

전달강성계수법과 부분구조합성법을 이용한 구조물의 진동해석

Vibration Analysis of Structures Using the Transfer Stiffness Coefficient Method and the Substructure Synthesis Method

최 명 수

Myung-Soo Choi

Key Words : Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Forced Vibration(강제진동), Substructure Synthesis Method(부분구조합성법), Frequency Response(주파수응답)

Abstract : The substructure synthesis method(SSM) is developed for overcoming disadvantages of the Finite Element Method(FEM). The concept of the SSM is as follows. After dividing a whole structure into several substructures, every substructures are analyzed by the FEM or experiment. The whole structure is analyzed by using connecting condition and the results of substructures. The concept of the transfer stiffness coefficient method(TSCM) is based on the transfer of the nodal stiffness coefficients which are related to force vectors and displacement vectors at each node of analytical model. The superiority of the TSCM to the FEM in the computation accuracy, cost and convenience was confirmed by the numerical computation results. In this paper, the author suggests an efficient vibration analysis method of structures by using the TSCM and the SSM. The trust and the validity of the present method is demonstrated through the numerical results for computation models.

1. 서 론

기계나 구조물의 정적·동적해석에서 현재 가장 폭넓게 사용되는 해석기법이 유한요소법¹⁾이다. 그러나 해석대상 계가 복잡하고 거대해질 경우, 또는 구조물의 동적 거동을 정확히 파악해야 할 경우에 유한요소법을 이용하면 해석대상 계의 모델링시에 분할수를 크게 늘여야 한다. 이는 전체 자유도를 증가시키므로, 궁극적으로 계산에 사용될 행렬의 크기가 급격히 커지게 된다. 그러므로 실제 수치 계산시에 컴퓨터상의 계산 시간이 크게 증가하고, 컴퓨터 메모리도 상당히 필요하므로 이를 퍼스널 컴퓨터에서 실행하기에는 곤란한 경우가 많다.²⁾

유한요소법의 취약점을 극복하기 위하여 제시된 방법 중의 하나가 부분구조합성법(substructure synthesis method)이다. 이는 해석대상 구조물인 전체(whole structure)를 단번에 직접 해석하는 것이 아니라 몇 개의 분계(substructure)로 나눠 분계별

로 해석한 후, 그 결과를 이용하여 전체를 해석하는 방법으로 전달함수합성법, 모드합성법, 특성행렬합성법이 있다.³⁾

동적 해석분야에서 사용되는 부분구조합성법 중에서 제일 먼저 개발된 방법이 전달함수합성법이다. 이 방법은 각 분계에 대한 전달함수를 각각 독립적으로 구해두고, 그 전달함수를 결합하여 전체의 전달함수를 계산한다. 따라서 유한요소법으로 전체를 단번에 계산하는 기존의 방법에 비해 퍼스널 컴퓨터로도 전체 자유도가 큰 대규모 구조물을 해석할 수 있다는 점, 그리고 실험과 해석적으로 구한 분계의 전달함수를 함께 동등하게 취급하여 전체의 동적 해석을 수행할 수 있다는 이점이 있다.⁴⁾

전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)은 해석 모델의 각 절점에서 힘벡터와 변위벡터의 관계인 절점강성계수행렬의 전달에 기본 개념을 두고 있다. 저자는 전달강성계수법을 직선형 구조물, 격자형 구조물, 평판형 구조물 등에 적용하여 그 신뢰성 및 유효성을 이미 제안한 바 있다.^{5, 8)}

본 연구에서는 전달강성계수법과 부분구조합성법의 장점을 접목하여 기계나 구조물의 진동을 해석

접수일 : 2001년 9월 1일

최명수 : 부경대학교 기계공학부

하는 새로운 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 전달강성계수법을 이용하여 분계의 전달함수를 구하는 과정, 3장에서는 전달함수합성법으로 전체의 전달함수를 구하는 과정을 설명하고, 4장에서는 간단한 계산모델에 대하여 수치 계산을 행한 후, 제안된 방법의 신뢰성 및 유효성을 확인한다.

2. 전달강성계수법에 의한 전달함수의 계산

2.1 모델링

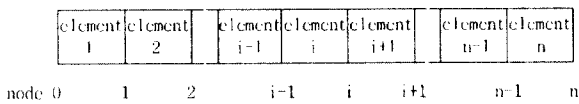


Fig. 1 Transfer system

해석대상 계(系)를 포인트요소(point element)와 필드요소(field element)로 분할하여 모델링한 후, Fig. 1과 같은 전달계(transfer system)로 재구성한다. 포인트요소란 부재(member)를 기초(base)로부터 支持하는 스프링과 같은 기초지지요소(base support element)가 해당되고, 필드요소는 축(shaft), 봉(rod) 그리고 보(beam)와 같은 부재요소가 해당된다. 그리고 조화외력은 포인트요소에 작용하는 것으로 한다.

본 연구에서 절점(node)이란 해석대상 계의 좌단(시작단)과 우단(끝단), 요소사이의 결합점 및 조화외력의 작용점과 같은 힘벡터의 불연속점 그리고 응답점이 해당되고, n개의 요소로 구성된 전달계인 경우에, 각 절점을 좌단에서 우단으로 순차적으로 절점 0, 절점 1, 절점 2, ..., 절점 n이라고 한다.

전달강성계수법은 다양한 경계조건을 기초지지요소, 즉 포인트요소로 모델링한다. 예를 들어, 경계조건이 자유인 경우에는 포인트요소의 기초지지 스프링의 스프링상수를 0, 고정인 경우에는 스프링상수를 수치상의 무한대에 해당하는 값을 대입하여 계산한다. 따라서 전달계에서 시작과 끝 요소는 경계조건을 모델링한 포인트요소 1과 n이 된다.

2.2 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 정의

전달계의 절점 i에서의 힘벡터(\mathbf{f}_i)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

여기서 \mathbf{S}_i 와 \mathbf{e}_i 를 각각 절점 i의 절점강성계수행렬(nodal stiffness coefficient matrix)과 힘보정벡터(force corrective vector)라고 정의하고, 앞으로 하첨자 i는 i번째 절점 또는 i번째 요소에 관한 물리량을 나타낸다.

2.3 포인트 전달식

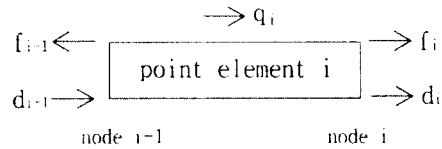


Fig. 2 Point element

Fig. 2와 같이 조화외력 \mathbf{q}_i 가 작용되는 포인트요소 i의 좌측(절점 i-1)과 우측(절점 i) 사이의 힘의 평형식과 변위벡터의 연속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{f}_{i-1} + \mathbf{P}_i \mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{q}_i \\ \mathbf{d}_i &= \mathbf{d}_{i-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서 행렬 \mathbf{P}_i 는 기초지지요소로 구성되는 포인트 강성행렬이다.

포인트요소 i 좌측의 정보(\mathbf{S}_{i-1} , \mathbf{e}_i)를 가지고 요소 우측의 정보(\mathbf{S}_i , \mathbf{e})를 알아내는 식을 포인트 전달식이라 하고, 식(2.1), (2.2)로부터 다음식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{P}_i \\ \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_{i-1} - \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

구조물 좌단의 경계조건을 포인트요소 1로 모델링하였으므로, 요소 1의 좌측인 절점 0는 해석적으로 자유로 간주한다. 따라서 힘벡터 \mathbf{f}_0 는 영벡터(null vector)가 된다. 그러므로 $i=1$ 과 식(2.1), (2.2)로부터 절점 1의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_1 과 힘보정벡터 \mathbf{e}_1 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{P}_i \\ \mathbf{e}_i &= -\mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.4 필드 전달식

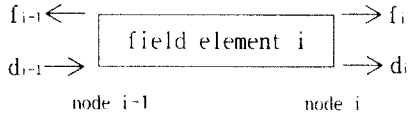


Fig. 3 Field element

Fig. 3과 같은 필드요소 i 의 좌측(절점 $i-1$)과 우측(절점 i)의 변위벡터와 힘벡터 사이의 관계는 필드요소의 모델링에 따라 필드 강성행렬이 결정되는데, 이산계 모델링인 경우는 靜剛性行列⁹⁾, 연속계 모델링인 경우에는 動剛性行列⁵⁾이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

필드요소 i 의 좌측의 정보(\mathbf{S}_{i-1} , \mathbf{e}_i)를 가지고 요소 우측의 정보(\mathbf{S}_i , \mathbf{e}_i)를 구하는 식을 필드 전달식이라 하고, 식(2.1), (2.5)로부터 다음식과 같이 되고,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i \\ \mathbf{e}_i &= -\mathbf{B}_i \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{e}_{i-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{D}_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

이다.

2.5 전달함수

식(2.4)를 시작으로, 필드전달식인 식(2.6)과 포인트전달식인 식(2.3)을 순차적으로 적용하면, 각 절점의 절점강성계수행렬과 힘보정벡터를 전달해 가면서 구할 수 있고, 최종적으로는 해석대상 계의 우단인 절점 n 의 \mathbf{S}_n , \mathbf{e}_n 을 구할 수 있다.

우단의 경계조건을 포인트요소 \mathbf{P}_n 으로 모델링하였으므로, 요소 n 의 우측인 절점 n 은 해석적으로 자유($\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_n \neq \mathbf{0}$)가 된다. 그러므로 식(2.1)의 i 에 n 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터 \mathbf{d}_n 을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_n = -\mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{e}_n \quad (2.8)$$

필드요소 i 좌측과 우측의 변위벡터 사이의 관계는 식(2.1)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과 식(2.5) 그리고 식(2.7)로부터 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{d}_{i-1} = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{e}_{i-1} \quad (2.9)$$

식(2.8)로부터 절점 n 의 변위벡터 \mathbf{d}_n 을 먼저 계산한 후, 절점 n 을 제외한 나머지 절점의 변위벡터는 필드요소인 경우 식(2.9), 포인트요소인 경우 식(2.2)의 변위벡터의 연속조건으로부터 우단에서 좌단 방향으로 순차적으로 모두 계산할 수 있다.

한편, 절점 b 에 조화외력을 가할 때, 절점 a 의 응답을 전달함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{G}_{ab} \mathbf{f}_b \quad (2.10)$$

여기서 \mathbf{G}_{ab} 는 절점 a 와 절점 b 사이의 전달함수를 뜻하고, 선형계에서는 맥스웰의 상반정리¹⁰⁾가 성립하므로 \mathbf{G}_{ba} 와 같게 된다. 따라서 전달강성계수법으로 전달함수를 구하려면, 절점당 자유도가 1인 해석 모델에서는 절점 b 에 크기가 1인 단위 조화외력을 가한 후, 절점 a 의 변위벡터를 계산한 결과가 바로 전달함수 \mathbf{G}_{ab} 가 된다. 해석 모델의 절점의 자유도가 2 이상인 경우에는, 절점 b 의 각 자유도별 단위 조화외력에 대한 계산 결과인 절점 a 의 변위벡터를 순서대로 구한 후, 행렬화함으로써 전달함수행렬을 구할 수 있다.

3. 부분구조합성법

본 장에서는 Fig. 4와 같이 전계를 2개의 분계로 분할하고, 그 중 한 분계의 점 a 에 가진을 할 때, 다른 한 분계의 점 d 에서 응답을 구하는 과정을 전달함수합성법으로 간단히 설명한다.

3.1 부분구조의 전달함수

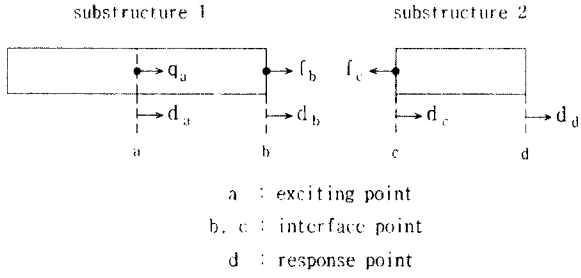


Fig. 4 Structural system composed of 2 substructures

Fig. 4의 분계 1에서 점 a에 작용하는 조화외력을 \mathbf{q}_a , 결합점 b에서 분계 2에 대한 분계 1에서의 작용력을 \mathbf{f}_b , 그리고 점 a, b의 변위를 \mathbf{d}_a , \mathbf{d}_b 라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_a &= \mathbf{G}_{aa} \mathbf{q}_a + \mathbf{G}_{ab} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{d}_b &= \mathbf{G}_{ba} \mathbf{q}_a + \mathbf{G}_{bb} \mathbf{f}_b \end{aligned} \quad (3.1)$$

분계 2의 결합점 c에서 분계 1에 대한 분계 2에서의 작용력을 \mathbf{f}_c , 그리고 점 c, d의 변위를 \mathbf{d}_c , \mathbf{d}_d 라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_c &= \mathbf{G}_{cc} (-\mathbf{f}_c) \\ \mathbf{d}_d &= \mathbf{G}_{dc} (-\mathbf{f}_c) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2 강결합의 경우

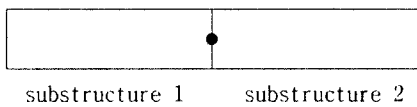


Fig. 5 Rigid interface of substructures

Fig. 5와 같이 결합점이 강결합인 경우에는 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &= \mathbf{f}_c \\ \mathbf{d}_b &= \mathbf{d}_c \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.1), (3.2), (3.3)을 이용하여 응답점의 변위

\mathbf{d}_d 와 가진점의 조화외력 \mathbf{q}_a 의 관계로 정리하면

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{G}_{dc} (\mathbf{G}_{cc} + \mathbf{G}_{bb})^{-1} \mathbf{G}_{ba} \mathbf{q}_a \quad (3.4)$$

가 되고, 식 (3.4)로부터 전체의 전달함수 \mathbf{G}_{da} 를 분계 1의 전달함수 \mathbf{G}_{ba} , \mathbf{G}_{bb} 와 분계 2의 전달함수 \mathbf{G}_{cc} , \mathbf{G}_{dc} 로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{G}_{da} = \mathbf{G}_{dc} (\mathbf{G}_{cc} + \mathbf{G}_{bb})^{-1} \mathbf{G}_{ba} \quad (3.5)$$

3.3 탄성결합의 경우

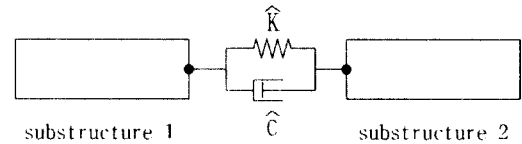


Fig. 6 Elastic interface of substructures

Fig. 6과 같이 결합점이 탄성결합인 경우에는 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &= \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_b &= \hat{\mathbf{P}} (\mathbf{d}_c - \mathbf{d}_b) \end{aligned} \quad (3.6)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{R}} + j\omega \hat{\mathbf{C}} \quad (3.7)$$

이고, $\hat{\mathbf{R}}$ 와 $\hat{\mathbf{C}}$ 는 탄성 결합부를 모델링한 강성행렬 및 감쇠행렬, ω 는 조화외력의 각진동수, 그리고 j 는 단위허수이다.

식(3.1), (3.2), (3.6)을 이용하여 응답점의 변위 \mathbf{d}_d 와 가진점의 조화외력 \mathbf{q}_a 의 관계로 정리하면

$$\mathbf{d}_d = \mathbf{G}_{dc} (\mathbf{G}_{cc} + \mathbf{G}_{bb} + \hat{\mathbf{P}}^{-1})^{-1} \mathbf{G}_{ba} \mathbf{q}_a \quad (3.8)$$

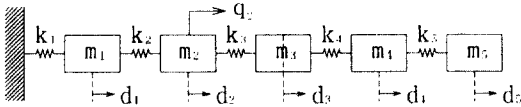
가 되고, 식 (3.8)로부터 전체의 전달함수 \mathbf{G}_{da} 를 분계 1, 2의 전달함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{G}_{da} = \mathbf{G}_{dc} (\mathbf{G}_{cc} + \mathbf{G}_{bb} + \hat{\mathbf{P}}^{-1})^{-1} \mathbf{G}_{ba} \quad (3.9)$$

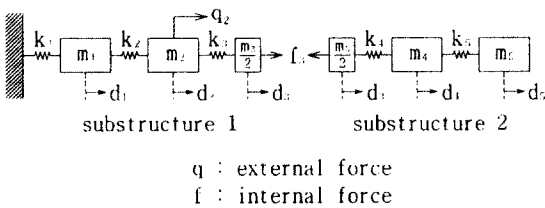
4. 계산 결과 및 검토

간단한 직선형 구조물을 해석대상으로 하여, 전달강성계수법으로 먼저 각 분계별 전달함수를 계산한 후, 부분구조합성법의 하나인 전달함수합성법으로 결합 조건에 따라 전체의 전달함수를 계산하였다.

4.1 강결합된 질량-스프링계



(a) Computation model I



(b) 2 substructures of computation model I

Fig. 7 Mass-spring system of 5 d.o.f.

Fig. 7(a)에 나타난 계산모델 I 은 전체가 5 자유도계인 질량-스프링계이고, Fig. 7(b)는 전체인 Fig.7(a)의 질량 m_3 를 기준으로 2개의 분계로 분할한 것이다. 질량은 각각 1 kg, 스프링상수는 10^5 N/m로 하고, 두 번째 질점에 조화외력을 주었을 때, 마지막 질점의 응답을 구하는 전달함수가 Fig. 8이다. Fig. 8에서 알 수 있듯이, 전체(Fig. 7(a))인 계산모델 I 을 기존의 전달강성계수법으로 계산한 결과(TSCM)와 전달강성계수법으로 분계별(Fig. 7(b)) 전달함수를 구한 후, 전달함수합성법으로 합성한 결과(Proposed method)가 잘 일치하였다.

4.2 강결합된 직선 보형 구조물

Fig. 9(a)의 계산모델II는 길이 2 m, 직경 0.03 m 인 원형 단면을 갖는 외팔보이다. 물성치는 종탄성계수가 206 GPa, 밀도가 7860 kg/m^3 , 구조감쇠계수가 0.01이다. Fig. 9(b)에서는 전체인 Fig.9(a)의 중앙점을 기준으로 전체를 2개의 분계로 분할하였고, 각 분계는 연속계로 모델링하였다.

계산모델II의 (a)점에 Y방향의 조화외력을 주었

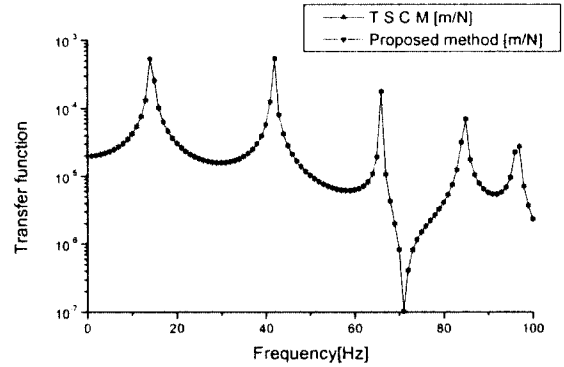
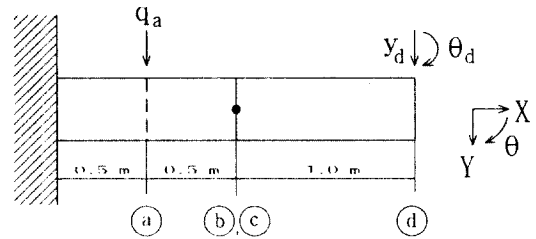
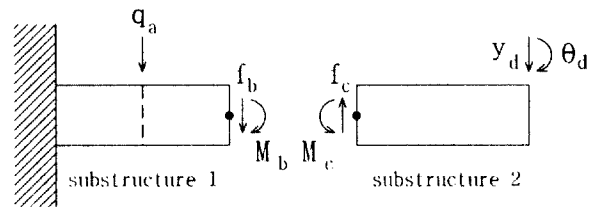


Fig. 8 Transfer function for model I



(a) Computation model II



(b) 2 substructures of computation model II

Fig. 9 Cantilever beam

을 때, (d)점의 Y방향과 θ 방향의 응답을 구하는 전달함수가 Fig. 10이다. Fig. 10에서도 제안된 방법에 의한 결과와 기존의 전달강성계수법의 결과가 잘 일치하였으므로, 제안된 방법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

전달함수를 합성하기 위하여, 먼저 분계별 전달함수를 계산할 필요가 있다. 전달강성계수법은 분계를 연속계로 모델링하여 정확히 계산할 수 있다. 그러나 유한요소법은 구조적으로 연속계 모델링을 이용할 수 없다. 따라서 유한요소법을 이용하는 기존의 전달함수합성법^{31) 41)}보다 본 논문에서 제안된 방법의 계산 정도면에서 우수하다.

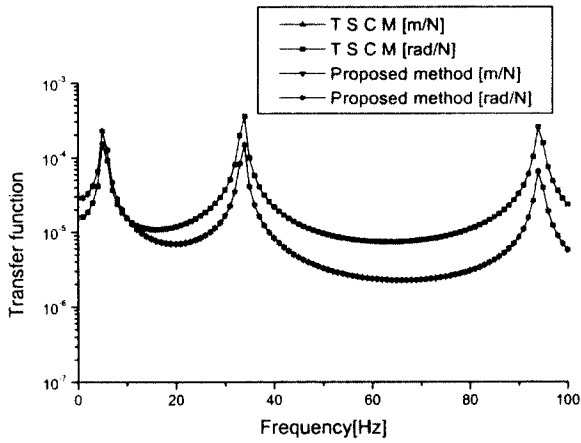


Fig. 10 Transfer function for model II

4.3 탄성결합된 직선 보형 구조물

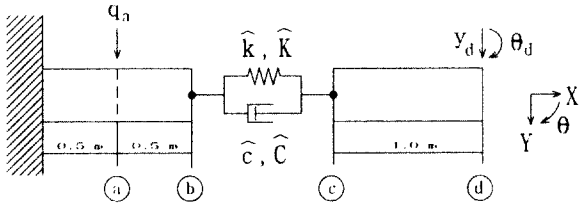


Fig. 11 Computation model III

Fig. 11에 나타난 계산모델III는 계산모델II의 두 부분계가 병진 및 회전방향의 스프링(\hat{k} , \hat{K})과 점성감쇠기(\hat{c} , \hat{C})로 탄성 연결된 직선 보형 구조물로써, 각 보 요소의 물성치는 계산모델II와 동일하다.

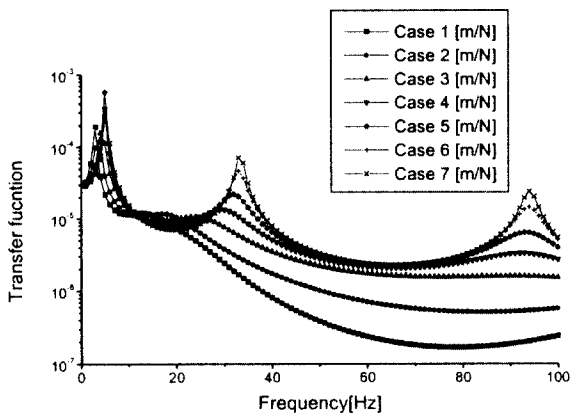


Fig. 12 Transfer function for model III

Fig. 12는 Fig. 11의 (a)점에 Y방향의 조화외력을 주었을 때, (d)점의 Y방향의 응답을 구하는 전달함수를 Table 1의 각 연결조건에 따라 계산한 결과이다.

Table 1과 같은 다양한 탄성 연결조건에 따라 계산모델III의 주파수응답을 본 논문에서 제안한 방법으로 계산한 결과와 계산모델III를 전계로 모델링하여 기존의 전달강성계수법으로 주파수응답을 계산한 결과가 완전히 일치하였다.

Table 1 Various connecting conditions of sub-structures in computation model III

Case	\hat{k} [N/m]	\hat{K} [Nm/rad]	\hat{c} [Ns/m]	\hat{C} [Nms/rad]
1	1.0e4	1.0e3	1.0e2	1.0e1
2	2.0e4	2.0e3	2.0e2	2.0e1
3	5.0e4	5.0e3	5.0e2	5.0e1
4	1.0e5	1.0e4	1.0e3	1.0e2
5	2.0e5	2.0e4	2.0e3	2.0e2
6	5.0e5	5.0e4	5.0e3	5.0e2
7	1.0e6	1.0e5	1.0e4	1.0e3

기계나 구조물의 중간 연결부의 설계를 위하여 연결부의 변화에 따른 동특성을 해석할 경우, 다양한 탄성 연결조건마다 전계를 단번에 해석하기보다는 본 논문에서 제시한 바와 같이 분계를 먼저 해석한 후, 합성하는 것이 효과적이다.

그리고 본 해석기법의 신뢰성을 확인하기 위하여, 탄성결합부의 스프링상수와 감쇠계수의 값에 모두 10^{20} 을 대입하여 계산했을 때, 그 결과가 Fig. 10과 완전히 일치하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 전달강성계수법과 부분구조합성법의 장점을 취하여 기계나 구조물의 진동을 해석하는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘은 절점강성계수의 전달에 기본 개념을 두고 있고, 연속계 모델링을 이용할 수 있는 전달강성계수법을 이용하여 분계의 전달함수를 먼저 구하고, 분계의 연결 조건에 따라 부분구조합성법으로 전계의 전달함수를 구하는 방법이다.

직선형 구조물에 대하여 수치 계산을 행한 결과, 제안된 방법의 신뢰성을 확인할 수 있었고, 특히 기계나 구조물의 중간 연결부 설계시에 효과적인 해석기법임을 알 수 있었다.

추후로는 실험을 기반으로 구한 전달함수와 전달강성계수법으로 연속계로 모델링하여 계산한 정확

한 전달함수를 합성하여 전체의 동특성을 해석하는 연구를 수행할 계획이다. 그리고 본 연구의 결과를 활용하는 측면에서 기계나 구조물의 동정(identification)에 관한 연구도 수행할 예정이다.

참고문헌

1. Daryl L. Logan, "A First Course in the Finite Element Method (2nd edition)", PWS Publishing Company, Boston, 1993
2. N. S. Sehmi, "Large Order Structural Eigenanalysis techniques Algorithm for Finite Element Systems", Ellis Horwood, New York, pp. 9~13, 1989
3. 長松昭男, 大態政明, "部分構造合成法", 培風館, 東京, 1991
4. 정재훈, "부분구조합성법을 이용한 판의 모우드 해석", 연세대학교 석사학위논문, 서울, 1991
5. D. H. Moon and M. S. Choi, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient," Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725~736, 2000
6. 문덕홍, 최명수, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석", 대한기계학회 논문집 A권, 제23권, 제2호, pp. 344~356, 1999
7. 문덕홍, 최명수, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제5호, pp. 945~956, 1998
8. 문덕홍, 최명수, "전달강성계수법과 유한요소법의 조합에 의한 사각평판의 자유진동해석", 한국소음진동공학회 1998년도 춘계학술대회 논문집, pp. 353~358, 1998
9. S. S. Rao, "Mechanical Vibration", Addison-Wesley Publishing, California, pp. 725~759, 1995
10. J. W. Tedesco, W. G. Mcdougal and C. A. Ross, "Structural Dynamics", Addison-Wesley Longman Inc., California, pp. 238, 1999