

FDM과 FEM의 해석 데이터 변환에 의한 탄소성 열응력 해석

곽시영* · 조종두**

*인하대학교 기계공학과 대학원

**인하대학교 기계공학과

Thermal Stress Analysis by Field Data Conversion between FDM and FEM

S. Y. Kwahk and C. D. Cho

Department of Mechanical Engineering, INHA University, Incheon Korea

Abstract The present study was an attempt for systematic data conversion between FDM and FEM in order to evaluate the thermal stress distribution during quenching process. It has been generally recognized that FDM is efficient in flow and temperature analysis and FEM in that of stress. But it induced difficulty and tedious work in analysis that one uses both FDM and FEM to take their advantages because of the discrepancy of nodes between analysis tools. So we proposed field data conversion procedure from FDM to FEM in 3-dimensional space, then applied this procedure to analysis of quenching process. The simulation procedure calculates the distributions of temperature and microstructure using FDM and microstructure evolution equations of diffusion and diffusionless transformation. FEM was used for predicting the distributions of thermal stress. The present numerical code includes coupled temperature-phase transformation kinetics and temperature-microstructure dependent material properties. Calculated results were compared with previous experimental data to verify the method, which showed good agreements.

(Received)

Key words: FDM, FEM, Field Data Conversion, Microstructure Evolution, Thermoelastic-plastic Stress Analysis

1. 서 론

열처리 또는 주조 등의 열간가공 공정에서 응고시간, 냉각속도 등의 공정변수 제어와 경도, 잔류응력과 같은 기계적 성질의 예측은 중요하며 근래에는 컴퓨터의 발전과 더불어 이러한 가공 공정에 대한 CAE(Computer Aided Engineering)를 많이 수행하고 있다[1,2]. 현재 CAE에서는 유한차분법(Finite Difference Method, FDM)과 유한요소법(Finite Element Method, FEM)이 많이 사용되는데 유동 및 온도의 해석에서는 유한차분법에 의해 많은 접근이 이루어지고 있으며 응력의 해석을 위해서는 주로 유한요소법이 주로 사용되고 있다.

주조나 열처리공정에서 열응력의 해석은 종래부터 행하여져 왔는데 온도, 조직, 응력 및 화학적 물리적 성질의 상호 연성작용에 의해 해석상 많은 문제가 되어왔다[3-6]. 각종 열처리, 주조, 용접 등의 열적공정은 급격한 온도변화를 거치는 동안 열적 응력을 받으며 가공공정 중에 발생하는 열응력은 균열이나 변형 및 피로파괴의 원인이되므로 열간공정중의 재료거동에 관한 응력의

해석은 매우 중요하다.

만일 이러한 가공 공정에 대해 전산 수치해석을 수행할 때 상기 언급한 바와 같이 각각의 용도에 적합하도록 해석 방법을 선택한다면 유한 차분법에서 구한 유동 및 온도, 조직 등의 해석결과를 열응력의 해석을 위해서 유한요소법의 데이터로 변환해야 할 것이다.

Grill[7] 등은 유한 차분법과 유한 요소법을 같이 사용하였고 Hou[8] 등은 유한요소법과 경계요소법을 사용하여 주조공정에 대한 전산모사를 시도하였다. 하지만 이러한 이종(異種) 해석 방법들을 체계적을 연관시키는 데는 소홀히 해온 것이 사실이다.

2차원이고 주로 직선경계를 가지는 단순한 해석영역에서는 유한차분법과 유한요소법의 격자를 일치하게 구성하여 데이터의 교환을 행해왔으나 임의 모양에서는 서로의 격자가 달라질 수 밖에 없고 해석 절점이 불일치하게 된다. 더욱이 컴퓨터의 발전에 힘입어 복잡한 제품을 3차원적으로 해석하게되는 경우는 변환해야할 해석결과 양이 많고 복잡해지므로 시스템적인 변환과정이 필요하며 서로의 연성 효과를 고려하려면 상호 역변

환도 가능해야 한다.

이에 본 연구는 3차원 상에서 유한차분법과 유한 요소법 사이에 데이터 교환을 체계적으로 행하였고 이러한 이중 해석 툴의 데이터 변환 알고리즘을 이용하여 쉘칭 열처리시 열응력의 해석에 적용하였다.

상기 해석을 수행하기 위하여 확산과 비확산 변태에 대한 변태 이행방정식과 유한 차분법을 이용하여 제품의 온도분포 및 조직 변태에 대한 해석을 수행하였다. 그리고 이 들 온도와 조직의 분포 데이터를 유한요소법의 절점 데이터로 변환하므로써 온도와 조직에 의존하는 물성치를 사용하는 열탄소성 열응력 해석을 수행하여 잔류응력의 분포를 구하였다.

2. 유한 차분법에 의한 온도해석

내부에 열원을 갖는 과도 열전도 해석을 위한 식은 다음과 같다.

$$\nabla(k\nabla T) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

여기서 k , ρ , C_p 는 각각 열전도도(thermal conductivity), 밀도(density) 및 비열(specific heat)이고 q 는 해석영역 내에서의 열발생율(the rate of heat generation)이다.

대류열전달계수 $h(T)$ 를 갖는 제품의 자유표면에서의 대류경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$-k\nabla T = h(T)(T_\infty - T_s) \quad (2)$$

열처리나 주조공정에서의 내부 열발생율 q 는 상변태시 엔탈피의 변화에 기인한다. 그러므로 q 는 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$q = \sum_i \Delta H_i \frac{\Delta F_i(T)}{\Delta t} \quad (3)$$

여기서 ΔH_i 는 어떤 상(i)가 생기면서 발생하는 잠열이 된다.

위의 열전도 미분방정식을 다음과 같은 과정을 거쳐 차분화 한다.

미소시간 Δt 에서 임의의 유한 차분 요소(i)의 열변화량 Q_a 는 다음과 같이 표현되며

$$Q_a = \frac{\rho C}{\Delta t} V_i (T_i^{t+\Delta t} - T_i^t) \quad (4)$$

현재 고려하고 있는 요소(i)와 이웃하는 주위 요소(j) 사이의 경계를 통하여 전달되는 열량 Q_b 는 다음과 같이 표현된다.

$$Q_b = \sum_i \sum_{j(i \neq j)} B_{ij} \cdot A_{ij} (T_j^t - T_i^t) \quad (5)$$

A_{ij} 와 B_{ij} 는 각각 요소 i , j 사이의 경계면의 면적과 경계조건이며 이들은 주위 요소의 재질과 기하학적 형상에 의해 결정된다[8].

3. 유한차분법에 의한 상변태 해석

3.1. 오스테나이트-퍼얼라이트 변태

오스테나이트에서 퍼얼라이트로의 변태는 열적으로 활성화된 개개 원자의 확산에 의해 진행된다. 이러한 확산형 변태의 이행방정식은 Avrami 타입의 방정식으로 표현된다[10].

$$F_p^{t+\Delta t} = 1 - \exp(-B_p(T)\theta_j^{N_p(T)}) \quad (6)$$

여기서 $B_p(T)$ 와 $N_p(T)$ 는 재질의 파라미터로 해당 재질의 항온변태곡선(isothermal Time-Temperature-Transformation diagram)으로부터 계산된다. 항온변태곡선으로부터 $B_p(T)$ 와 $N_p(T)$ 를 구하는 식은 다음과 같다 [11,12].

$$N_p(T) = \frac{\ln \left[\frac{\ln(1 - F_s)}{\ln(1 - F_e)} \right]}{\ln \left[\frac{\theta_s}{\theta_e} \right]} \quad (7)$$

$$B_p(T) = \frac{\ln(1 - F_s)}{\theta_s^{N_p(T)}} \quad (8)$$

θ_s 와 θ_e 는 변태의 시작 및 종료 시간이고 F_s 와 F_e 는 각각 변태시작과 변태 종료의 변태율로 일반적으로 각각 0.005와 0.995를 사용한다.

변태시간 θ_j 는 (j-1) 번째 time step에서 상의 변태율 F_p 를 이용하여 다음과 같이 구할 수가 있는데

$$\theta_j = \Delta t_j + \left[\frac{\ln(1/(1 - F_p(j-1)))}{B_p(T)} \right]^{1/N_p(T)} \quad (9)$$

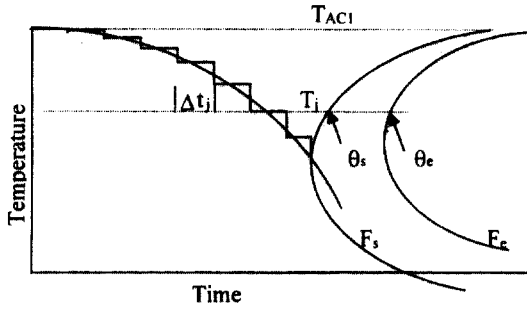


Fig. 1. The transformation parameters on TTT diagram

여기서 Δt_j 는 현재의 time step이고, 항온변태곡선상에서 기호 θ_s , θ_e 그리고 Δt_j 를 Fig. 1에 나타내었다.

확산변태의 개시는 Scheil's 원리를 이용하는데 매 time step j 에서 $\Delta t_j/\theta_s(T_j)$ 를 계산하여 더해 나간뒤 그 값이 식 (5)를 만족하면 변태가 시작된다.

$$\sum \frac{\Delta t_j}{\theta_s(T_j)} = 1 \quad (10)$$

3.2. 오스테나이트-마르텐사이트 변태

마르텐사이트 변태는 확산에 의하지 않고 오스테나이트의 전영역에서 전단에 의하여 경계면이 넓어지고 새로운 결정이 만들어지는 변태기구를 통하여 형성된다. 주어진 온도에서 마르텐사이트 조직의 변태율은 Koistinen과 Marburger가 제시한 다음 식을 사용하였다[11].

$$F_m = [1 - \exp[-\bar{\alpha}(T_{ms} - T)]] \left[1 - \sum_i F_i \right] \quad (11)$$

여기서 $\bar{\alpha} = 1.10 \times 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$, T_{ms} 는 마르텐사이트 변태의 개시온도, F_i 는 마르텐사이트 조직을 제외한 나머지 조직들이다

4. 유한요소법에 의한 열응력 해석

열탄소성 응력 해석에 있어 전변형율은 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_o \quad (12)$$

여기서 ε_e , ε_p 와 ε_o 는 각각 탄성변형율, 소성변형율 및 초기변형율을 나타낸다. 해석 영역을 유한요소로 이

산화한 후, 유한요소 내의 한 점에 대한 변위는 형상함수(shape function, $[N_i]$)를 이용하여 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\Delta u\}^e = [N_i]\{\Delta u\}_i^e \quad (13)$$

또한 변형률벡터 및 응력벡터는 변형률-변위행렬 $[B]$ 와 탄소성행렬 $[D_{ep}]$ 을 이용하여 식 (14)와 식 (15)로 각각 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta u\} \quad (14)$$

$$\{\sigma\} = [D_{ep}]\{\varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_o\} \quad (15)$$

유한요소 정식화 과정을 통하여 i 번째 유한요소에 대한 평형방정식은 식 (16)과 같이 주어진다.

$$[K]_i^e \{\Delta u\}_i^e = \{\Delta F_o\}_i^e + \{\Delta F_p\}_i^e \quad (16)$$

여기서

$$\{\Delta F_o\}_i^e = \int_{\Omega} [B]_i^{eT} [D_{ep}]_i \{ \alpha \} \Delta T d\Omega \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta F_p\}_i^e &= \int_{\Omega} [B]_i^{eT} [D_{ep}]_i \\ &\left(\frac{\partial [D_{ep}]_i^{-1}}{\partial T} \{ \sigma \} \Delta T + \frac{[D_{ep}]_i^{-1} [D_e]_i \{ \sigma \}}{S} \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T \right) d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 S 는 다음과 같다.

$$S = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial f}{\partial k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (19)$$

식 (17)의 $\{F_o\}_i^e$ 는 열변형에 의한 등가절점력을 나타내며, 식 (18)의 $\{F_p\}_i^e$ 는 탄성계수, 포와송 비, 항복응력 등의 기계적 물성치가 온도의존적인 거동을 함에 따라 발생하는 등가절점력을 나타낸다. 해석영역 전체의 평형방정식은 각 유한요소의 기여분을 조합함으로써 얻어진다.

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta F_T\} \quad (20)$$

여기서 $[K]$ 는 강성행렬, $\{\Delta U\}$ 는 변위벡터, $\{\Delta F_T\}$ 는 절점력벡터이다. 식 (20)의 각 항은 다음과 같이 표현된다.

$$[K] = \sum_{i=1}^{NE} [K]_i^e \quad (21)$$

$$\{\Delta F_T\} = \sum_{i=1}^{NE} (\{F_o\}_i^e + \{F_o\}_i^e) \quad (22)$$

여기서 NE는 해석영역을 구성하는 유한요소의 개수이다. 위의 유한요소방정식은 등방경화성 소성거동을 표현하는 구성방정식에 기초하여 유도되었다.

5. 해석 데이터 변환

열처리 또는 주조공정에서 유한차분법을 이용하여 얻은 온도 및 조직변태 등의 해석 데이터는 응력해석을 위해 유한요소망의 절점 데이터로 변환되어야 한다.

유한 차분 격자망으로부터 유한요소 절점의 데이터를 구할 때는 유한차분 요소들의 재료의 종류에 따라 여러 가지 경우가 생기므로 일반적으로 같은 계산식을 사용하지 못하고 각각의 경우를 고려하여 계산하여야 한다.

다음은 2차원의 경우 해석 데이터의 변환 과정이다.

① 구하고자 하는 유한요소의 절점과 가장 가까운 유한차분 요소망의 네 개의 절점을 구한다.

② 구한 네 개의 절점의 물질이 해석하려는 제품의 영역에 속하는지, 또는 다른 재료인지의 영역에 속하는지를 판별한다.

③ Fig. 2와 같이 제품의 영역에 속하는 절점의 수에 따라 식 (23)을 적용하여 유한 요소망의 절점데이터를 구한다.

Case (a) : $T = T_2$ (23-a)

Case (b) : $T = \frac{b}{a+b} T_1 + \frac{a}{a+b} T_2$ (23-b)

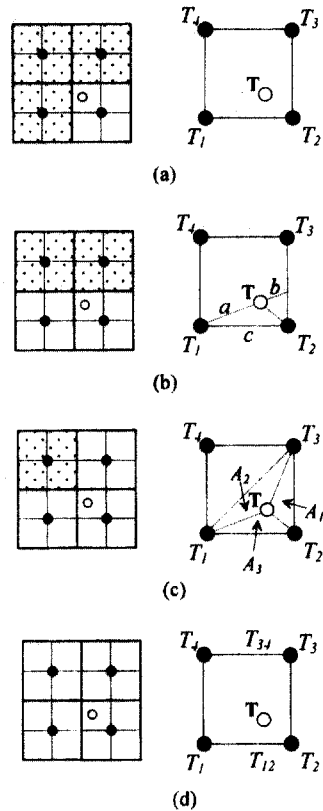
Case (c) : $T = \frac{A_1}{A} T_1 + \frac{A_2}{A} T_2 + \frac{A_3}{A} T_3$ (23-c)

Case (d) : $T_{12} = \frac{b}{a+b} T_1 + \frac{a}{a+b} T_2$; $T_{34} = \frac{b}{a+b}$

$T_3 + \frac{a}{a+b} T_4$; $T = \frac{d}{c+d} T_{12} + \frac{c}{c+d} T_{34}$ (23-d)

3차원은 2차원 평면이 겹쳐있는 것으로 생각할 수 있으므로 2차원 변환 알고리즘을 이용함으로써 구해질 수 있다.

① 구하고자 하는 유한요소의 절점과 가장 가까운 곳에 위치한 유한차분 격자망에서 여덟 개의 절점을 구한



- air or mold
- metal or mold
- nodes of the finite difference mesh
- node of the finite element mesh
- T_i : data of the nodes of FDM
- T : converted data for FEM

Fig. 2. Four different cases considered for conversion scheme in a two-dimensional mesh.

다. 유한요소의 절점은 구한 여덟개의 절점이 꼭지점을 이루는 직육면체의 내부에 위치하게 된다.

② 직육면체를 구성하는 면 중 Z축에 수직인 2개의 상, 하면을 구한다.

③ 각 면에 대해 2차원의 경우에 적용된 알고리즘을 적용하여 Fig. 3의 T_u , T_l 을 구한다.

④ T_u , T_l 에 대해 식 (23-b)를 적용하여 구하고자 하는 유한요소망의 절점데이터를 구한다.

Fig. 3은 상면은 3개의 격자가 제품이고, 하면은 4개가 모두 제품인 경우에 대한 그림이다.

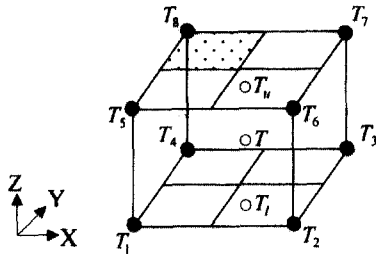


Fig. 3. A example of three-dimensional conversion scheme.

6. 해석 결과 및 고찰

6.1. 변환 데이터의 검증

유한차분 요소 절점과 유한요소 절점 사이의 데이터 변환의 정확성을 검증하기 위해 Fig. 4(a)와 같은 모델에 대해 온도 데이터를 상호 변환하였다.

즉 Fig. 4(b)의 유한차분 격자에서 온도해석을 수행하여 온도 데이터를 구하고 이 데이터를 Fig. 4(c)의 유한요소 절점들의 온도 데이터로 변환한다. 그리고 다시 유한 요소의 절점 온도를 이용하여 유한차분 격자의 절점 온도데이터로 역변환하여 원래의 온도값과의 차이를 구하였다.

모델은 초기 온도 850°C에서 수냉하였고 31초 후의 온도장을 변환하였다. 31초에서의 온도분포는 최소가 72°C, 최대가 208°C였으며 상호 변환에 의한 온도값의 차이는 5.84°C였다. 변환 전후의 온도값 차이는 다음과

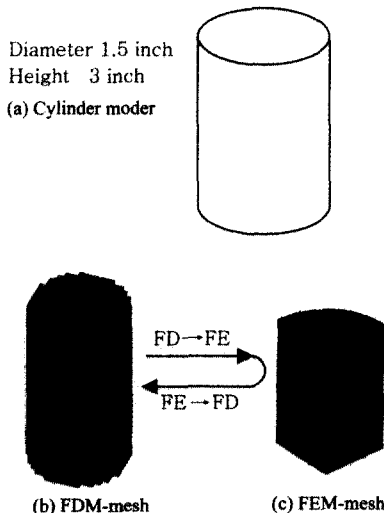


Fig. 4. The shape and FDM/FEM mesh of model.

같이 구하였다.

$$e = \sqrt{\frac{\sum(T_{FD} - T_{FE \rightarrow FD})^2}{N_{FD}}} \quad (24)$$

여기서 T_{FD} 는 유한차분 격자의 절점상의 온도이며 $T_{FE \rightarrow FD}$ 는 변환에 의한 유한요소상의 절점 온도를 이용하여 다시 유한차분 격자의 절점 온도로 역변환한 온도값이다. 또한 N_{FD} 는 유한차분 요소 절점의 개수이다.

6.2. 수치해석 예

유한차분법과 유한요소법사이의 데이터 변환과정을 이용하여 Fig. 4의 실린더에 대해 쿨링시 열탄소성 응력을 계산하고 2차원 제품에 대한 실험과 전산모사를 같이 수행한 Wang[11]의 결과값과 비교하였다. 재질은 AISI 1080이고 초기온도 850°C, 주위온도 22.5°C, 온도와 조직에 의존하는 물성치를 사용하였다[11,13].

온도해석은 시편에 대해 열전대를 이용한 실측냉각곡선과 해석결과를 비교하여 결과의 타당성을 검증하였다. Fig. 5는 본 연구에서 개발된 3차원 해석 프로그램의 결과와 참고문헌의 실측된 온도이력을 비교한 것이다.

Fig. 6은 시편의 중심으로부터 표면으로까지의 조직분율을 나타낸 것으로 선으로 표시된 것이 개발된 프로그램에 의한 결과이고 심볼로 표시된("Wang"이라고 표기) 데이터는 참고논문의 결과로 서로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 해석결과는 중심부로부터 반경 10 mm 이내에서는 100%에 가까운 퍼얼라이트가 표면에서부터 4 mm

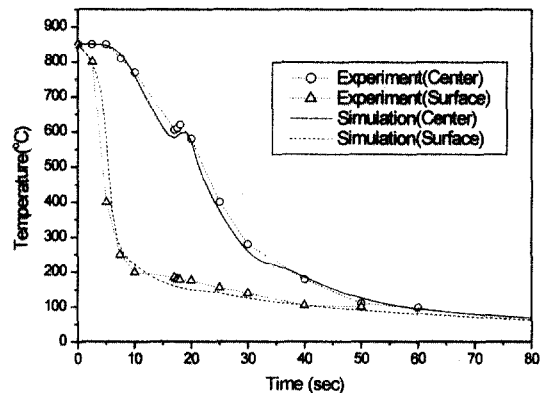


Fig. 5. The calculated and measured (Wang 1993) temperature histories in 1080 steel cylinder after quenching in the water.

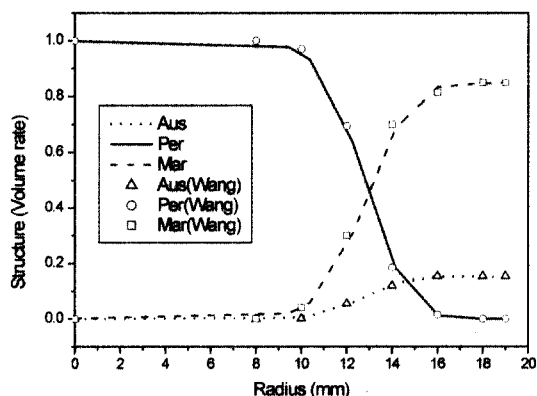


Fig. 6. The microstructure along the radial direction from the center after quenching in the water.

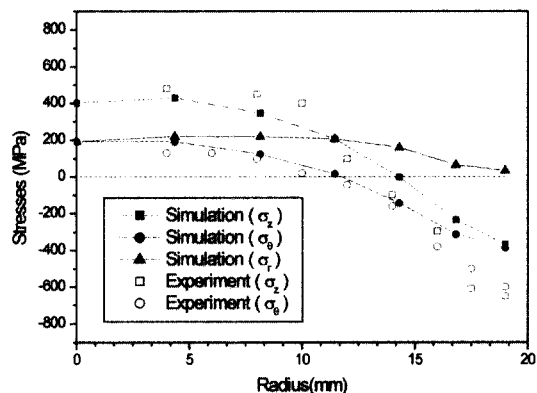


Fig. 7. The calculated and measured (Wang 1993) thermal stresses distributions in 1080 steel cylinder after quenching in the water.

까지는 마르텐사이트 조직이 형성됨을 예측할 수 있었다.

Fig. 7은 시편의 중심으로부터 반경방향을 따라 축방향응력(axial stress, σ_x)과 원주방향 응력(tangential stress, σ_θ)을 보여주고 있다. 또한 Wang이 X-ray diffraction을 이용하여 동일한 크기, 재질, 쿨칭조건하의 시편에 대해 실험한 실측 데이터와 비교하였다. 약간의 불일치는 온도와 조직에 의존하는 탄성계수나 항복응력 등의 부정확과 변태응력의 무시로 발생하는 것으로 보인다.

7. 결 론

본 논문에서는 유한차분법과 유한요소법의 해석결과를

체계적으로 변환하는 알고리즘을 제시하였고 열처리 공정의 전산모사를 위하여 유한차분법을 이용하여 온도해석과 조직변태를 유한요소법을 이용하여 열응력을 해석할 수 있는 3차원 열탄소성 코드를 개발하였다.

유한차분법의 해석결과를 유한요소법의 데이터로 변환하고 이를 다시 유한차분법의 데이터로 역변환을 실시하여 변환시 에러를 검토함으로써 만족할 만한 결과를 얻었으며 그 에러는 무시할 만하였다.

또한 본 연구에서 개발한 해석프로그램을 공석강 실린더의 쿨칭과정에 대해 전산모사를 실시하여 얻은 잔류응력은 선행된 실험결과와 잘 일치하였다.

또한 본 연구에서 개발한 이종 해석 툴의 데이터 변환방법은 유한요소법과 유한차분법 뿐만 아니라 경계요소법과의 데이터변환으로도 확장 될 수 있으며, 열처리나 주조와 같은 가공공정의 전산모사 뿐만 아니라 파이프속의 유체의 흐름, 비행기나 선박의 동체와 같이 유체와 고체의 연성효과를 함께 고려하여야 하는 구조물을 각각 다른 해석방법으로 해석할 경우도 적용할 수 있다.

참고문헌

1. T. Inoue, D. Y. Ju and K. Arimoto, 1992, "Metallo-Mechanical Simulation of Quenching Process-Theory and Implementation of Computer Code 'Hearts'", Proc. Of the First Int. Conf. On Quenching & control of Distortion., pp. 205-212.
2. J. M. Berghheur and J. B. Leblond, 1990, "Coupling Between Heat Flow, Metallurgy and Stress-Strain Computations in Steels: The Approach Developed in the Computer Code SYSWELD for Welding or Quenching", Proc. Of the Fifth Int. Conf. On Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes-V, pp. 203-209.
3. B. G. Thomas, 1993, "Stress Modeling of Casting Processes: An Overview", International Conference on Modeling of Casting & Solidification Process-VI, pp. 519-534.
4. 김옥삼, 구분권, 1994, "쿨칭과정에서 상변태를 고려한 탄소성 열응력의 유한요소 해석(I)", 한국열처리공학회지, 7권, 4호, pp. 233-243.
5. 김옥삼, 송관홍, 구분권, 1995, "쿨칭과정에서 상변태를 고려한 탄소성 열응력의 유한요소 해석(II)", 한국열처리공학회지, 8권, 1호, pp. 12-23.
6. T. Inoue, S. Nakaki, T. Kishino and M. Monkawa, 1981, "Description of Transformation Kinetics, Heat Conduction and Elastic-Plastic Stress in the Course of Quenching and Tempering of Some Steels",

- Ingenieur-Archiv, Vol 50, pp. 315-327.
7. Grill, A., Brimacombe, J. K. and Weinberg, F., 1976, "Mathematical Analysis of Stresses in Continuous Casting of Steel", *Ironmaking and Steelmaking*, No. 1, pp. 38-47.
 8. T. X. Hou, R. D. Pehike and J. O. Wilkes, 1990, "Computer Simulation of Casting Solidification Using a Combination of the Finite Element and Boundary Element Methods", *International Conference on Modeling of Casting & Solidification Process-V*, pp. 15-22.
 9. 최정길, 1992, "컴퓨터 시뮬레이션에 의한 주조결합의 예측 및 주조 공정의 제어에 관한 연구", 연세대학교 박사학위 논문. pp.4-9.
 10. M. Avrami, "Kinetics of Phase Change II", *J. Chem. Phys.*, Vol. 8, p. 212, 1940.
 11. K. F. Wang, *Analysis of the Carburization and Quenching of steels*, Ph D Thesis, 1996.
 12. P. K. Agarwal and J. K. Brimacombe, *Mathematical Model of Heat Flow and Austenite-Perlite Transformation in Eutectoid Carbon Steel Rods for Wire*, *Metallurgical Transactions*, Vol 12B, p121-133, March 1981.
 13. S. Denis, S. Sjostrom and A. Simon, 1987, "Coupled Temperature, Stress, Phase Transformation Calculation Model Numerical Illustration of the Internal Stresses Evolution during Cooling of a Eutectoid Carbon Steel Cylinder", *Metallurgical Transactions A*, Vol. 18A, pp. 1203-1212.