

■■■■■■■■■■
 技術資料
 ■■■■■■■■■■

주조 및 반용융 단조에서의 응고해석

임용택

Solidification Analysis of Casting and Semi-Solid Forging

Yong-Taek Im

1 서 론

세계화에 따라 제품의 개발 주기와 수명이 짧아지는 대신 종류가 다양해짐에 따라 개발비를 줄이기 위해 전산모사해석이 더욱 광범위하게 다방면으로 사용되고 있다. 본 고에서는 주조 및 반용융단조 공정 설계 시에 수반되는 응고과정을 해석하는 몇 가지 유한요소해석 예를 살펴보고 이 분야의 기술 동향을 간단히 파악하고자 한다.

주조는 금속을 완전히 액체로 용융시킨 상태에서 원하는 형상으로 응고시키는 방식이기 때문에 대단히 복잡한 형상의 부품도 쉽게 제조할 수 있다는 장점을 갖고 있으며 인간이 금속을 발견한 이후로 사용된 가장 오래된 제조방법 중의 하나로 자리잡고 있다. 이와 같은 주조공정을 설계함에 있어서 과거에는 주로 현장 기술자들의 경험에 의존하였으나 최근 들어서는 고성능 컴퓨터의 급속한 보급과 수치해석 기술의 눈부신 발달로 인하여 복잡한 물리 현상중의 하나인 응고해석이 가능하게 되었고 따라서 보다 정량적이고 체계적인 방법으로 주조공정의 설계가 가능하게 되었다. 각종 주조에서 응고과정을 정량적으로 해석하는 것은 주조품의 품질, 주조 결함, 주형설계 및 생산성 등의 예측과 제어를 위해서 중요하며 응고해석의 목적을 보다 구체적으로 나열해 보면 다음과 같다.

- (1) 생산성을 알기 위한 응고시간의 산출
- (2) 각종 주조결함 예측
- (3) 응고조직 및 강도의 예측
- (4) 주물 및 주형의 열응력 예측과 금형수명의 추정

(5) 주형설계를 위한 주형 표면 및 내부의 온도분포 예측

(6) 공정조건의 제어

이상과 같은 목적 달성을 위해 응고해석에 사용되는 일반적인 수치해석 기법으로는 유한차분법, 유한요소법, 경계요소법 등이 있으며 근래에 들어서는 주로 유한요소법으로 문제를 풀이한 예가 주를 이루고 있다. 본 고에서는 주조공정에 있어서 응고해석과 관련된 이론 및 해석 사례들을 간략히 소개함과 더불어 응고현상과 밀접한 관련이 있는 반용융 단조 공정의 비등온 해석에 관해서도 소개하고자 한다.

2. 응고해석 관련 기초이론

2.1 지배방정식

응고해석과 관련된 가장 주된 물리적 현상과 이의 지배방정식으로는 주형과 주물 내의 온도분포를 결정 짓는 열에너지 보존 법칙, 그리고 주물의 응고 시 자연대류에 의한 유동에 관련된 운동량 보존 법칙 및 질량 보존 법칙이 있으며, 이들은 일반적인 문헌[1-3]상에서 흔히 볼 수 있고 또한 상세히 설명 되어 있으므로 구체적인 내용에 관한 언급은 생략하기로 한다.

2.2 잠열항의 처리

상변화를 수반하는 문제에서 열에너지 방정식은 식 (1)과 같이 잠열항을 포함하게 되는데 잠열항 처리에 가장 흔히 쓰이는 수치적 기법으로는 온도회복법, 등

한국과학기술원 기계공학과(Department of Mechanical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology)
 †E-mail : ytim@mail.kaist.ac.kr

가비열법, 그리고 엔탈피법 등이 있다.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho_s L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad \text{in } V,$$

$$T = T^* \quad \text{on } S_T \quad (1)$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{on } S_q.$$

여기서, ρ 는 밀도, C_p 는 정압비열, T 는 온도, t 는 시간, k 는 열전도도, L 은 응고잠열, f_s 는 고상률이다. 또한, S_T 는 온도가 규정된 면이며 S_q 는 열유속이 정의된 면, 그리고 n 은 그 면의 바깥 방향 면벡터이다.

2.1.1 온도회복법 (temperature recovery method)

이 방법은 우선 열에너지 보존 법칙에서 잠열 항은 무시하고 단순히 열전도 문제로만 해석하여 가상의 온도 T 을 구한 다음 아직 응고중이라면 아래의 식으로 표현되는 응고 잠열 Q 만큼 그 요소의 온도를 회복시켜 주어 실제의 온도 T 를 구하는 방법으로써 Im[4]에 의해서 제안되었다.

$$Q = \int_{T_L}^T \rho C_p V^e dT = \int_{T_L}^T \left[\rho C_p + \frac{\rho L}{T_L - T_s} \right] V^e dT \quad (2)$$

여기서, T_L 은 액상선의 온도 (liquidus temperature), V^e 는 요소의 체적이다.

Im 이용하여 1 차원 (Fig. 1 및 Fig. 2참조) 및 이차원 상변화 문제 (Fig. 3~5 참조)를 유한요소해석 한 뒤 해석적으로 구한 해와 비교함으로써 온도회복법의 신뢰성 및 타당성을 검증하였다.

또한, Tszeng 등과 Chen 등[5,6]은 온도회복법을 2차원과 3차원 문제로 확장하여 적용하였고 Hong 등[7]은 정방형 잉곳의 응고과정을 경계요소법으로 풀이하는 과정에 있어서 온도회복법을 채용함으로써 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다고 보고하였다. 이 외에도 이 등[8]은 유한차분법을 이용한 응고해석 시간 단축을 위한 연구에 이 방법을 적용한 바 있다.

2.2.2 등가비열법 (equivalent specific heat method)

응고 구간에서 발생하는 잠열을 식 (3)과 같이 등가비열로 환산하여 에너지 방정식을 풀이하는 방법의 하나로 이해하고 계산하기에 편리한 방법이지만 시간증분이 너무 클 경우 한번에 응고온도 범위를 벗어날 수 있기 때문에 잠열에 대한 고려가 무시될 수 있다는 단점이 있다.

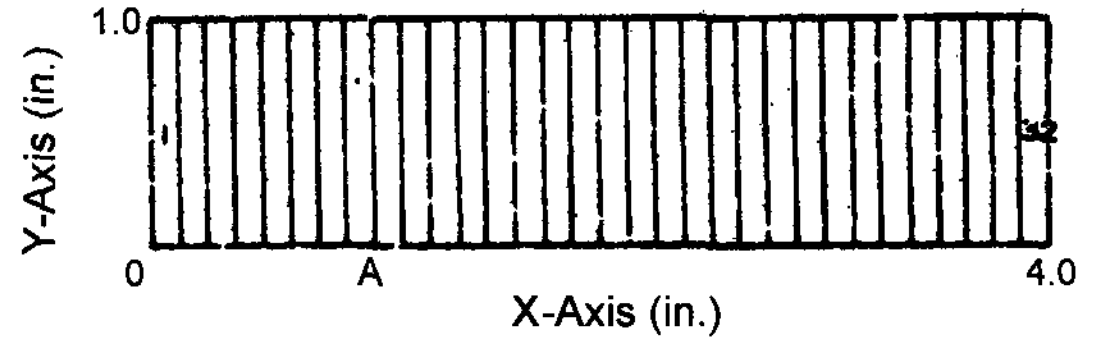


Fig. 1. Mesh system for FEM analysis of one-dimensional solidification [4].

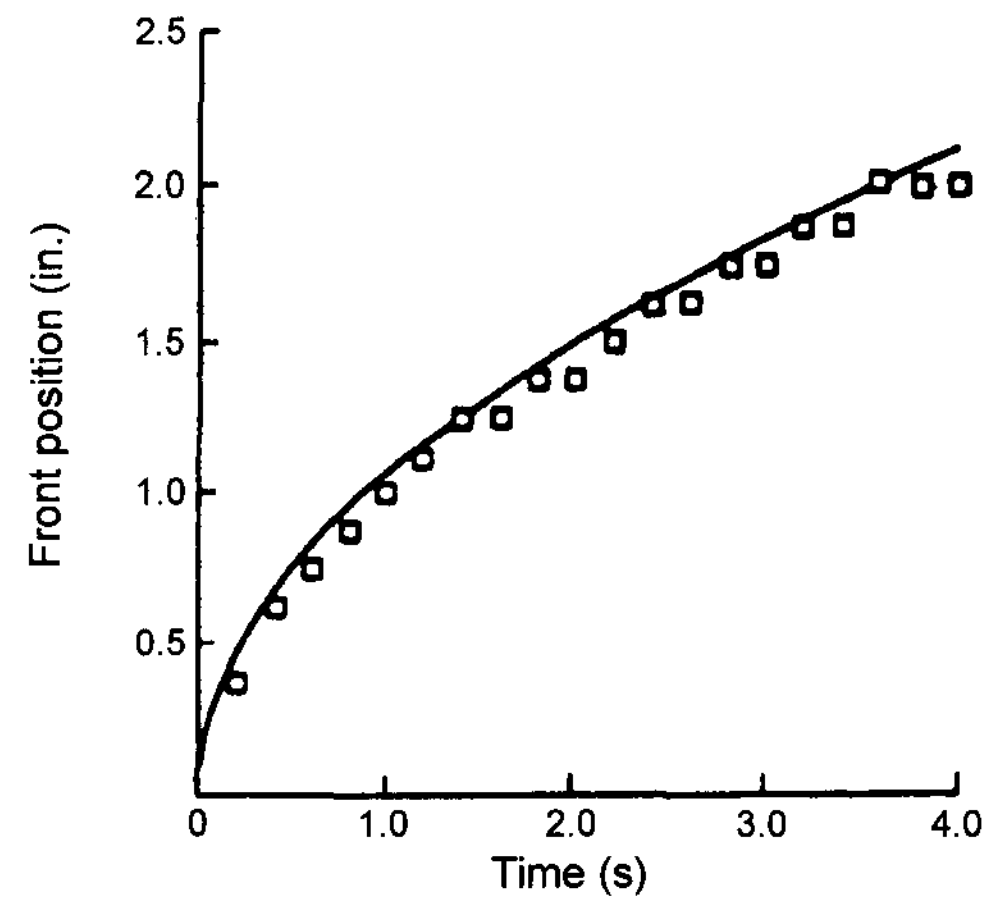
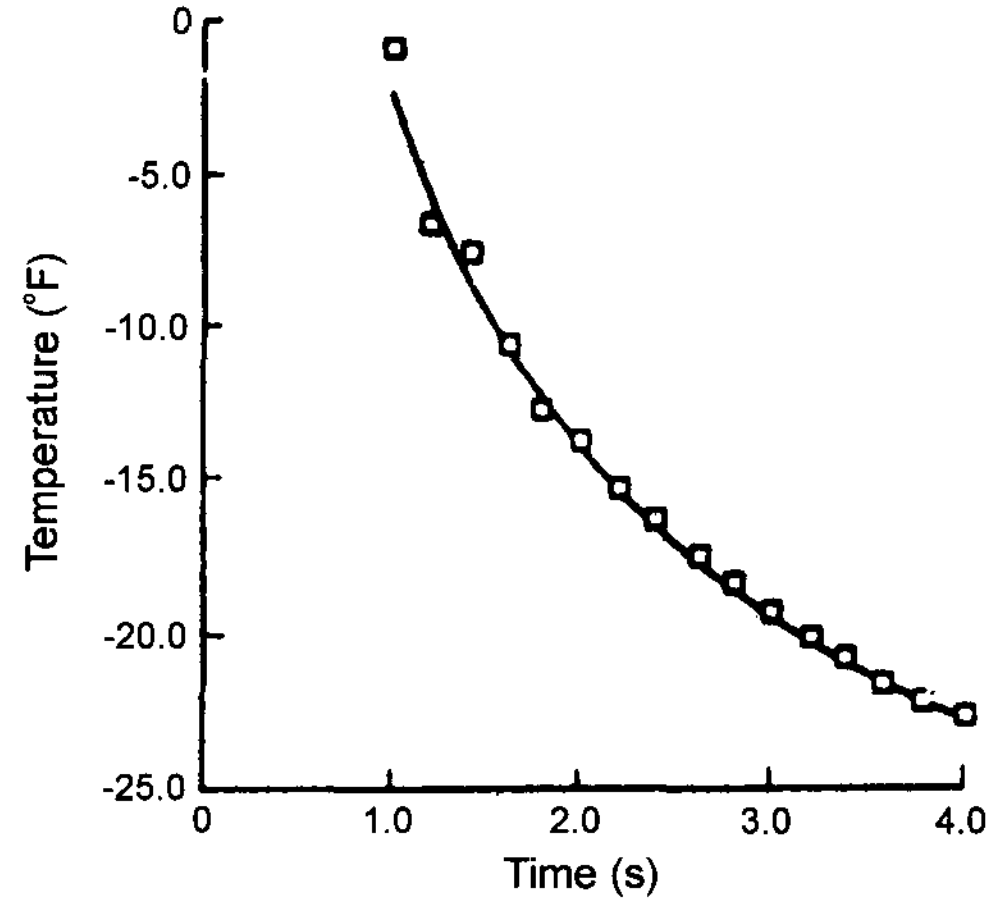


Fig. 2. Temperature history and position of phase front, $t = 0.1$ s [4].

$$\rho \left(C_p - L \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3)$$

김 등[9]은 이와 같은 등가비열법을 잠열항 처리기법으로 선택한 후, 4가지 형태로 가정된 고상률과 온도의 관계 -1차 및 2차 함수 그리고 지렛대 법칙 및 Scheil 식-을 이용하여 응용문제를 해석함으로써 좁은 고액공존 영역을 갖는 물질의 경우는 가정된 형태에 크게 영

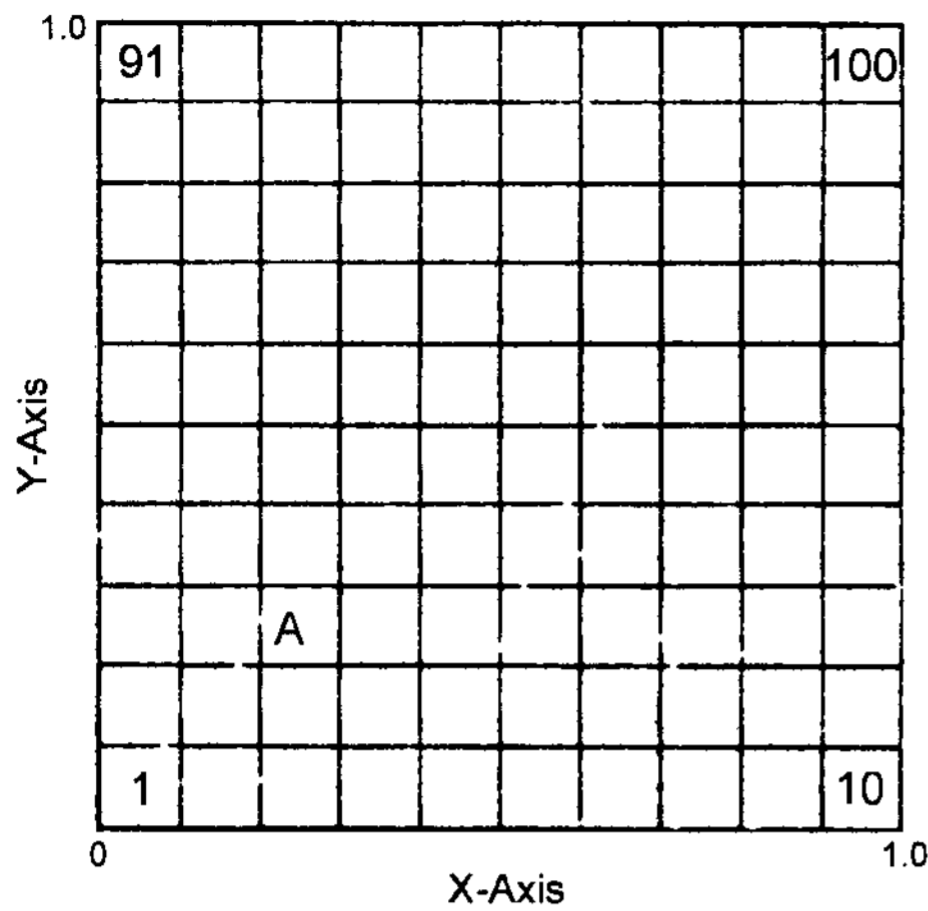


Fig. 3. Mesh system for FEM analysis of solidification in a corner [4].

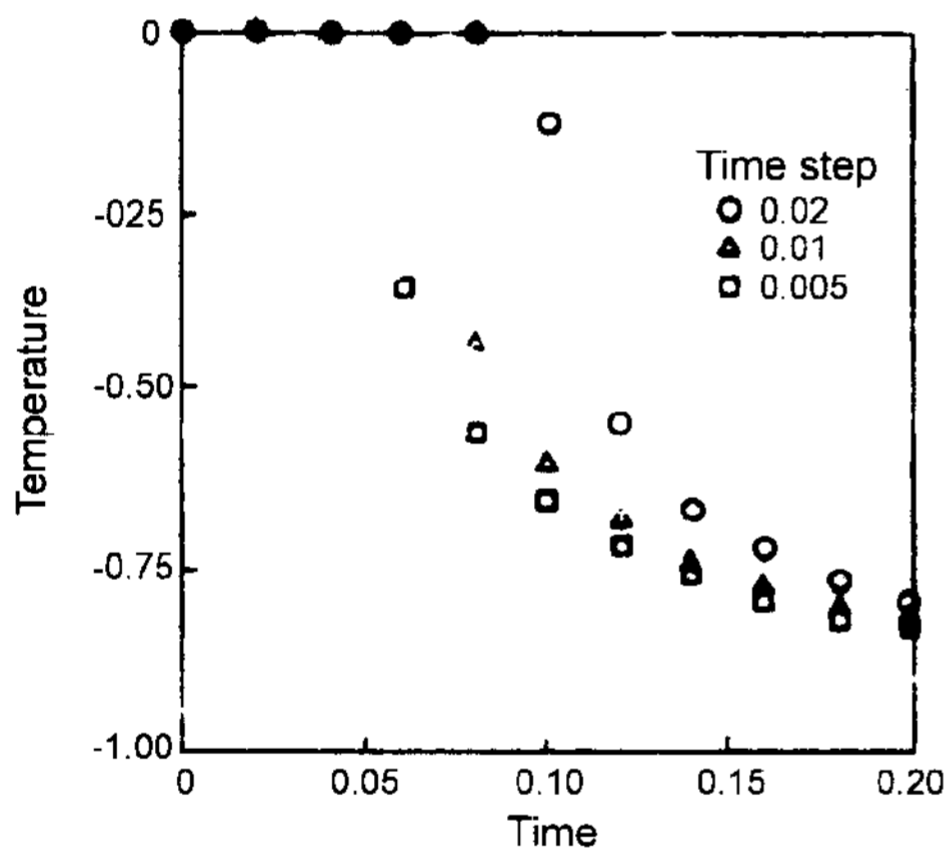


Fig. 4. Temperature history predicted by using different time step [4].

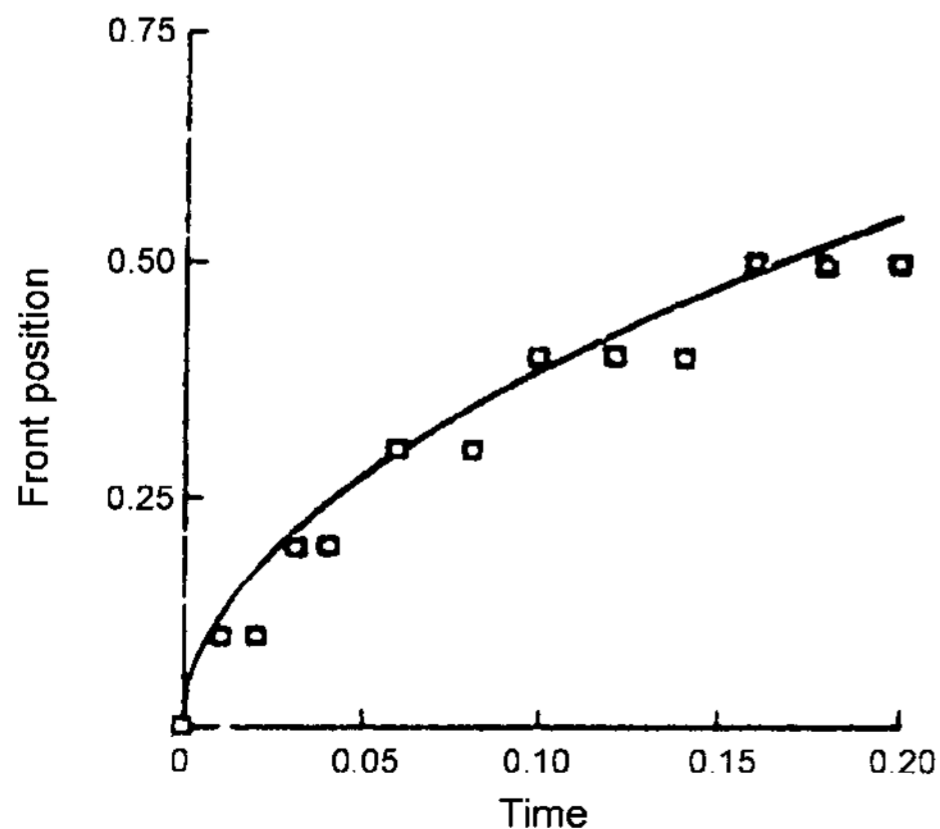


Fig. 5. Position of phase front along the diagonal for $t = 0.005$ s [4].

향을 받지 않았으나 넓은 고액공존 영역을 갖는 물질의 경우는 상당히 많은 차이를 나타냄을 보였다.

2.2.3 엔탈피법 (enthalpy method)

응고구간에서 식 (4)처럼 비열을 온도에 관하여 적분한 엔탈피를 이용하는 방법으로 응고구간에서 비열의 급격한 변화가 있는 상변화 문제의 수치적 취급을 용이하게 알 수 있는 장점이 있다.

$$H = H_0 + \int_{T_0}^T C_p dT + (1-f_s)L. \quad (4)$$

여기서 H 는 전체 엔탈피, H_0 는 기준 온도 T_0 에서의 엔탈피이다. 또한 위 식은 전체 엔탈피는 기준 온도에서의 엔탈피, 현열에 의한 엔탈피, 그리고 잠열에 의한 엔탈피의 합으로 구성됨을 의미한다.

이 방법은 온도회복법과 함께 상변화 문제에 가장 흔히 이용되는 잠열처리 기법으로서 Rolph 등[10]은 이 방법을 적용한 유한요소해석을 수행함으로써 비교적 큰 요소망과 10^{-1} 정도의 상대적으로 큰 시간증분에 대해서 유용한 결과를 얻은 바 있다. 또한 Voller 등[11]은 엔탈피법과 함께 유한차분법으로 응고해석을 수행하였으며 Hibbert 등[12]은 유한체적법으로 해석을 수행한 바 있다.

3. 수축공 결함의 예측

수축공 결함은 주조품의 강도저하를 유발하여 기계적 성질을 저하시키기 때문에 결함 발생 위치, 그 정도 등에 대한 예측과 이에 대한 대비책을 세움으로써 반드시 방지되어야 한다. 수치해석에 의한 수축공 예측 기법들은 Table 1[3]에 나타낸 바와 같다.

Niyama 등[13]은 3차원 응고문제의 2차원화를 위해서 수정된 열용량 (heat content)을 제안한 후 온도구배법을 이용하여 3차원 형상의 주물 응고과정에서 수축공 발생 부위를 예측한 바 있다. 특히 이들은 지속적인 연구와 실험을 통해서 새로운 수축공 발생 조건인 G/\sqrt{R} (G : 온도구배, R : 냉각속도)을 제안하였다[14]. 이외에도 Chen 등[15]은 G/\sqrt{R} 판별 조건을 이용하여 철의 사형주조와 피스톤 크라운 (piston crown)의 사형주조 공정에 대한 수축공 발생을 예측하였으며, 유 등[16]은 3차원 응고해석을 수행함에 있어서 수축결함 발생부위의 예측에는 응고시간법과 온도구배법을, 발생량 예측은 "shrinkage potential"이라는 보조 변수를 적용

Table 1. Prediction of shrinkage by numerical analysis. [3]

번호	방법	수축공 발생 조건	특징
1	등온도/등고상률 곡선법 (a) 고상선온도법 (b) 한계고상률법	$f_s=1$ 의 페루프 내에서 발생 $f_s=f_{sc}$ 의 페루프 내에서 발생	· 간편 · 페루프가 존재하지 않는 경우 판정 곤란
2	온도구배법	$f_s=1$ 또는 $f_s=f_{sc}$ 에 있어서의 최대 온도구배 $G \leq$ 임계치	· 간편 · 임계온도구배가 형상, 냉각속도 등에 따라 달라짐
3	유동 conductance 법	$K_d = \frac{\bar{K}}{\mu f_L \Delta l} \leq$ 임계치	· 합금조성의 평가가능 · 투과율K의 데이터 필요
4	고상률 구배법	$f_s=1$ 또는 $f_s \leq f_{sc}$ 에 있어서 최대 고상률 \leq 임계치	· 공정합금에 적합 · 고상률과 온도의 관계가 1:1일때는 온도구배법과 동일
5	$G\sqrt{t_f}, G/\sqrt{R}$ 법	$G\sqrt{t_f} \leq$ 임계치 또는 $G/\sqrt{R} \leq$ 임계치	· 온도구배법보다는 임계치가 냉각속도에 따라 변하지 않는다
6	압력구배법	$G_p \equiv \frac{u\mu f_L}{K} \geq$ 임계치	· 합금조성 평가가능 · 연속의 식을 풀어야 할 필요가 있음
7	급탕거리법	급탕가능거리 \leq 급탕필요거리	· 복잡한 형상에 대한 적용 곤란
8	한계고상률법/수축량법	자유표면 및 유동가능 상부요소	· 압탕부 등의 수축공의 정량적 평가가능
9	직접 수치모사법	계산된 압력 \leq 기포발생 임계압력 및 자유표면의 저하	· 압탕 head, 압탕의 간격 등도 평가가능 · 계산 메모리 및 시간이 큼

f_s : 고상률, f_L : 액상률, f_{sc} : 유동한계 고상률, t_f : 요소의 응고시간, u : 응고수축 유속, G : 온도구배, G_p : 압력구배, K : 절점간 평균 투과율, R : 냉각속도, μ : 점도, Δl : 절점간 거리.

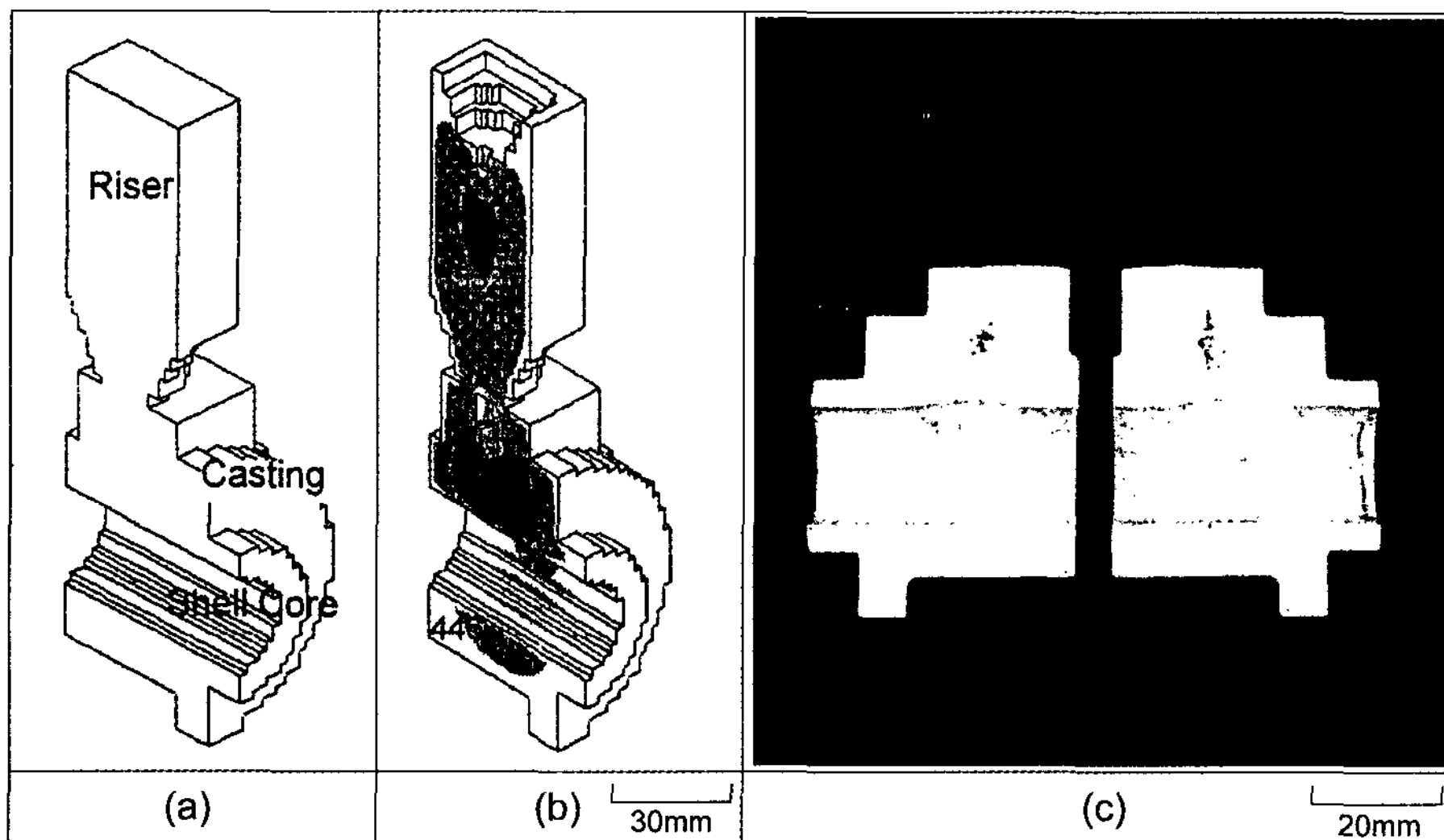


Fig. 6. Prediction of shrinkage cavity of Al-7wt%Si alloy casting solidified in a sand mold: (a) schematic diagram, (b) simulation result and (c) experimental result.

한 바 있다.

한편, Fig. 6은 김 등[17]에 의해서 수행된 연구 내용 중의 일부인 데 고압차단기용 conductor의 수축공

결함 예측 및 실험결과와의 비교를 나타내는 그림으로서 해석을 통해서 예측한 수축결함 발생 부위와 실험에서 나타난 결과가 양호하게 일치하고 있음을 알 수

있다. 이들은 동일한 제품에 중자를 shell core 대신 metal core를 사용하고 상부 압탕을 크게 하여 수축결함이 발생하던 부위를 압탕쪽으로 이동시켜 전전한 주물을 얻을 수 있었다고 보고하였다.

4. 자연대류 효과를 고려한 응고해석

액체의 온도가 떨어지게 되면 밀도의 증가를 초래하게 되고 이로 인하여 주물 내부에는 자연대류에 의한 유동이 발생하게 된다. 따라서 주물내부의 온도분포와 각종 결함의 정확한 예측을 위해서는 자연대류 효과를 고려하여야만 한다. 그 이유는 Fig. 7[18]을 통해서 알 수 있는데, 자연대류 효과를 고려했을 경우와 그렇지 못한 경우의 온도분포는 상당히 다름을 알 수 있고 최대 온도의 위치 또한 큰 차이를 나타냄을 알 수 있다. 따라서 자연대류의 효과를 고려해 줌으로써 주조품의 기계적 성질이나 수축결함 발생 부위를 보다 정확히 예측할 수 있을 것이다.

자연대류를 고려한 응고해석의 예로 Ramachandran 등[19]은 사각형상에 대해서 Rayleigh 수, Prandtl 수, Stefan 수, 종횡비 (aspect ratio) 등을 변화시키면서 유한차분법으로 해석을 수행한 바 있다. 또한, Bennon 등[20,21]은 혼합이론 및 준경험 법칙에 근거하여 자연대류를 고려한 응고해석과 관련한 일련의 연속체 모델을 유도한 후, 사각형상에 대해서 해석을 수행하였으며 Chen 등[22,23]도 자연대류를 고려한 2차원 상변화 문제를 유한요소해석한 후 자연대류를 고려하지 않았을 경우와 비교하였고, Rayleigh 수가 자연대류가 일어나는 크기와 응고선단의 위치에 결정적인 영향을 미침

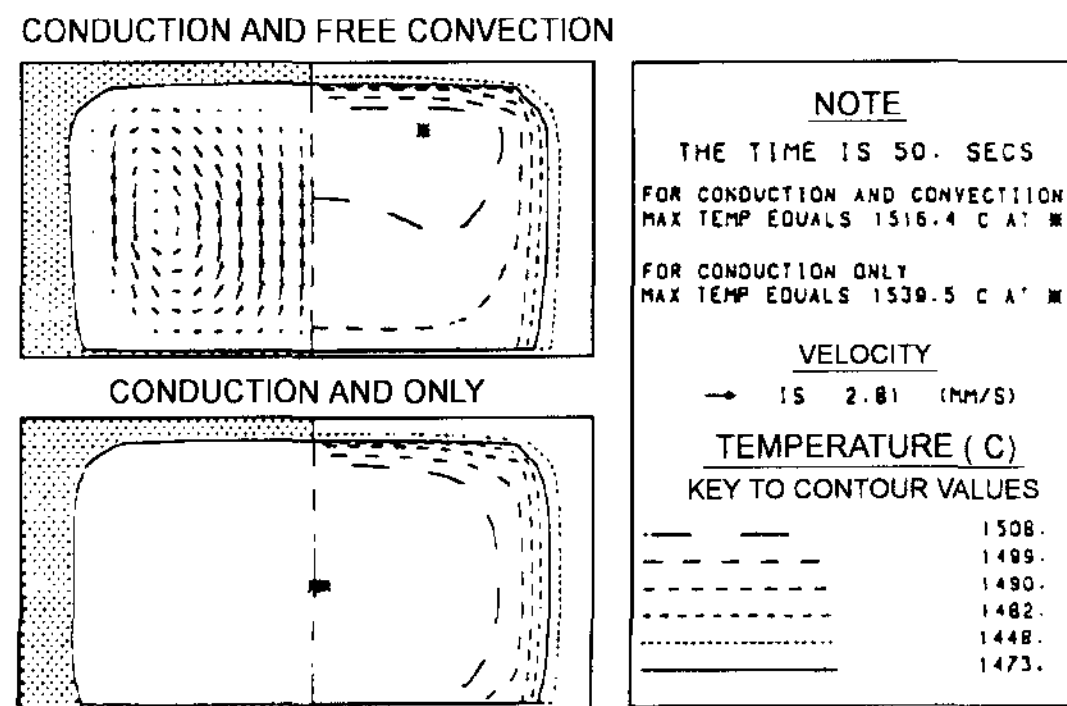


Fig. 7. Thermal contours and velocity field in a cylindrical casting on a sand bedding [18].

을 밝혔다.

5. 반응용 단조 공정해석에 있어서 응고해석의 적용 사례

본 절에서는 반응용 단조 공정해석에 있어서 응고해석이 적용된 한 사례를 소개하고자 한다. 반응용 단조는 일반적인 주조 공정과는 차이가 있지만 이미 알려진 바와 같이 고상과 액상이 공존하는 온도 영역에서 부품성형을 수행하기 때문에 비등온 공정의 경우 응고해석이 필수적으로 수반되어야 한다. 소개하고자 하는 내용은 본 연구실에서 수행한 Al2024 합금을 이용한 볼 조인트 케이스 (ball-joint case)의 반응용 단조 성형해석으로서 기존의 생산라인에서는 SM43C를 이용하여 Fig. 8에 나타낸 바와 같은 공정순서에 의하여 열간 성형되는 차량부품이다. 이를 반응용 단조로 성형할 경우에는 1번의 초기 소재에서 4번에 가까운 형상을 얻는 것이 가능하다.

해석에 사용한 코드는 자체적으로 개발한 유한요소 해석 코드인 CAMPform [24]이며 해석 조건은 Table 2에 나타낸 바와 같다. 또한 등가비열법을 이용하여 열에너지 방정식의 잠열항을 처리 하였으며 해석의 주된 관점은 주조공정에서처럼 유동과 응고 해석이 아닌 변형 및 응고해석이다 [25,26].

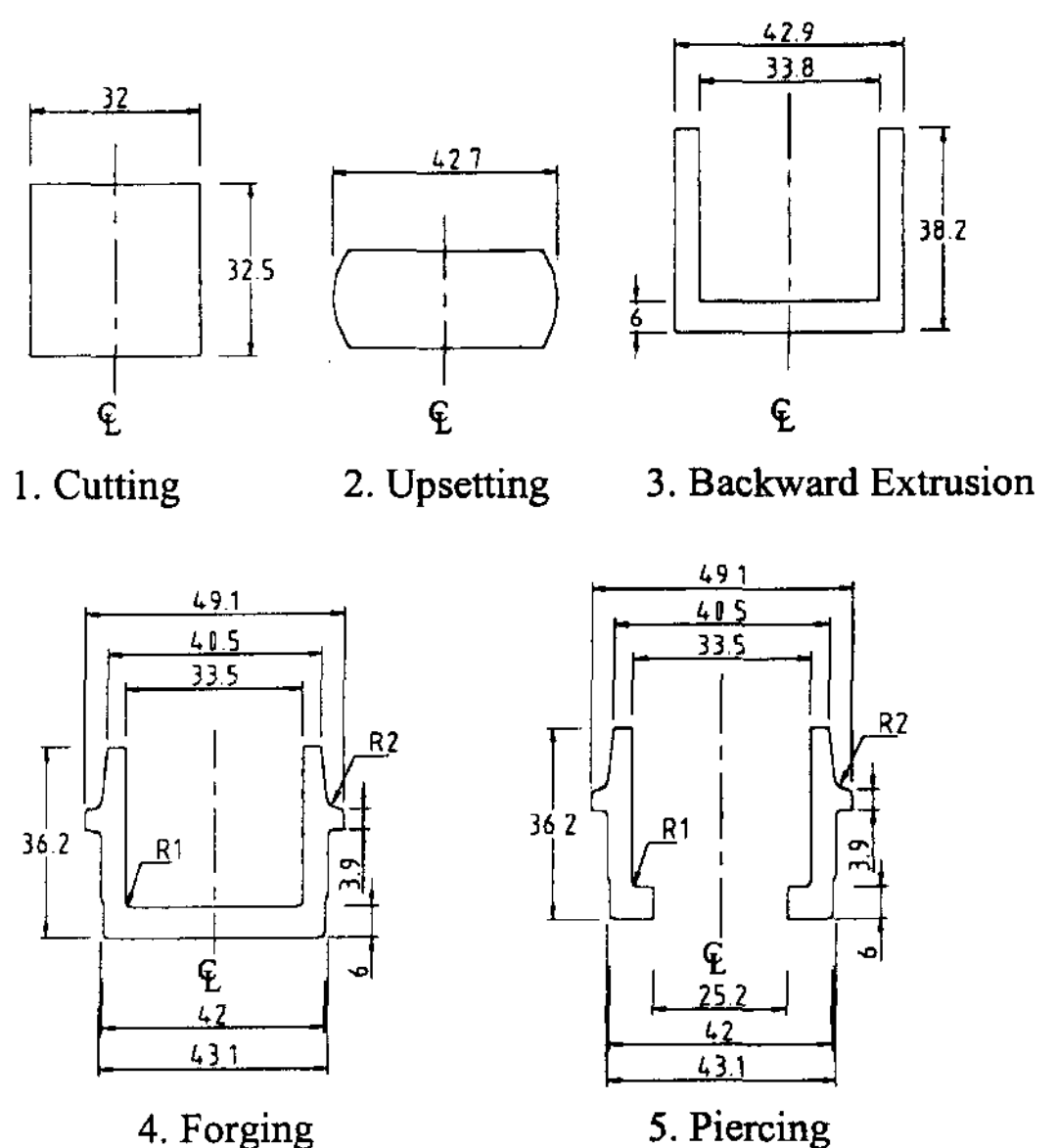


Fig. 8. Production sequence for steel ball-joint case [25].

Table 2. Simulation conditions for semi-solid forging of ball joint case [25].

Billet size(diameter×height)	φ 35×H28 mm	
Initial solid fraction	f_{s0}	0.22
(Initial workpiece temperature)	(T, °C)	(640)
Die velocity	v_p , mm/s	1.0
Die and punch preheating temperature	T_d , °C	500, 550 and 600

Fig. 9는 소재와 금형의 초기 요소망을 나타내고 있으며 Fig. 10은 금형예열온도가 $T_d=600^{\circ}\text{C}$ 인 경우에 있어서 펀치행정에 따른 소재의 변형양상을 나타내는 그림이다. 성형과정에 있어서 초기에는 업셋팅 모드 (upsetting mode)가 주된 변형모드로 나타나며, 펀치행정 = 10 mm 이후에서는 금형과의 접촉을 일으키면서 후방압출 모드가 주된 변형 모드로 나타났다. 펀치행정 = 25 mm에 이르러서는 금형의 모든 부분을 원만하게 충전시켜 최종형상으로 성형되었음을 알 수 있다.

Fig. 11은 금형예열온도가 각각 (a) $T_d=600^{\circ}\text{C}$, (b) $T_d=550^{\circ}\text{C}$ 및 (c) $T_d=500^{\circ}\text{C}$ 인 경우에 대해서 고상률과 온도분포를 나타낸 그림이다. 금형예열온도가 낮

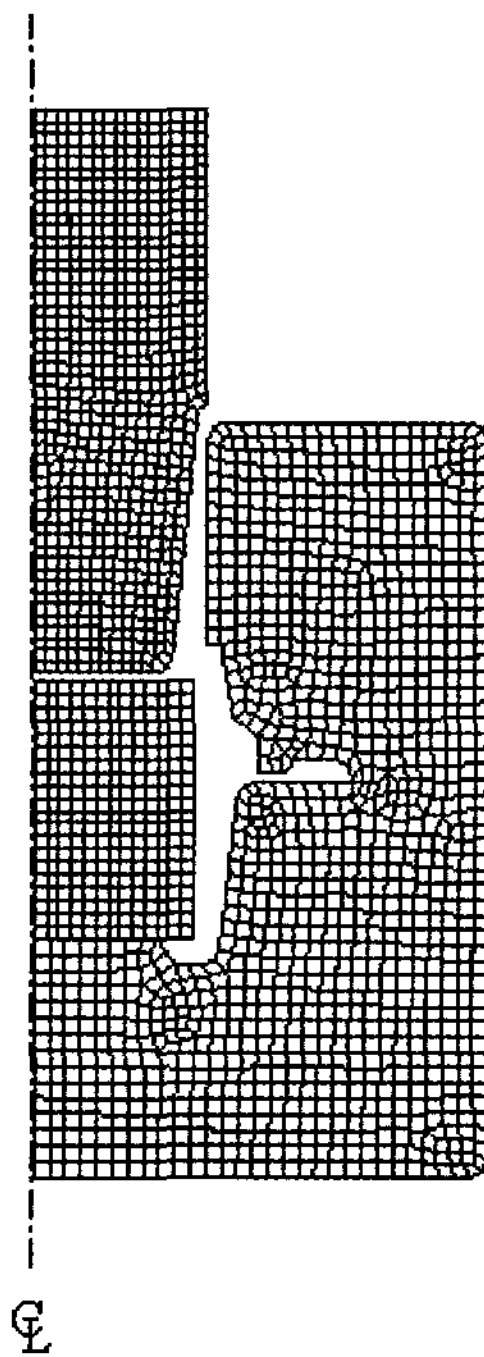


Fig. 9. Initial mesh system of workpiece and dies generated by CAMPform.

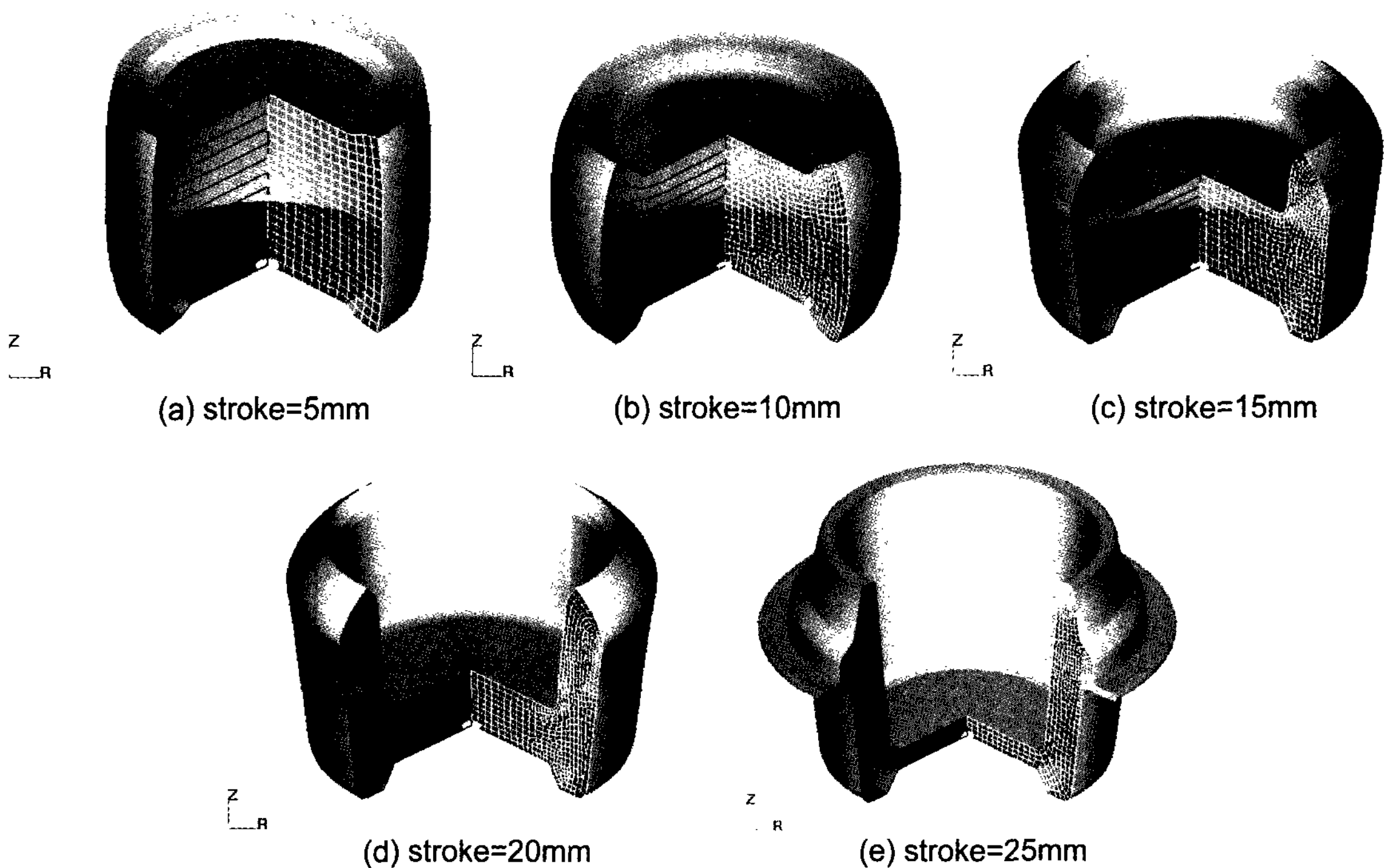


Fig. 10. Deformed shapes of workpiece obtained from simulation by CAMPform with die preheating temperature of 600°C at punch strokes of (a) 5 mm, (b) 10 mm, (c) 15 mm, (d) 20 mm, and (e) 25 mm.

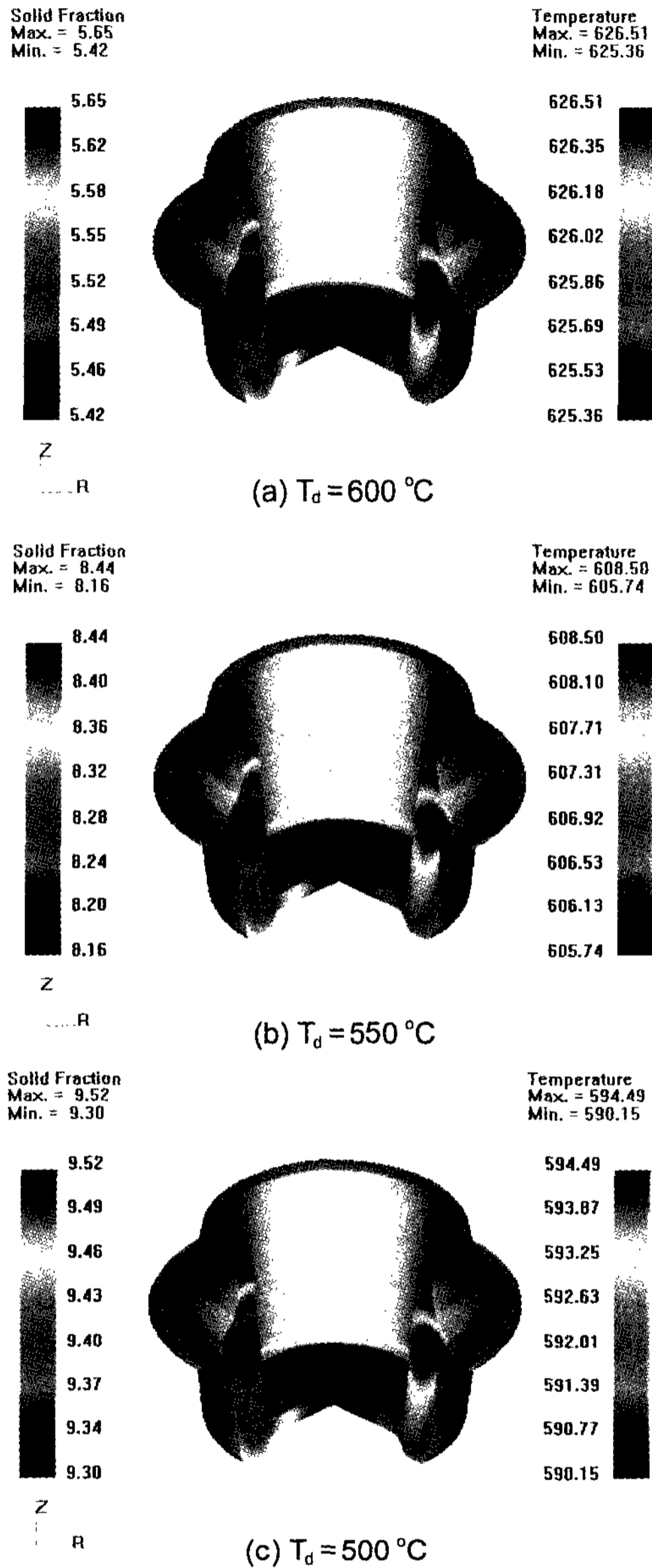
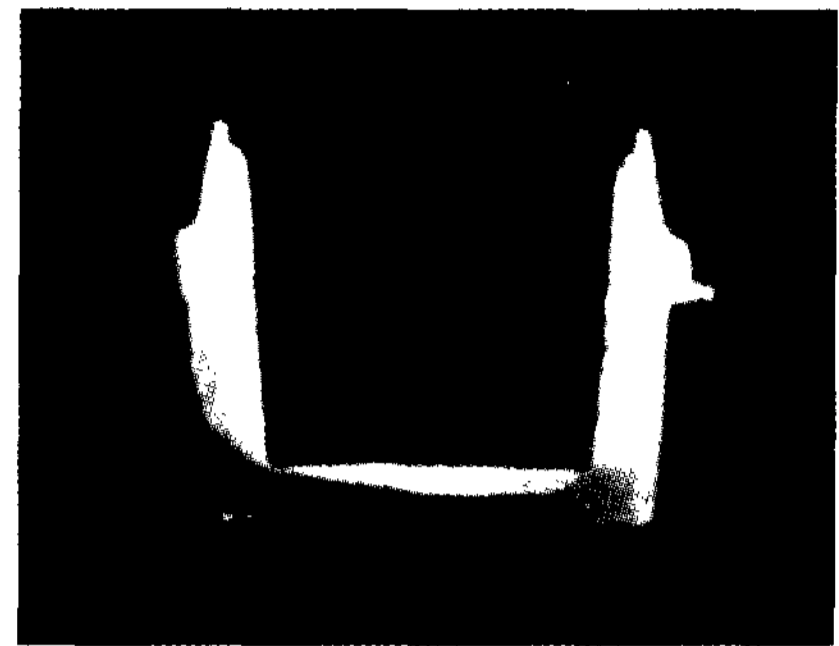


Fig. 11. Distribution of solid fractions and temperatures obtained from simulations by CAMPform with die preheating temperatures of (a) $T_d = 600^\circ\text{C}$, (b) $T_d = 550^\circ\text{C}$, and (c) $T_d = 500^\circ\text{C}$.

을수록 금형 및 외부공기로의 빠른 열전달로 인하여 최종 성형단계에서의 온도는 낮은 값을 나타내고 있으며 더불어 고상률 또한 높은 값을 나타내고 있다. 특히, $T_d = 500^\circ\text{C}$ 인 경우 예측된 최저 고상률은 0.93 정도인 데, 이는 완전 고체상태와 거의 마찬가지로 상태이



(a) $T_d = 600^\circ\text{C}$



(b) $T_d = 500^\circ\text{C}$

Fig. 12. Ball-joint case manufactured by semi-solid forging under different die preheating temperatures: (a) $T_d = 600^\circ\text{C}$ and (b) $T_d = 500^\circ\text{C}$.

며 실제 공정에서는 성형된 부품에 균열 같은 결함이 존재할 가능성이 높음을 뜻한다.

Fig. 12는 금형예열온도 (T_d)가 각각 (a) $T_d = 600^\circ\text{C}$, (b) $T_d = 500^\circ\text{C}$ 인 경우 성형된 볼 조인트 케이스의 형상을 나타낸 것이다. $T_d = 500^\circ\text{C}$ 인 경우는 금형과 소재의 초기 온도차이가 본 실험조건에서 가장 큰 경우에 해당되는 데, 소재로부터 금형과 주위 공기로의 빠른 열전달에 의한 냉각속도의 증가로 인하여 성형완료 이전에 소재의 상당부분이 응고함에 따라 캐브와 접촉되는 부위에서는 상당한 균열이 발생하였다. 이러한 실험결과는 Fig. 11의 유한요소해석을 통해서 예측한 바와 일치하는 경향이며 반응용 단조에 의한 부품성형 시 응고해석을 수행함으로써 금형예열온도에 관한 정보를 정량적으로 확보할 수 있는 하나의 예라 하겠다.

6. 결 론

지금까지 수행되어온 응고해석 사례들을 살펴봄으로

써 응고해석에 관한 이론이나 수치해석 모델들은 비교적 잘 정립되어 있음을 알 수 있다. 그러나 이들 해석 프로그램에 사용되는 물성치들의 올바른 측정이 매우 중요하고 특히 주형과 주물간의 접촉열전달계수값은 계산치에 많은 영향을 미침을 알 수 있다. 한편 전전한 주조방안의 설계, 신뢰성 높은 제품의 생산, 생산성 향상 및 생산경비의 절감 등을 목적으로 응고해석을 수행할 경우 해석대상 혹은 문제에 따라서 적절한 잠열 방출 모델과 결합예측 기법의 선정이 필요하며 또한, 자연대류의 효과를 고려함으로써 주물이나 주형의 온도분포 및 결합예측의 정확도를 보다 향상 시킬 수 있을 것이다.

후 기

본 고의 작성을 위해 많은 도움을 준 항공우주연구원 윤 종훈 박사께 깊은 감사의 마음을 전합니다.

참고문헌

[1] F. M. White, Heat and Mass Transfer, Addison-Wesely Publishing Company (1988)
 [2] M. N. Ozisik, Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC Press (1994)
 [3] 大中逸雄, コシビ-夕傳熱・凝固解析入門, 丸善株式會社 (1985)
 [4] Y. T. Im, "Finite Element Modeling of Heat Transfer during Solidification," Modeling of Casting and Welding IV, Palm Coast, Florida, U.S.A., (1988) 933
 [5] T. C. Tszeng, Y. T. Im and S. Kobayashi, "Thermal Analysis of Solidification by the Temperature Recovery Method," Int. J. Mech. Tools Manufact., Vol. 29, (1989) 107
 [6] Y. H. Chen, Y. T. Im and Z. H. Lee, "Three Dimensional Finite Element Analysis with Phase Change by Temperature Recovery Method," Int. J. Mech. Tools Manufact., Vol. 31, (1991) 1
 [7] C. P. Hong, T. Umeda and Y. Kimura, "Numerical Models for Casting Solidification: Part II. Application of the Boundary Element Method to Solidification Problems," Metal. Trans. B, Vol. 15B, (1984) 101
 [8] 이재경, 전주매, 전기찬, "FDM에 의한 응고해석 시 계산시간 단축을 위한 Algorithm 연구", 주조, 제 14권, 제 5호, (1994) 34
 [9] 김종현, 임인철, 김성식, "용융시 수반되는 4가지 다른 잠열 모델의 비교 연구", 주조, 제 12권, 제 1호, (1992) 62
 [10] W. D. Rolph and K. J. Bathe, "An Efficient Algorithm for Analysis of Nonlinear Heat Transfer with Phase Changes," Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 18, (1982) 119
 [11] V. R. Voller, M. Cross and N. C. Markatos, "An Enthalpy

Method for Convection/Diffusion Phase Change," Int. J. Num. Eng., Vol. 24, (1987) 271
 [12] S. E. Hibbert, N. C. Markatos and V. R. Voller, "Computer Simulation of Moving-Interface, Convective, Phase-Change Processes," Int. J. Heat Transfer, Vol. 31, (1988) 1785
 [13] E. Niyama, T. Uchida and S. Saito, "Prediction Shrinkage in Large Steel Castings from Temperature Gradient Calculations," AFS Int. Cast Metals J., (1981) 16
 [14] E. Niyama, T. Uchida and S. Saito, "A Method of Shrinkage Prediction and Its Application to Steel Casting Practice," AFS Int. Cast Metals J., (1982) 52
 [15] Y. H. Chen, Y. T. Im, "Analysis of Solidification in Sand Permanent Mold Casting and Shrinkage Prediction," Int. J. Mech. Tools Manufact., Vol. 30, (1990) 175
 [16] 유승목, 이두호, 김종기, 소찬영, 홍준표, "개량차분법에 의한 대형주강품의 3차원 응고해석", 주조, 제 11권, 제 1호, (1991) 54
 [17] 김지준, 최정길, 홍준표, "응고 수축을 고려한 수축공 결합의 3차원 예측", 주조, 제 15권, 제 1호, (1995) 83
 [18] M. Salcudean and Z. Abdullah, "On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes," Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 25, (1988) 445
 [19] N. Ramachandran, J. P. Gupta and Y. Jaluria, "Thermal and Fluid Flow Effects During Solidification in a Rectangular Enclosure," Int. J. Heat Mass Transfer., Vol. 25, (1982) 187
 [20] W. D. Bennon and F. P. Incropera, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid - Liquid Phase Change Systems - I. Model Formulation," Int. J. Heat Mass Transfer., Vol. 30, (1987) 2161
 [21] W. D. Bennon and F. P. Incropera, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid - Liquid Phase Change Systems - II. Application to Solidification in a Rectangular Cavity," Int. J. Heat Mass Transfer., Vol. 30, (1987) 2171
 [22] Y. H. Chen, Y. T. Im and J. K. Lee, "Finite Element Simulation of Solidification with Momentum, Heat and Species Transport," J. Mater. Proc. Tech., Vol. 48, (1995) 571
 [23] Y. H. Chen, Y. T. Im and J. S. Yoo, "Finite Element Analysis of Solidification of Aluminum with Natural Convection," J. Mater. Proc. Tech., Vol. 52, (1995) 592
 [24] 광대영, 천재승, 김수영, 이근안, 임용택, "PC기반 소성가공 공정 해석시스템 개발", 한국소성가공학회지, Vol. 9, No. 3, (2000) 233
 [25] J. H. Yoon, Y. T. Im and N. S. Kim, "Rigid-Thermoviscoplastic Finite Element Analysis of the Semi-Solid Forging of Al2024," J. Mater. Proc. Tech., Vol. 89, (1999) 104
 [26] J. H. Yoon, Y. T. Im and N. S. Kim, "Finite Element Modeling of Deformation Behavior of Semi-Solid Materials, J. Mater. Proc. Tech., Vol. 113, (2001) 153