

수치 해석을 통한 자기 베어링 시스템의 모델링에 관한 연구

A Study on Modeling for the Magnetic Bearing System by Numerical Analysis

심성호 · 최명수 · 김창화 · 문덕홍 · 양주호

S. H. Shim, M. S. Choi, C. H. Kim, D. H. Moon and J. H. Yang

Key Words : Finite Element Method(유한 요소법), Discrete System(이산계), Modal Matrix(진동형 행렬), Magnetic Bearing(자기 베어링), Modeling(모델링), Frequency Response(주파수 응답)

Abstract : This paper considers a modeling for the MIMO magnetic bearing system. The rotor is flexible and has a complex shape. To obtain the nominal plant transfer functions, we perform a numerical analysis by using the finite element method(F.E.M.) for the rotor's dynamics, and make a nominal model by reducing the modes from the results. And, we have experimented on the frequency response by a closed-loop identification method, and compared it with the simulation's result on the closed-loop control system.

1. 서론

자기 베어링은 물체를 비접촉으로 지지할 수 있기 때문에 마찰이나 마멸이 없어 윤활 문제나 분진의 발생 염려가 없다. 자기 베어링의 이러한 장점으로 인하여 1937년 버지니아 대학의 Beams 등이 회전자를 부상시키는 자기 베어링을 개발¹⁾한 후로 종래의 기계식 베어링이 가지는 문제점을 해결하는 대안으로 그 동안 꾸준히 연구 개발을 통하여 여러 용도로 실용화하고 있는 중에 있으며, 앞으로도 그 응용 범위가 점차 확대되어 가는 추세에 있다^{2,3)}.

한편, 자기 베어링 시스템은 본질적으로 불안정·비선형 특성을 가지고 있으므로, 이를 현장에 응용하기 위해서는 시스템을 안정화하는 제어기의 설계와 이를 위한 시스템의 수학적 모델링이 필요하다^{4,5)}. 이에 대한 최근의 연구는 고속 회전체에 대한 모델링⁶⁾과 모델링 오차, 시스템 파라미터의 변동, 외란 등에 대해 로버스트한 위치 제어기의

설계^{7,8)}가 그 주류를 이루고 있다.

본 연구에서는 회전축이 축방향과 직각으로 상하 및 좌우 방향으로 운동을 하는 횡축형 자기 베어링 시스템(Magnetic Moments, LLC., 'MBC Turbo 500')을 모델링에 관한 연구 대상으로 한다.

본 연구는 DSP와 같은 디지털 마이크로 프로세서를 이용한 로버스트 제어기의 설계를 위해, 구조가 비교적 복잡할 뿐만 아니라 장경비가 큰 플렉시블한 탄성 로터에 대해, 유한 요소법을 이용한 수치 해석을 통하여 시스템을 모델링하는데 그 목적이 있다. 또한, 제어기의 구현을 용이하게 하기 위해, 저차원화된 공칭 모델을 구하고, 주파수 응답 실험 결과와 구해진 공칭 모델에 대한 응답 시뮬레이션 결과의 비교로부터 그 타당성을 검증하였다. 이를 위하여 본 연구에서는 자기 베어링 시스템이 본질적으로 불안정계이므로 제어기를 이용하여 축을 부상시킨 뒤 동정 실험을 행하는 폐루프 동정법을 이용하였다.

2. 자기 베어링 시스템의 수학적 모델링

2.1 시스템의 구성

Fig. 1은 본 연구에 이용된 자기 베어링 제어 시스템에서 수직 또는 수평 방향 중의 한 방향 성분을 나타낸 것이다. 회전축은 자기 베어링의 지지

접수일 : 2001년 9월 12일
심성호 : 부경대학교 대학원
최명수, 문덕홍, 양주호 : 부경대학교 기계공학부
김창화 : 경남정보대학 전자정보통신제어계열

강성이 비교적 작기 때문에 자유·자유축계로 간주한다.^{9,10)} 전자석은 축을 부상 지지시키기 위한 전자기력을 발생하며, 말굽형 구조로 되어 있다. 양쪽 전자석의 외측에 설치된 홀 효과 센서는 로터의 변위 신호를 검출하고 이를 차동 증폭하여 전압 신호로 변환한다. 루프 절환 스위치는 아날로그 제어기를 회로에 연결하거나 차단할 수 있도록 하며, 그 연결을 차단한 상태에서는 외부 제어기를 시스템에 장착할 수 있게 되어 있다.

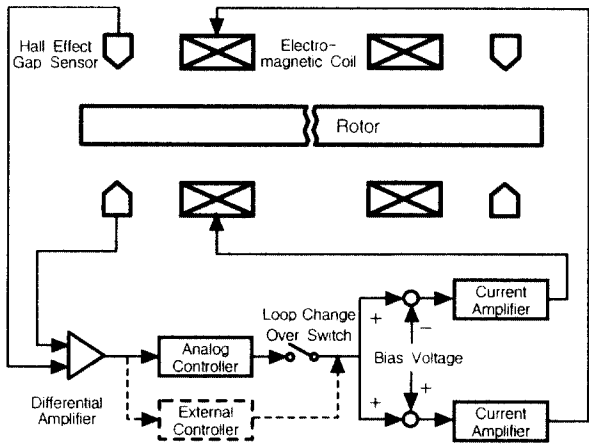


Fig. 1 Schematic diagram of magnetic bearing control system

2.2 탄성 로터계의 모드 해석을 통한 저차원 모델화 이론

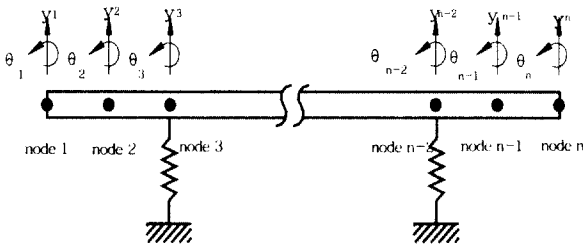


Fig. 2 Analytical model

본 연구에서는 탄성 로터계를 여러 개의 유한 요소(Finite element)로 나누는 이산화 과정을 통하여, 이산계(Discrete system)로 모델링한다. 모델링의 간략화를 위하여 수직 방향과 수평 방향의 연성의 영향이 작다고 가정하고 중력 작용의 유무를 제외하면, 수평 및 수직 방향의 동특성이 동일하므로 본 연구에서는 수평 방향 운동 성분만을 모델

링한다.

계의 좌단과 우단 그리고 각 요소 사이의 결합점을 절점(Node)이라 부른다. Fig. 2와 같이 탄성 로터계가 n 개의 절점을 갖는다면, 탄성 로터계의 면내 굽힘 진동을 해석할 경우, 각 절점은 횡방향과 회전 방향의 2개의 자유도를 가지므로, 탄성 로터계의 전체 자유도 r 은 $2n$ 이 된다. 그리고 절점과 절점 사이는 관성과 탄성을 갖는 보 요소로 모델링되고, 수치 계산시에는 4×4 의 크기를 갖는 보 요소의 질량행렬과 강성행렬이 사용된다¹¹⁾.

감쇠를 무시할 수 있는 탄성 로터계의 운동 방정식을 행렬식으로 나타내면 식(2.1)과 같다.

$$M \ddot{\mathbf{x}} + K \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

여기서 행렬의 크기가 $r \times r$ 인 행렬 M 과 K 는 해석 대상인 탄성 로터계의 전체 질량 행렬과 강성 행렬이며, 해석적으로 분할된 보 요소(Beam element)의 질량 행렬과 강성 행렬을 조립하여 구할 수 있다. $\ddot{\mathbf{x}}$, \mathbf{x} 및 \mathbf{f} 는 각각 물리 좌표계의 전체 가속도 벡터, 변위 벡터 및 힘 벡터이다. 변위 벡터는 식(2.2)와 같이 각 절점의 횡변위 y 와 각 변위 θ 로 구성되며, r 개의 성분을 갖는다. 힘 벡터는 식(2.3)과 같이 전단력 S 와 모멘트 N 으로 구성되며, r 개의 성분을 갖는다.

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{r-1}, x_r\}^T = \{y_1, \theta_1, y_2, \theta_2, \dots, y_n, \theta_n\}^T \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{r-1}, f_r\}^T = \{S_1, N_1, S_2, N_2, \dots, S_n, N_n\}^T \quad (2.3)$$

식(2.1)에서 힘 벡터를 제거한 후, 고유치 문제를 풀면 r 개의 고유 벡터, 즉, 진동형 벡터를 구할 수 있고, 진동형 행렬(Modal matrix) Φ 는 진동형 벡터를 이용하여 식(2.4)와 같은 크기가 $r \times r$ 인 정방 행렬로 만들 수 있다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1j} & \dots & \phi_{1r} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2j} & \dots & \phi_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{ij} & \dots & \phi_{ir} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{r1} & \phi_{r2} & \dots & \phi_{rj} & \dots & \phi_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

여기서, 하첨자 i 는 각 절점의 자유도 번호를 나타내고, j 는 각 모드의 차수를 나타낸다. 식(2.1)에 진동형 행렬의 전치 Φ^T 를 곱하고, 식(2.5)의 좌표 변환을 행하면, 진동형 벡터의 직교성에 의해 식(2.6)과 같이 모드 좌표계의 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (2.5)$$

$$\widehat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (2.6)$$

여기서 $\dot{\mathbf{q}}$, \mathbf{q} 및 \mathbf{p} 는 각각 모드 좌표계의 전체 가속도 벡터, 변위 벡터 및 힘 함수 벡터이며, 계의 전체 자유도가 r 이므로, 각각 r 개의 성분으로 구성된다. 구체적으로 변위 벡터와 힘 함수 벡터는 각각 식(2.7) 과 식(2.8)과 같다.

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_r\}^T \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}^T = \Phi^T \mathbf{f} \quad (2.8)$$

그리고 $\widehat{\mathbf{M}}$ 과 $\widehat{\mathbf{K}}$ 는 모드 질량 행렬과 모드 강성 행렬이고, 행렬 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 가 실대칭 행렬일 때, 식(2.9) 및 (2.10)과 같이 각각 r 개의 대각 요소로 구성된다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \widehat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \widehat{m}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{m}_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{m}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \widehat{m}_r \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \widehat{k}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{k}_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{k}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \widehat{k}_r \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

여기서, \widehat{m}_i 와 \widehat{k}_i 는 각각 i 번째 진동형의 일반 질량 계수와 일반 강성 계수이다.

탄성 로터가 r 개의 자유도를 갖는 것으로 모델링하면, 해석적으로 r 개의 진동형 벡터를 구할 수

있지만, 일반적으로 탄성 로터의 동특성에 지배적인 것은 저차의 몇몇 진동형 벡터이므로, 본 연구에서는 1차에서 4차까지의 저주파수 진동형 벡터만 고려한다. 따라서 저차원화된 운동 방정식은 식(2.11)과 같이 된다.

$$\widehat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{a}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (2.11)$$

여기서, 저차원화된 모드 질량 행렬 $\widehat{\mathbf{M}}$ 과 강성 행렬 $\widehat{\mathbf{K}}$, 그리고 저차원화된 모드 좌표계의 변위 벡터 \mathbf{a} 는 각각 식(2.12)에서 식(2.14)와 같다. 그리고 r 개의 성분으로 구성된 물리 좌표계의 힘 벡터 \mathbf{f} 중에서 실제로 로터에 작용하는 외력의 자유도가 전체 힘 벡터 \mathbf{f} 중에서 i 번째와 j 번째라면, 저차원화된 모드 좌표계의 힘 함수 벡터 \mathbf{b} 는 식(2.15)와 같다.

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \widehat{m}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{m}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{m}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{m}_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \widehat{k}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{k}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{k}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{k}_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}^T = \Phi^T \mathbf{f} \quad (2.15)$$

여기서,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{f} = \{f_i, f_j\}^T$$

여기서 상태 벡터 \mathbf{z}_1 과 제어 입력 \mathbf{u}_1 을 각각 식(2.17)과 식(2.18)과 같이 정의한다.

$$\mathbf{z}_1 \equiv \{ \mathbf{a}^T, \dot{\mathbf{a}}^T \}^T \quad (2.17)$$

$$= \{q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4\}^T$$

$$\mathbf{u}_1 = \dot{\mathbf{x}} \quad (2.18)$$

그러면 상태 방정식은 식(2.19)와 같이 된다.

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 \quad (2.19)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T \end{bmatrix}$$

이다.

한편, 물리 좌표계의 전체 변위 벡터 \mathbf{x} 중에서 i 번째와 j 번째 자유도 성분으로 출력 \mathbf{y}_1 벡터를 선정한다면, 출력 벡터는 식(2.21)과 같이 된다.

$$\mathbf{y}_1 = \{x_i, x_j\}^T \quad (2.21)$$

따라서, 출력 방정식은 식(2.5)로부터 식(2.22)와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_1 \quad (2.22)$$

여기서,

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

2.3 탄성 로터계의 동특성에 관한 수치 해석

2.3.1 고유치 해석

본 연구에서는 Fig. 3과 같은 알루미늄-스테인리스 재료의 자기 베어링 로터계를 총 34개의 보요

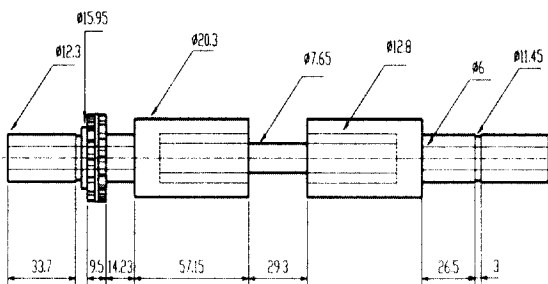


Fig. 3 Rotor configuration

소(전체 70자유도)로 모델링한 후, 경계 조건을 양단 자유로 고려하여, 고유치 해석을 수행하였다.

Fig. 4는 1차부터 4차까지의 횡방향 고유 모드를 구한 후, 각 진동 차수별로 가장 큰 절점의 횡변위를 1로 하여 고유 모드를 정규화한 것이다. 1차와 2차 고유 모드는 강체 모드였고, 수치 해석 결과 고유 진동수는 거의 0 [rad/s] 였다. 3차와 4차 고유 진동수는 각각 1145 [rad/s] 와 2398 [rad/s] 였다.

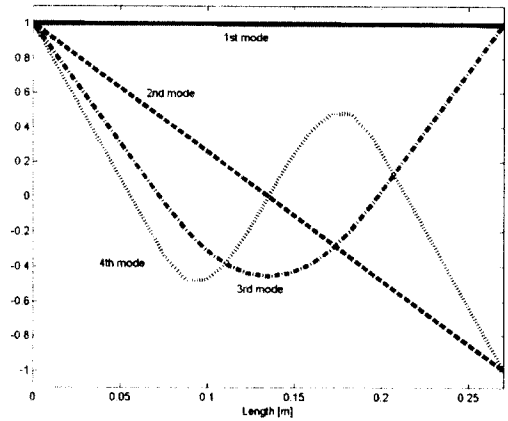


Fig. 4 Plot of the first four mode shapes of the free-free rotor system.

2.3.2 모드해석

본 연구에서는 탄성 로터계에 대하여 70개의 자유도를 갖는 것으로 모델링하여 고유치 해석을 수행하였다. 따라서, 70개의 진동형 벡터를 구할 수 있지만, 본 연구에서는 전체 운동에 지배적인 1차에서 4차까지의 저주파수 진동형 벡터만을 고려하였다. 1차에서 4차까지의 진동형 벡터로 구한 저차원화된 모드 질량 행렬 $\hat{\mathbf{M}}$ 과 강성 행렬 $\hat{\mathbf{K}}$ 는 각각 식(2.24)와 식(2.25)와 같다.

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 8.7749e-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.2586e-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0598e-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2125e-5 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3887e+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.9721e+1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

또한, 모드 해석을 통하여 구한 로터계에서 좌우

즉 센서 검출점에서의 변위 x_S^L, x_S^R 와 자기 베어링 지지점에서의 변위 x_B^L, x_B^R 는 식(2.26) 및 식(2.27)과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_S^L \\ x_S^R \end{bmatrix} = \Phi_S \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1.6900e-1 & -2.2050e-2 & -1.2803e-2 & 9.5357e-3 \\ -1.6900e-1 & 2.2050e-2 & -1.2803e-2 & -9.5357e-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} x_B^L \\ x_B^R \end{bmatrix} = \Phi_B \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1.6900e-1 & -1.8760e-2 & -9.1252e-3 & 5.9053e-3 \\ -1.6900e-1 & 1.8760e-2 & -9.1252e-3 & -5.9053e-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

그리고 저차원화된 모드 좌표계의 힘 함수 벡터 \mathbf{b} 도 식(2.28)과 같이 로터계 좌우측 베어링에서의 힘 벡터 $\{f_B^L, f_B^R\}^T$ 로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{b} = \Phi_B^T \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -1.6900e-1 & -1.6900e-1 \\ -1.8760e-2 & 1.8760e-2 \\ -9.1252e-3 & -9.1252e-3 \\ 5.9053e-3 & -5.9053e-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_B^L \\ f_B^R \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.4 주변 장치의 수학적 모델링

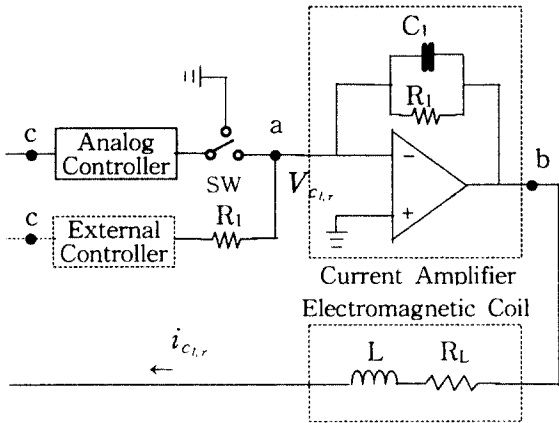


Fig. 5 Current amplifier and electromagnetic coil circuit

Fig. 5는 전류 증폭기 · 전자석 코일의 회로도로서, 전류 증폭기는 외부 제어기를 연결할 때에는 그 게인이 1이다. 전류 증폭기가 큰 대역폭을 가지며, 외부 제어기를 사용한다고 가정할 때, 증폭기 · 전자석 코일의 회로 방정식은 식(2.29)와 같이 주어진다.

$$\frac{di_C^{L,R}}{dt} = -\alpha_1 i_C^{L,R} + \alpha_2 V_C^{L,R} \quad (2.29)$$

여기서, $i_C^{L,R}$ 은 좌우측 전자석 코일에 흐르는 제어 전류이다. 또한, $\alpha_1 = R_L/L$, $\alpha_2 = 1/L$ 이며, R_L 과 L 은 각각 전자석 코일의 저항값과 유도 계수이다. 식(2.29)를 상태 · 공간 방정식으로 표현하면 식(2.30) 및 식(2.31)과 같이 된다.

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{z}_2 \quad (2.31)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{z}_2 = \{i_c^L, i_c^R\}^T \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{u}_2 = \{V_c^L, V_c^R\}^T \quad (2.35)$$

$$\mathbf{y}_2 = \{i_c^L, i_c^R\}^T \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

이다.

한편, 센서 검출점의 변위 벡터 \mathbf{x}_S 와 센서 전압 벡터 \mathbf{V}_S 사이의 관계는 식(2.38)로 주어진다.

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_S \quad (2.38)$$

여기서,

$$\mathbf{V}_S = \{V_S^L, V_S^R\}^T \quad (2.39)$$

$$\mathbf{x}_S = \{x_S^L, x_S^R\}^T \quad (2.40)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

이며, V_S^L, V_S^R 은 변환된 좌우측의 센서 전압, 그리고 h_1 및 \mathbf{H}_1 은 각각 센서의 변위-전압 계수와 그 벡터이다.

또한, 좌우의 자기 베어링 지지점에서의 변위 벡터 \mathbf{x}_B , 자기 베어링에 흐르는 제어 전류 벡터 \mathbf{i}_C , 그리고 자기 베어링에 의해 받는 힘 벡터 \mathbf{f}_B 사이의 관계는 식(2.42)로 주어진다.

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{K}_{p1}\mathbf{x}_B + \mathbf{K}_{p2}\mathbf{i}_C \quad (2.42)$$

여기서,

$$\mathbf{f}_B = \{f_B^L, f_B^R\}^T \quad (2.43)$$

$$\mathbf{x}_B = \{x_B^L, x_B^R\}^T \quad (2.44)$$

$$\mathbf{i}_C = \{i_C^L, i_C^R\}^T \quad (2.45)$$

$$\mathbf{K}_{p1} = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_{p2} = \begin{bmatrix} k_{p2} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

이다. 또한, $k_{p1} = \frac{4\eta c_b^2}{g_n^3}$, $k_{p2} = \frac{4\eta c_b}{g_n^2}$ 이며, η 는 흡입력 계수, c_b 는 바이어스 전류, g_n 은 공칭 공극이다.

2.5 전체 시스템의 상태공간 표현

탄성 로터의 저차원화된 상태 방정식인 식(2.19), 베어링 지지점에서의 변위에 관한 식(2.27), 저차원화된 베어링 지지점에서의 힘 함수 벡터인 식(2.28), 전류 증폭기·전자석 코일에 대한 상태 방정식인 식(2.30) 그리고 자기 베어링에 의해 받는 힘에 관한 식(2.42)를 조합한 상태 방정식은 식(2.48)과 같이 된다.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.48)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_B^T\mathbf{K}_{p1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_B) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_B^T\mathbf{K}_{p2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T\}^T = \{q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, i_C^L, i_C^R\}^T \quad (2.50)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \{V_C^L, V_C^R\}^T \quad (2.52)$$

이다. 또한, 탄성 로터의 저차원화된 출력 방정식인 식(2.22)와 계측 시스템의 출력식인 식(2.38)을 조합한 출력 방정식은 식(2.53)과 같이 된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} \quad (2.53)$$

여기서,

$$\mathbf{y} = \{V_S^L, V_S^R\}^T \quad (2.54)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{H}_1 \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_S \quad \mathbf{0}] \quad (2.55)$$

한편, 전체 시스템의 전달 함수 행렬은 식(2.56)과 같이 된다.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

3. 시뮬레이션 및 실험과의 비교 검토

3.1 주파수 응답 실험

Fig. 6은 이상의 수치 해석을 통하여 구한 제어기를 제외한 전체 시스템(이하 '플랜트'라고 한다)의 공칭 전달 함수 G_{11} 과 G_{12} 의 보드 선도이며, 본 연구 대상과 같이 좌우 대칭의 구조를 갖는 경우에는 $G_{22} = G_{11}$, $G_{21} = G_{12}$ 가 된다.

본 연구의 대상인 자기 베어링 시스템은 본질적으로 불안정계이므로 페루프 주파수 응답 실험을 행하였다.

Fig.7은 회전축의 수평방향 운동과 수직 방향 운동이 서로 연성되어 있지 않다고 가정할 때의 자기 베어링 제어 시스템의 블록 선도이다. 그림에서

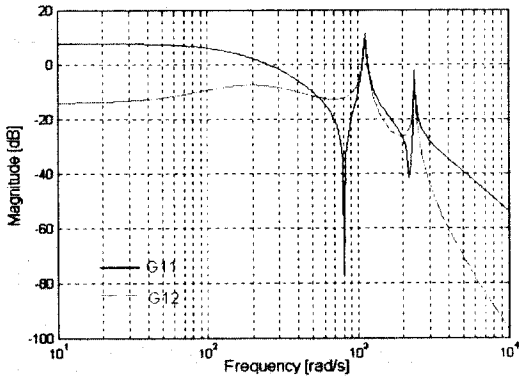


Fig. 6 Bode plots of G_{11} , G_{12}

u_1 , y_1 , C_1 은 각각 자기 베어링 좌측(또는 우측)의 제어 입력, 출력, 제어기 전달 함수이며, u_2 , y_2 , C_2 는 각각 그 반대편의 제어 입력, 출력, 제어기 전달 함수이다. 실험에서 C_1 은 그 값을 모르는 기 장착된 아날로그 제어기를 사용했으며, C_2 는 DSP를 이용한 외부의 디지털 제어기로서 게인이 2.0 인 비례 제어기를 사용하였다. 페루프 전달 함수, 제어기 전달 함수, 플랜트 전달 함수 사이의 관계는 선형 분수 변환에 의해 식(3.1)과 같이 표현된다.¹²⁾

$$T_{y_1 u_1} = G_{11} - G_{12} C_2 (1 + G_{22} C_2)^{-1} G_{21} \quad (3.1)$$

여기서, $T_{y_1 u_1}$ 은 입력 u_1 으로부터 출력 y_1 까지의 페루프 전달 함수이다.

한편, 입력 u_1 으로부터 출력 y_2 까지의 페루프 전달 함수 $T_{y_2 u_1}$ 은 식(3.2)와 같이 표현된다.

$$T_{y_2 u_1} = (1 + G_{22} C_2)^{-1} G_{21} \quad (3.2)$$

따라서, 식(3.1)은 식 (3.3)과 같이 표현된다.

$$T_{y_1 u_1} = G_{11} - G_{12} C_2 T_{y_2 u_1} \quad (3.3)$$

Fig. 8은 수치 해석을 통해 얻은 플랜트 전달 함수의 타당성을 검증하기 위해서 선형 분수 변환식에 이를 대입한 시뮬레이션 응답과 주파수 응답 실험 결과를 나타낸 그림이다.

이 그림으로부터 알 수 있듯이 저주파에서 고주파 쪽으로 두 번째 및 세 번째 나타나는 공진 주파수는 각각 1145 [rad/s]와 2395 [rad/s]로서, 각각 2장에서 수치 해석적으로 구한 3차와 4차 고유 진동수와 거의 일치하였다. 또한, 첫 번째 나타나는 공진은 선형 분수 변환식 식(3.1)의 우변 둘째 항에 의해 나타난 것으로 추정된다.

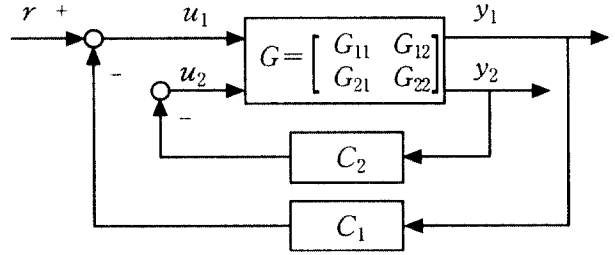


Fig. 7 Block diagram of the feedback control system for the magnetic bearing

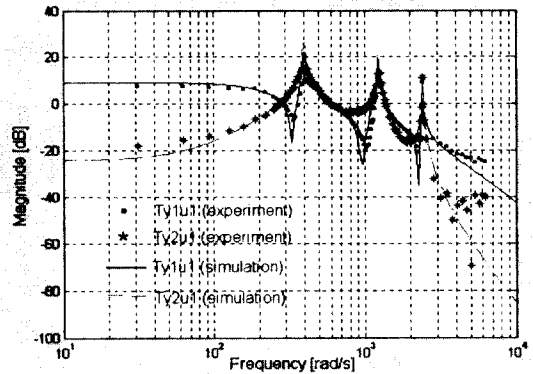


Fig. 8 Frequency response of y_1/u_1 and y_2/u_1

4. 결론

본 연구에서는 횡축형 자기 베어링 시스템의 탄성 로터에 대해 유한 요소법에 의한 수치 해석을 통하여 저차원화된 공칭 모델을 구하고, 구해진 모델에 대한 주파수 응답 시뮬레이션 결과와 페루프 주파수 응답 실험 결과를 비교 검토하였으며, 그 결과 두 결과가 거의 일치하였다.

향후 본 연구에서 구한 저차원화된 플랜트의 전달 함수를 기초로 저차원화 과정에서 발생된 모델링의 오차에 대해 로버스트한 외부 제어기를 설계하는 것이 앞으로의 과제가 될 것이다.

참고문헌

1. J. W. Beams, "Magnetic Suspension for Small Rotors", Rev. Sci. Inst. 21, 2. pp 182~184, 1950
2. 日本電氣學會, "磁氣浮上と磁氣軸受", コロナ社, pp. 13~14, 153~154, 1993
3. 田上, 丸山, "磁氣軸受超高速回轉機", 技報安川電氣, pp. 174~177, 1993
4. B. Y. Tsui, "The Effect of Instinct Magnetic Propertieess on Permanent Magnet Repusion", IEEE Trans. on Magnetic, MAG-8, 2., 1972
5. 吉川, 星野, 中島, "非線型性と速度項を考慮した磁氣軸受の有限要素法による磁界解析", 電氣學會全國大會, pp. 1647, 1988
6. R. G. Johnson, D. Pang, J. K. Anand, "Physical Modeling of High Speed Magnetic Bearing Systems", Proc. of the 3rd Int. Symp. on Magnetic Bearing, pp. 474~482, 1992
7. 김창화, 양주호, "선형행렬부등식을 이용한 자기 부상계의 강인성 제어", 한국동력기계공학회지, 제3권 제4호 pp. 79~85, 1999
8. 김창화, 정해종, 양주호, "극 배치영역을 고려한 자기 부상계의 로버스트 서보제어기 설계", 한국동력기계공학회지 제4권 제4호 pp. 84~91, 2000
9. 이동주, 홍준희, 박종권, "자기 베어링의 기초와 응용", 시그마프레스, pp. 129~130, 2001
10. 日本電氣學會, "磁氣浮上と磁氣軸受", コロナ社, pp. 176, 1993
11. D. J. Inman, "Engineering Vibration", Prentice Hall, pp. 412~419, 1996
12. 野波健藏, 西村秀和, 平田光男, "MATLABによる制御系設計", 東京電機大学出版局, pp. 145~146, 1999