

# 경계요소법을 이용한 유압 액츄에이터 실린더의 응력해석

## Analysis of the Stresses for Hydraulic Actuator Cylinders using Boundary Element Method

김 옥 삼

O. S. Kim

**Key Words** : Boundary Element Method(경계요소법), Hydraulic Actuator Cylinder(유압 액츄에이터 실린더), Stress Analysis(응력해석), Axisymmetric Problem(축대칭 문제)

**Abstract** : The stress distributions of hydraulic actuator cylinder tube acting in uniform inner pressure were analysed by the boundary element method(BEM). STKM13C tube was utilized for machine structural purposes model, its inner radius was 100 mm and outer radius was 140 mm. Axial length was semi-infinite and the isoparametric element of BEM was used. Radial and tangential stresses are maximum(-20.3 MPa and 52 MPa) at the inner radius and the minimum at the outer radius of the hydraulic actuator cylinders for an industrial systems. Stress diminution ratio was about 0.6 MPa/mm. And then coincidence between the simulation techniques as exact results(Lame' equation) and finite element method(FEM) is found to be fairly good, showing that the proposed analysis by BEM is reliable.

### 1: 서 론

화학제품 생산공장에서 사용하는 적하용 유압 액츄에이터 실린더는 용도가 다양한 만큼 내경, 길이 및 사용압력이 상이하서 설계 및 제작공정에서 양산체계를 갖추기 곤란하다. 그러므로 작동조건과 위치에 따른 응력분포 및 구배분석, 응력거동 변화를 해석하기 위해 시뮬레이션 기법<sup>1)</sup>을 활용하는 것이 바람직하다. 액츄에이터 실린더와 같은 원통형 축대칭형상 구조물의 응력해석에 유한요소법(finite element method, FEM)<sup>2)</sup>이나 경계요소법(boundary element method, BEM)<sup>3,4)</sup> 등의 수치해석이 널리 사용되고 있다. 그 가운데 새롭게 주목받고 있는 BEM은 다양한 하중조건에 적용력이 뛰어나며, 이방성 물질의 모델링도 용이하다. 또한 특정부위의 요소크기를 자유롭게 선택할 수도 있고 경계를 따라 요소(element) 및 절점(node)을 분할하여 내부 절점의 해를 구할 때 좌표만 부여하는 간편한 특징<sup>5)</sup>이 있다. 이와 같은 장점 때문에

Kermandis<sup>6)</sup>와 Mayr<sup>7)</sup>는 축대칭 문제에 경계 적분 방정식(boundary integral equation, BIE)을 축대칭 커널(kernel)과 켈빈(Kelvin) 해를 이용하여 표면경로에 따라 적분하는 방법을 시도하였다. Lachat<sup>8)</sup> 등은 BIE를 체계화하였고, 적분변환 방법을 이용하여 커널을 구하는 방법과 단일성(singularity) 적분공식을 완성<sup>9)</sup>하였다.

본 연구에서는 여천산단 화학제품 생산라인의 적하용 유압 액츄에이터 실린더에 균일한 작동압력이 내압하중으로 작용할 때, 실린더 튜브에 발생하는 반경방향과 접선방향 응력거동 변화를 다양한 해석방법으로 규명하고자 한다. 아울러 BEM의 단일절점(single node)와 이중절점(double node) 및 단일함수식(single exponential formula)과 이중함수식(double exponential formula)을 사용한 해석결과를 라메방정식의 엄밀해(exact solution)와 FEM의 해석결과와 비교·검토하여 BEM결과의 타당성을 평가하고 보다 정확한 BEM 해석코드 개발을 목적으로 하고 있다.

접수일 : 2000년 6월 29일

김옥삼 : 여수대학교 기계·자동차공학부

## 2. BEM의 정식화

### 2.1 엄밀해

실린더와 같은 축대칭 물체에 내측으로 부터 원주면에 균일하게 압력  $p_i$ 가 작용하고 실린더 상하가 하중으로 부터 자유롭다면, 접선방향 응력(tangential stress,  $\sigma_t$ )과 반경방향 응력(radius stress,  $\sigma_r$ )이 발생한다. 후벽실린더의 경우  $\sigma_t$ 의 응력은 관벽 두께에 균일하게 분포하지 않는다. 따라서 균일한 내압을 받고 있는 실린더의 반경방향 응력과 접선방향 응력은 다음식과 같다.

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2)$$

여기서  $p_i$ 는 내부 압력이고,  $a$ 는 내경,  $b$ 는 외경, 그리고  $r$ 은 반경이다.

### 2.2 경계 적분방정식

Fig. 1과 같은 축대칭 문제에서 물체력을 무시하고, 델타함수(delta function)성질을 이용하면 해석 영역 내부점  $p$ 에 대한 적분방정식<sup>(6)</sup>은 다음의

$$U_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(p, Q) U_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(p, Q) T_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (3)$$

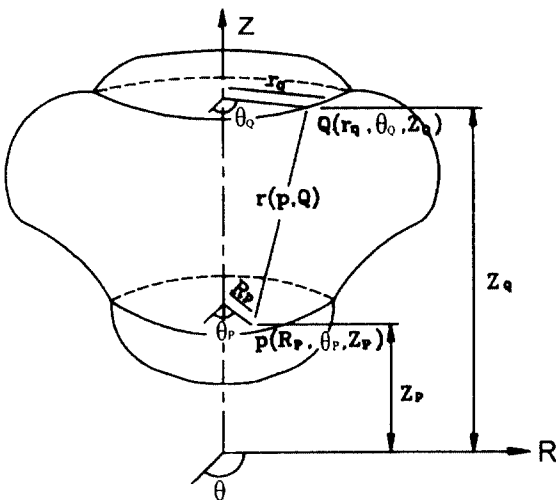


Fig. 1 An axisymmetric solution for BIE

식과 같이 성립하는 것을 알 수 있고

$$U_i(p) = \int_S U_{ij}^*(p, Q) T_j(Q) dS(Q) - \int_S T_{ij}^*(p, Q) U_j(Q) dS(Q) \quad (4)$$

식으로 변환된다. 아울러 경계적분식의 표면경로  $dS(Q)$ 를  $r_Q \cdot d\theta_Q \cdot d\Gamma(Q)$ 로 치환하면 다음의

$$U_i(p) = 2\pi \left[ \int_{\Gamma} U_{ij}^*(p, Q) T_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(p, Q) U_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) \right] \quad (5)$$

식과 같이 얻어지는데 여기서  $U_i$ 는 영역  $\Omega$ 내 임의점의 변위벡터 성분,  $\Gamma$ 는 경계,  $T_{ij}^*$ 는 표면력 커널,  $r$ 은 반경, 그리고  $(p, Q)$ 은 좌표점을 의미한다. 전체영역에 대한 경계 적분방정식을 구하기 위하여 (5)식의 각 항들을 내부점  $p$ 에서 경계점  $P$ 로 접근시키면, (6)식과 같은 경계 적분방정식이 성립하며 좌표변환 행렬  $C_{ij}(P)$ 는 (7)식과 같다.

$$C_{ij}(P) U_i(p) = 2\pi \left[ \int_{\Gamma} U_{ij}^*(P, Q) T_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q) U_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) \right] \quad (6)$$

$$C_{ij}(P) = \left\{ \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q) r_Q d\Gamma(Q) \right\} \quad (7)$$

이때  $\delta_{ij}$ 는 미소 변형성분이다.

### 2.3 변위 및 표면력 커널의 유도

지배방정식인 Navier방정식<sup>(7)</sup>은 다음의

$$\nabla^2 U_i + \frac{1}{1-2\nu} U_{i,jj} = -\frac{1}{\mu} f_i \quad (8)$$

식과 같고, 원통좌표계로 나타내면 아래와 같이

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) U_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} f_r \quad (9)$$

$$\nabla^2 U_r - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} f_z \quad (10)$$

식이다. 여기서  $e$ 는 연산자,  $f_i$ 는 물체력 그리고  $\nu$ 는 포아송비 이다. 따라서 작용하중을 단위 환형 형태로 고려했으므로 변위커널은 다음

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U_{rr}^* & U_{rz}^* \\ U_{zr}^* & U_{zz}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_r \\ P_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

식과 같이 성분들을 분리할 수 있다.

### 2.3 이산형(離散形) 경계 적분방정식

경계내부의 응력은 내부점  $p$ 에서 후크(Hooke)의 법칙을 이용하여 각 요소와 절점에서 구한다. 경계에 대한 계산은 경로  $\Gamma$ 를 임의의 요소와 절점으로 분할하여 수치적분한다. 경계에 대한 적분방정식은 각 변수를 전체 좌표계(global coordinate system)에서 국부 좌표계(local coordinate system)로 변환시키고, 가우스(Gauss)적분<sup>8)</sup>하면 이산형 경계 적분방정식은 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} C_{ij}(P) U_j(P) &= 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{\xi=-1}^1 \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(P, Q) \\ &\quad N_i(\xi) r_Q(\xi) J(\xi) d\xi \cdot T_j \\ &\quad - 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{\xi=-1}^1 \int_{-1}^{+1} T_{ij}^*(P, Q) \\ &\quad N_i(\xi) r_Q(\xi) J(\xi) d\xi \cdot U_j \end{aligned} \quad (12)$$

$N_i(\xi)$ 는 형상함수,  $J(\xi)$ 는 Bessel 함수이다. 각 절점에 대한 경계 적분방정식을 전체 절점으로 치환하면 선형대수 방정식은

$$[A]\{U\} = [B]\{T\} \quad (13)$$

식과 같고, 여기서  $[A]$ 는 계수 대각선행에 기여하는 좌표계수  $C_{ij}$ 를 포함한다. 또한  $\{U\}$ 는 내부에너지 행렬,  $[B]$ 는 작동 하중행렬 그리고  $\{T\}$ 는 변환행렬을 의미한다. 2차원 이상의 요소를 사용하는 경우, 트랙션(traction)의 불연속성이나 경계조건의 불일치성으로 발생하므로 이중절점 개념을 도입하는 것이 바람직하다. 축대칭 실린더는 좌표값을 갖는 두개의 경계절점으로 구성되므로 요소의 연결성을  $k=j$  로서 나타냈다. 이때 두 절점에서 변위는 동일하기 때문에 각 방향에서  $j$ 절점의 트랙션과  $k$ 절점의 변위(또는 반대의 경우)의 경계조건 조합이 일치되어야만 한다. 또한 이중지수형 적분

법(double exponential formula)을 적용하는 경우  $-1 \leq \eta \leq 1$  구간에서 적분가능한 물체력 함수  $f(\eta)$ 를 고려하면, Fig. 2와 같이 구간내에서는 없으나  $|\eta| = 1$  구간에서 (14)식과 같이 특이점이 존재한다.

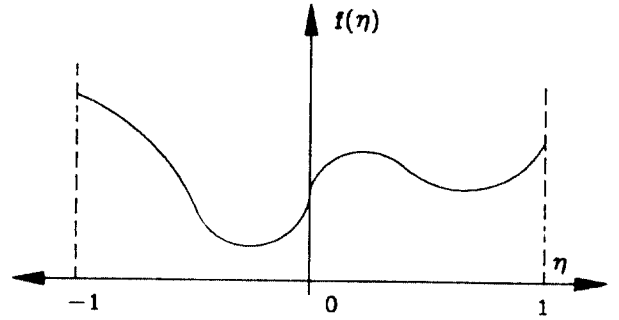


Fig. 2 Particular function  $f(\eta)$  with singular value at the end point

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (14)$$

(14)식을  $m$ 점까지 가우스적분 한다면 다음의

$$I = \sum_{i=1}^m W_i f(\eta_i) \quad (15)$$

식과 같다. 변수 ( $\eta$ )를 이중지수형 함수(double exponential function)로 치환<sup>9)</sup>하면 아래와 같이

$$\eta = \tanh\left\{\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right\} \quad (16)$$

식이 된다. 따라서 특이점 함수식(14)는

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f\left[\tanh\left\{\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right\}\right] \frac{\pi}{2} A(t) dt \quad (17)$$

식과 같고, 여기서 수렴도 결정함수  $A(t)$ 는

$$A(t) = \frac{\cosh(t)}{\cosh^2\left\{\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right\}} \quad (18)$$

식이다. 따라서 윗식은  $\pm\infty$ 의 구간에서 계산불능 상태가 되어 분가능 범위  $t = \pm 2.5$ 로 축소시켜야

한다. 이 방법의 장점은  $|\eta| = 1$ 일때  $A(t) \rightarrow 0$ 로 빨리 수렴하여 오차의 누적을 방지할 수 있다는 것이다. 그러나  $|\eta \cdot h| = 1 \leq 2.5$ 일 경우  $h = 0.01$ 인 경우, 500회 정도의 추가계산이 요구되어 정확도는 향상되지만 계산 소요시간이 증대한다.

### 3. 모델설정 및 해석과정

해석모델 설정은 균등한 내압( $250 \text{ kgf/cm}^2$ )을 받는 유압 액츄에이터의 실린더를 Fig. 3과 같이 구성하여 축대칭 문제로 설정하였다. 외압 작용은 배제하고, 내압만을 받고 있는 액츄에이터 실린더의 응력거동을 해석하였다. Fig. 4와 같이 전체 요소수(No. of elements)와 절점수(No. of nodal points)를 각각 26개씩으로 설정하고, Fig. 5와 같이 프로그램의 주 흐름도(main flow chart)를 구성하였다.

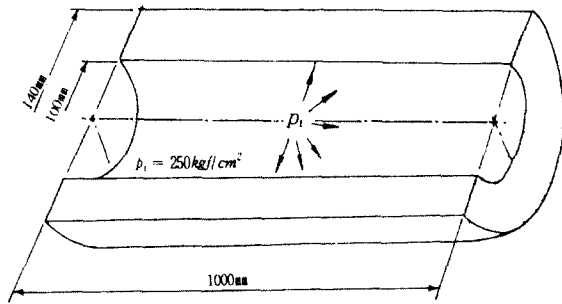


Fig. 3 Model of hydraulic actuator cylinder

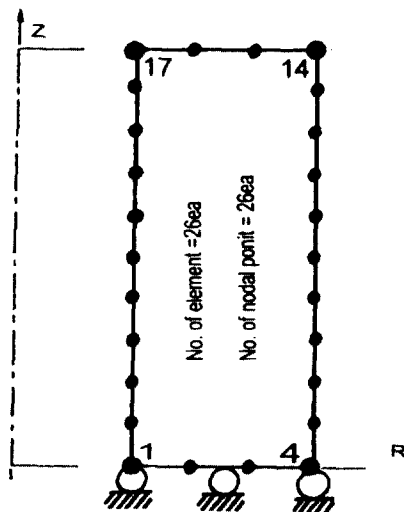


Fig. 4 Mesh generation for BEM model of actuator cylinder

축대칭 문제의 응력해석을 위해 2차요소의 형상 함수(shape function)를 이용하였고, 해석 결과의 타당성을 입증을 위하여 엄밀해인 라메방정식과 FEM 결과와 상호 비교·검토하였다.

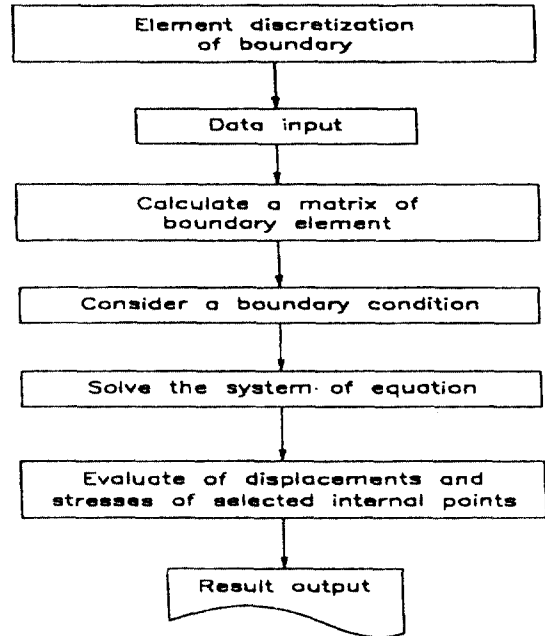


Fig. 5 Main flow chart of stresses for actuator cylinder by BEM

### 4. 해석결과 및 고찰

재료로 선정된 기계구조용 탄소강관 (STKM 13 C, KSD3517)은 항복응력  $605 \text{ MPa}$ , 종탄성계수  $206 \text{ GPa}$  및 포아송 비(Poisson's ratio) 0.3의 기계적 물성치를 보유하고 있다. 내경  $100 \text{ mm}$ , 외경  $140 \text{ mm}$ , 반무한 길이와 6 S이하의 표면거칠기의 정밀도를 유지하도록 보링(boring) 가공한 액츄에이터 실린더에 응력거동 해석결과를 도출하였다.

Fig. 6은 단일절점에 의한 반경방향 응력( $\sigma_r$ )의 해석결과로서  $r=100 \text{ mm}$ 위치에서  $24.5 \text{ MPa}$ 의 압축응력을 나타내고, 반경이 증가함에 따라 점차 소멸되어  $r=140 \text{ mm}$ 위치에서는 zero로 수렴되고 있다. 다만 직경  $115 \text{ mm}$ 위치에서 엄밀해 및 BEM의 결과가 FEM 및 엄밀해의 결과와  $2 \text{ MPa}$ 정도의 편차를 나타내고 있는데, 이것은 BEM의 해석과정에서 수렴오차의 누적이 의한 영향으로 사료되며, 차후 수렴도 결정함수  $A(t)$ 의 최적화를 통하여 보완할 수 있을 것이다.

반경이 증가에 따른 접선방향 응력( $\sigma_t$ )을 다양한

해석기법의 결과로 나타낸 것이 Fig. 7이다. FEM과 엄밀해의 해석결과는,  $r=100mm$  위치에서 최대  $52MPa$ 의 인장응력으로서 거의 비슷하지만 BEM의 결과는  $2MPa$ 정도 더 크게 발생하고 있다. 그 이유는  $r=100mm$  위치의 실린더 내면에서 경계적분식 트랙션 벡터의 불연속성이 해의 안정성에 영향을 미친 것으로 사료된다. 그리고  $r=120mm$  이후 근사적으로 진행하였고  $r=140mm$  위치에서 비슷한 값

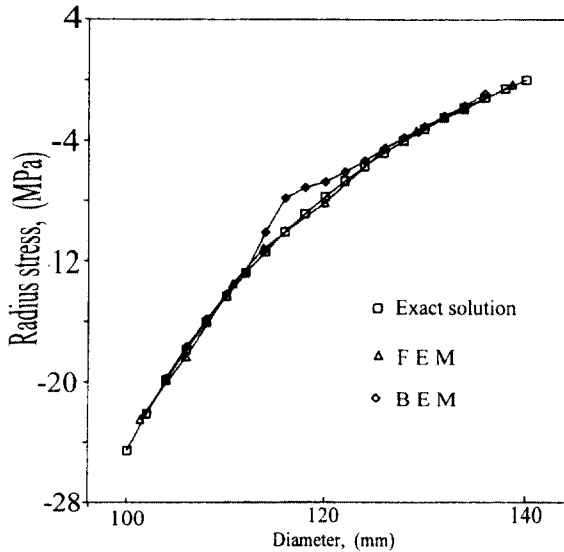


Fig. 6 Radius stress( $\sigma_r$ ) in axisymmetric problem calculated by single node and single exponential formula

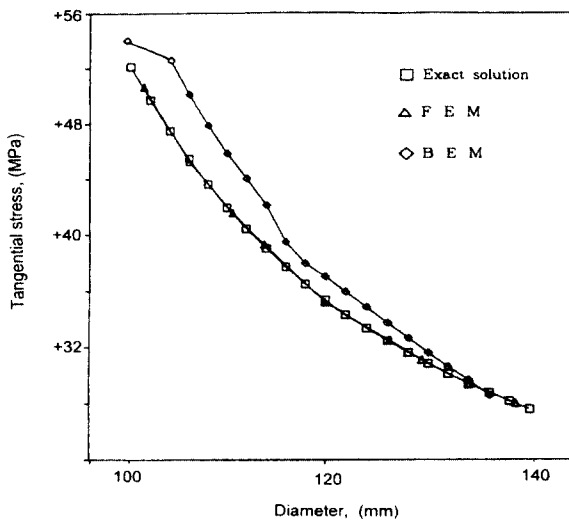


Fig. 7 Tangential stress( $\sigma_t$ ) in axisymmetric problem calculated by single node and single exponential formula

으로 수렴되고 있다. Fig. 6과 Fig. 7의 두 그림은 단일절점과 단일함수식을 이용하였으므로 부분적으로 해의 불안정성이 표출되었다.

반경방향 응력( $\sigma_r$ )에 대해 BEM 이중절점과 이중함수식의 해석결과를 Fig. 8에 도시하였다. 종합적으로 고찰하면 반경방향 응력은 최대  $24.6MPa$  정도의 압축응력으로 작용하며, 반경이 증가함에 따라  $r=140mm$  위치에서는 zero에 수렴하는 것은 단일절점이나 이중절점을 이용한 해석결과가 모두 비슷한 양상이다. 다만 직경  $115mm$ 에서 해의 편차는 Fig. 6에서 단일절점보다 이중절점을 사용하는 경우가 오차범위를 감소시켜 해의 신뢰성을 제고할 수 있었다. 그러므로 BEM의 계산결과 정확도를 높이기 위한 구체적인 방법으로 해석경계 내부점에서 경계까지의 거리  $r$ 이 해당요소 길이 내에 있을 때, 단일함수식보다는 이중함수식을 사용하는 것이 BEM 프로그램 코드 개발시 해의 정확성 제고에 효과적인 방안으로 사료된다.

Fig. 9는 접선방향 응력( $\sigma_t$ )에 대하여 엄밀해, FEM 및 이중절점에 의한 BEM 해석결과가 일치하고 있음을 나타냈다. 이 그림은 접선방향 응력이 최대  $52MPa$ , 최소  $28MPa$  인장응력이 해석 영역 내에 분포하고 있어  $0.6MPa/mm$ 의 응력구배를 보여주고 있다. 이 결과로 미루어 볼 때 축대칭의 문제를 해석할 경우, 이중절점과 이중함수식을 이용한 해석결과가 보다 안정적으로 신뢰성을 확보할 수 있을 것으로 사료된다.

## 5. 결론

화학제품 생산라인에 사용하는 적하용 유압 액추에이터 실린더의 응력분포를 엄밀해와 FEM 및 BEM 해석결과와 비교·검토하였다. 아울러 BEM의 단일절점과 단일함수 및 이중절점과 이중함수식을 이용한 해석한 결과로부터 다음과 같은 중요사항들을 얻을 수 있었다.

첫째, 반경방향의 응력은 최대  $24.5MPa$  정도의 압축응력, 접선방향의 응력은 최대  $52MPa$  정도의 인장응력으로 작용하였으나 전반적으로 STKM 13 C의 항복강도를 초과하지 않으므로 내압 작용하중  $250kgf/cm^2$  에는 파손의 위험성이 없다.

둘째, BEM의 단일절점 및 단일함수식으로 해석

후 기

본 연구는 과학기술부·한국과학재단 지정 여  
수대학교 설비자동화 및 정보시스템 연구개발센  
터의 지원에 의한 것이다.

참고문헌

1. A. C. Scordelis and K. S. Lo, "Computer analysis of cylindrical Shells", J. Am. Concr. Inst., 61, pp. 539~561, 1968
2. T. A. Cruse, "Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics", Int. J. Solid Struct., Vol. 5, pp. 1259~1274, 1969
3. T. Higashimashi et al., "Interactive Structural Analysis System using the Advanced Boundary Element Method", Proce. of the 5th Inter. Confer., Boundary Elements, pp. 847~856, 1983
4. T. A. Cruse, "An Improved Boundary Integral Equation Method for 3-Dimensional Elastic Stress Analysis", Com. and Struct., Vol. 4, pp. 741~754, 1974
5. 木原諄二, 相澤龍彦, "境界要素法の二次元弾性問題への應用", 鐵と鋼, 第6號, pp. 720~725, 1981
6. T. Kermandis, "A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems", Int. J. Solid Struct., Vol. 11, pp. 493~500, 1975
7. M. Mayr, "The Numerical Solution of Axisymmetric Elasticity Problems using an Integral Equation Approach", Mech. Res. Comm., Vol. 3, pp. 393~398, 1976
8. J. C. Lachat and J. O. Watson, "A Second Generation Boundary Integral Equation Program for Three Dimensional Elastic Analysis in Boundary Integal Equation Method", Computational Application in Applied Mechanics, Amd. Vol. 11, ASME, pp. 248~256, 1975
9. A. A. Bakr and R. T. Fenner, "Use of the Hankel Transform in Boundary Integral Methods for Axisymmetric Problems", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 19, pp. 1765~1769, 1983

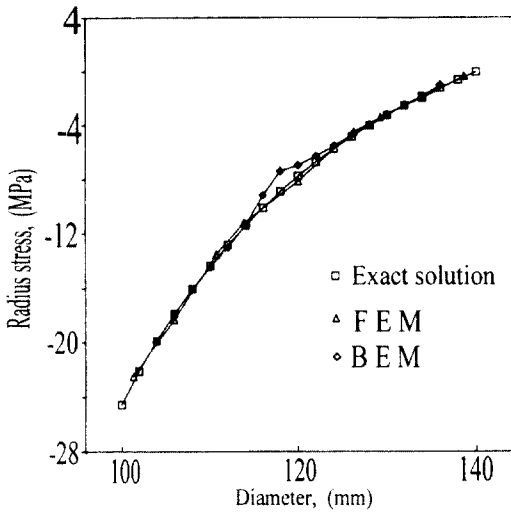


Fig. 8 Radius stress( $\sigma_r$ ) in axisymmetric problem calculated by double node and double exponential formula

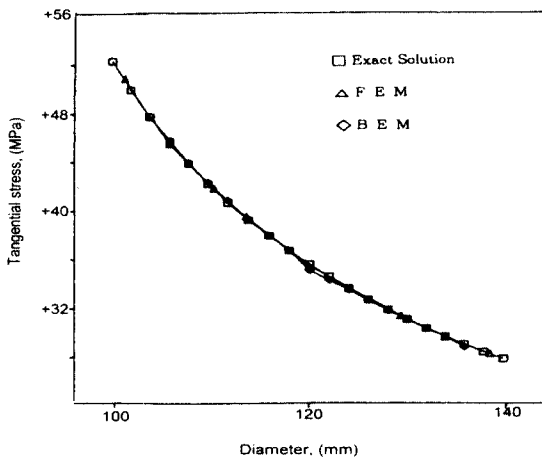


Fig. 9 Tangential stress( $\sigma_t$ ) in axisymmetric problem calculated by double node and double exponential formula

한 결과, 원주방향 115 mm 부근에서 다소의 오차가 발생되었지만 이중절점과 이중함수식의 해석결과는 엄밀해나 FEM의 결과와 비교적 일치하였다.

마지막으로 유압 액추에이터 실린더 튜브와 같은 원통형의 형상을 가진 구조물의 응력거동 변화에 대한 BEM 해석결과의 타당성이 입증되었고, 향후 이중절점과 이중함수식을 이용하여 해의 정확성을 제고시키는 후속 연구 및 BEM 프로그램 코드 개발이 필요하다.