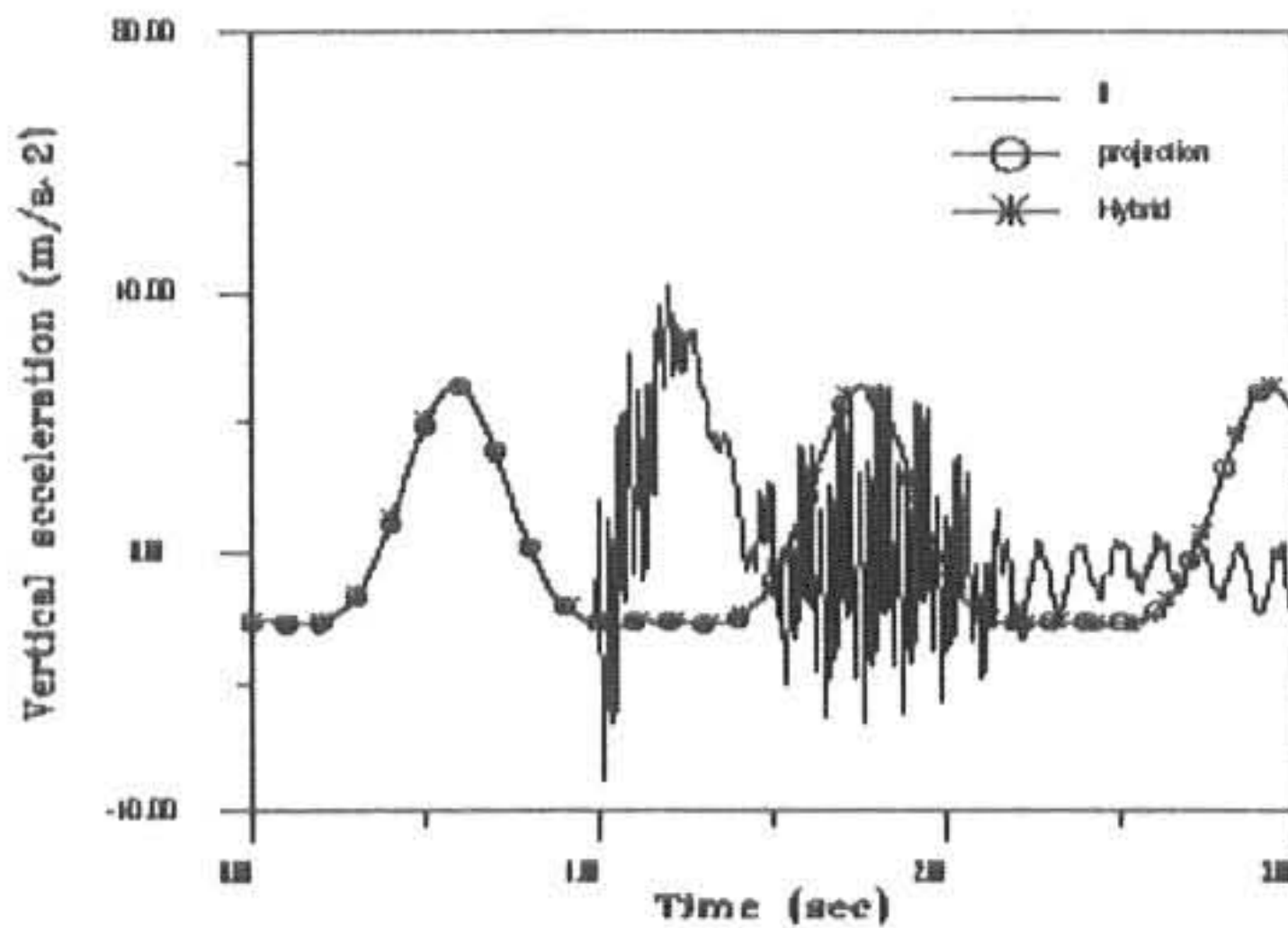


Fig. 7 Vertical acceleration of the coupler

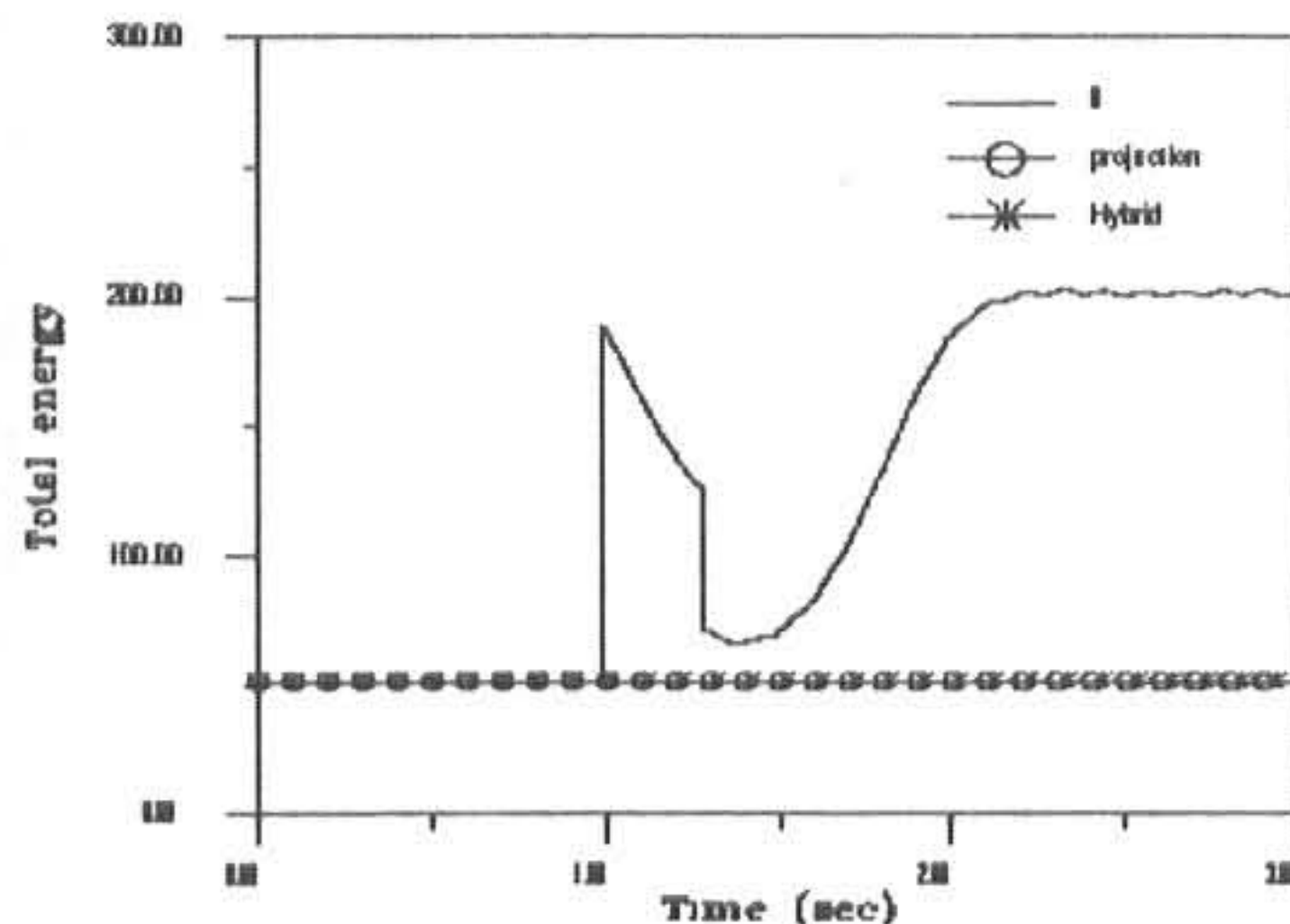


Fig. 8 Total energy of the system

Table 3에서 알 수 있는 것은 탄성체 시스템을 해석할 때는 작은 적분 간격으로 수많은 계산이 반복적으로 수행되므로 투영행렬법의 적용은 효율성 측면에서 많은 어려움을 내포하고 있다. 그러나 혼합법을 도입함으로써 보다 효율성을 높일 수 있고 특히 해의 정확성이 보장되는 큰 장점을 가지게 된다.

### 5. 결론

구속다물체계의 해석을 위하여 특이구간을 가지는 탄성체인 4절 기구의 거동을 LU좌표 분할법과 투영행렬법을 이용하여 각 경우에 있어서 두 방법의 장점을 취하는 혼합좌표법을 제안하고 강체예제와 탄성체의 두 가지 경우에 대하여 적용하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1). 수치해의 허용오차에 따라서는 LU법이 역시 많은 영향을 받았으며, 허용오차가 엄격해지면 오차의 누적으로 인하여 시뮬레이션 자체가 이루어지지 않았다. 이에 반하여 투영행렬법은 허용오차가 엄격해지더라도 큰 영향을 받지 않고 비교적 강인한 알고리즘으로 확인되었다.
- 2). LU 법이 가지는 효율성과 투영행렬법이 가지는 정확성의 장점을 동시에 포함하는 혼합좌표 분할법을 제안하였으며, 전체적으로 정확성과 효율성을 가지는 수치 알고리즘을 개발하여 프로그램화 하였다.
- 3). 제안된 혼합법을 시뮬레이션에서 적용하여 특이구간을 가지는 시스템을 빠르고 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다.

### 참고문헌

- 1) Orlandea, N., Chace, M.A., and Calahan, D.A. : A Sparsity-Oriented approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems, Part I & II, Trans. ASME, J. Engineering for Industry, pp.773-784, (1977)
- 2) Cardona, A., Geradin, M. : Time Integration of Equations of Motion in Mechanism Analysis, Comput. Struct., Vol. 33, pp.801-820, (1989)
- 3) Baumgrate, J. : Stabilization of constraints and Integrals of motion in Dynamical Systems,

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp.1-16, (1972)

4) Wahage, R.A. and Haug, E.J. : Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems, ASME, J.Mech. Des., Vol.104, pp.247-255, (1982)

5) Kim, S.S. and Vanderploeg, M.J. : QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems, J of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.108, pp.183-188, (1986)

6) 김외조, 유완석 : 탄성기계 시스템에서의 효율적인 좌표분할법 선정에 관한 연구, 대한기계학회 논문집(A), 제21권, 8호, pp.1311-1321, (1997)

7) Kamman, J.W., Huston, R.L. : Dynamics of constrained Multibody Systems, J. of Applied Mechanics, Vol.51, pp.899-903, (1984)

8) Ider, S.K., Amirouche, F.M.L : Coordinate Reduction in the Dynamics of Constrained Multibody Systems - A New Approach, J. of Applied Mechanics, Vol.55, pp.899-904, (1988)

9) Ider, S.K., Amirouche, F.M.L, Jia, T. : A Recursive Householder Transformation for Complex Dynamical Systems With Constraints, J. of Applied Mechanics, Vol.55, pp.729-734, (1988)

10) Blajier, W., Bestle, D. and Schiehlen W. : An Orthogonal Complement Matrix Formulation for constrained multibody systems, ASME J.Mech. Des., Vol.116, pp.423-428, (1994)

11) Blajier, W. : A Projection Method Approach to Constrained Dynamic Analysis, ASME J.Applied Mechanics, Vol.59, pp.643-649, (1992)

12) Vlase, S. : A Method of Eliminating Lagrangian Multipliers from the Equation of Interconnected Mechanical Systems, ASME J. Applied Mechanics, Vol.54, pp.235-237, (1987)

13) 김외조, 유완석 : 준역행렬과 투영행렬을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석, 대한기계학회 논문집(A), 제22권, 1호, pp.170-176, (1998)