Jour. Korean Earth Science Society, v. 22, no. 5, p. 423–426, October 2001

# 점성-충돌 강착원반의 안정과 각운동량

유 계 화*

이화여자대학교 사범대학 과학교육과, 120-750 서울특별시 서대문구 대현동 11-1

# Stability and Angular Momentum of Accretion Disk with Viscosity-Collisions

**Kye-Wha Yoo***

Department of Science Education, Ewha Womans University 11-1 Daehyun-dong, Seodaemun-gu, Seoul, 120-750, Korea

**Abstract:** The accretion disk with viscosity including collisions is examined. The diffusion process are also considered for a given mass distribution in the disk. Under such a circumstance the diffusion coefficient is simply proportional to $1/\sqrt{r}$. The disk rapidly transfers the turbulent angular momentum and the wave front toward the outer cold regions. Then an instability situation occurs in the disk.

Key words: Disk-viscosity · collisions, turbulence, instability

**요 약:** 점성과 충돌이 있는 강착원반의 확산 과정을 생각한다. 이때 확산계수는 단순하게 $1/\sqrt{r}$로 비례한다. 강착원반의 난류에 의해서 각운동량은 외부로 수송된다. 파동도 또한 내부에서 외부로 전달되므로 강착원반은 불안정한 방향으로 진행된다.

주요어: 강착원반-점성 · 충돌, 난류, 불안정성

## 서 론

Shakura and Sunyaev(1973)에 의해 강착원반 점성 모형이 제시된 이후 쌍성에서 형성된 강착원반 기체들의 점성으로 별의 폭발현상(Duschl, 1983), X선(Ulrich and Molendi, 1995), jet(Solf, 1987) 등을 설명하려는 시도가 꾸준히 계속되어 왔다. 또한 이 모형을 이용하여 다른 계 즉 원시별, 은하원반 등에서도 원반 그 자체나 원반 내의 현상 등을 설명하고자 노력하고 있다.

한편 강착원반 입자들(전자, 수소이온등)이 충돌하면 운동량이 증가하기 때문에 마찰력(저항)이 증가되며 점성계수도 증가한다고 본다. 이러한 이유로 강착원반의 기체들에 의한 점성만 고려 할 때와 같이 입자가 충돌할 경우에도 이들 입자들의 각운동량의 손실을 가져오며 강착원반의 각운동량을 내부의 영역에서 외부 영역으로 수송하고 강착은 더욱 촉진된다고 본다. 또한 점성에 의한 강착원반에서의 기체 입자들의 충돌은 이들 입자들을 중심별 쪽으로 이동하게도 한다. 이와같은 생각에서 Yoo(2000)는 점성 강착원반의 입자들의 충돌 또한 원반 진화에 영향을 준다고 보고한 바 있다. 따라서 점성및 충돌을 만족한 확산 방정식(본문 식(1))에 의하여 입자들은 기체의 확산 시간 $r_0^2/\eta_0$ 동안 확산할 것이다.

점성 강착 모형에서는 강착원반의 물리량 즉 표면 밀도, 점성계수, 시선속도 $v_r$ 등은 중심으로부터의 거리 r에 비례한다고 알려지고 있다. 위에서 지적한 바 같이 원반 기체들의 충돌은 점성을 가중시킨다고 보고 운동학적 점성계수 η는 $r^\alpha$에 비례하고 점성 시간척도는 $r/v_r$에 비례하며 입자간 충돌 시간척도는 $n(r/v_r)$(n는 정수)와 같다고 가정한다.

이렇게 볼 때 점성과 충돌은 내반경쪽이 더 빈번하고 이 영역에서는 난류가 발생된다고 본다(Frank *et al.*, 1992; Yoo. 2000). 이 경우 강착원반은 작은 섭동의 영향을 받게 될 것이다.

다시 말하면 강착 원반의 기체들의 점성과 충돌을 고려한 경우 별 쪽으로 각운동량이 수송되고 점성 및 충돌 때문에 강착 원반의 기체들은 난류를 일으

*E-mail: yoo0712@netsgo.com

키며 이 난류 때문에 각운동량 수송에 영향을 준다고 본다(본문 식(10) 이하).

여기서는 점성과 충돌에 의한 확산 방정식에서 확산계수를 결정하고 확산거리가 확산계수와 관계됨을 제 2절에서 살펴본다. 제 3절에서는 난류에 의해 발생된 파동이 이 계를 안정시키는지 따져보고 난류 발생으로 인한 각운동량 수송의 형태를 살펴본다. 그리고 제 4절에서는 2, 3절의 내용을 요약하고 간략한 논의를 제시한다.

## 확산 방정식

### 확산계수

강착원반의 기체의 점성과 충돌을 포함한 질량보존 방정식(Yoo, 2000 식(16) 참조)과 각운동량 보존 방정식(Yoo, 2000 식(7) 참조)에서 유도된 확산 방정식은 Yoo(2000)의 식(9)과 같다. 이 방정식을 r=f(r', t'), t=f(t')되는 적당한 변수를 선택하여 $(r, t, \Sigma)\rightarrow(r', t', \Sigma')$되게 하면

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}-2\Sigma\nu=\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}(r^{1/2}/\eta\Sigma)\right) \tag{1}$$

와 같이 된다(Yoo, 2000 식(12)). 여기서 Σ는 면적밀도, ν는 충돌 주파수, η는 점성계수이다. 식(1)의 $\eta=\eta(r, \Sigma)$ 이므로 Mineshige *et al.*(1993)는 $\eta=\eta_0(r/r_o)^2(\Sigma/\Sigma_0)^2$로 놓았다. 그러나 강착원반의 모든 양은 r의 함수이므로 여기서는 $\eta=v_{r_0}r^{3/2}$, $\nu\sim v_r/r$로 둔다(Yoo, 2000, 식(15) 참조). η와 ν식을 식(1)에 대입하면 간단한 모형의 확산 방정식은

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rD\frac{\partial}{\partial r}f(r,t)\right]=0 \tag{2}$$

와 같은 형태가 된다(Fleishman and Arzner, 2000, 식(13) 참조). 여기서 D는 확산계수이고 f(r, t)는 질량분포함수이다. 식(1)과 식(2)를 비교하여

$$f(r,\ t)\equiv r^2\Sigma$$
$$rD_1(r)=+3v_{r_0}r^{1/2} \tag{3}$$

와 같이 둔다고 가정하면 $D_1(r)=+3v_{r_0}/\sqrt{r}$ 이 된다. 그런데 식(2)에서 근사적 해로 부터

$$D(r)\propto vr \tag{4}$$

이므로 충돌과 점성이 있는 강착원반의 확산계수 $D(r)\sim r^{3/2}D_1(r)$에 해당된다. 간단한 모형 식(2)은 식(1)보다 거리의 +3/2승 만큼 더 빨리 확산된 셈이다. $D_1(r)\propto r^{-1/2}$ 이므로 식(1)의 확산 방정식에서 볼 때 즉 강착원반의 내반경쪽이 외반경쪽보다 확산이 활발히 진행된 셈이다.

### 확산거리

강착원반의 기체의 확산은 임의의 확산 시간 $\tau_d$ 동안 상대적으로 좁은 영역의 두께 δ

$$\delta\sim\sqrt{D_1\tau_d} \tag{5}$$

에서 일어난다고 가정한다. v를 시선방향 속도라고 하면 기체의 충돌 영역은 δ/v이다. 충돌에 의한 확산은 모든 확산 방정식에서 확산 계수 $D_l$에 따라 확산형식이 결정된다. 그리고 여기서 생각한 확산은 충돌에 의한 Σ가 변하므로 자유행정이 δ 보다 작을 때 수송과정이 고려되어야 한다(Yoo, 2000 식(12) 참조).

강착 원반내 기체의 충돌로 말미암아 이 기체들은 영역 δ를 통과한다고 가정하자. 이제 충돌을 한 기체들의 분포를 오차함수로 가정하고

$$N(r)=N_0\ \mathrm{erf}-(r/2D_1\tau_d)$$

라 둔다. 여기서 $D_1\tau_d$는 식(5)의 $\delta_2$과 같다. 따라서 임의의 δ를 통과한 기체 입자의 총수 Q는

$$Q(r)=\int_0^\infty N(r,t)dr\propto\delta^2\propto D_1 \tag{6}$$

가 된다.

## 안정성

### 섭동

점성 강착원반의 입자들이 충돌을 할 경우 강착원반은 작은 섭동을 받게 된다. 이 섭동을 파동으로 해석하자. 이제 이 경우 식(1)을 Σ의 축대칭 섭동을 생각하면 $\Sigma=\Sigma_0+\delta\Sigma$, $\nu=\nu_0+\delta\nu$로 놓을 수 있다. 그리고 $\mu(r, \Sigma)=\eta\Sigma$로 정의한다. $\mu=\mu(r, \Sigma)$ 이므로 r을 고정할 때 μ의 작은 변화 $\delta\mu=(\partial\mu/\partial\Sigma)_0\ \delta\Sigma$가 된다. 여기에서 첨자 0는 정적해를 의미한다. ∂μ식을 이용하고 식(1)의 2차 섭동을 무시하고 1차 섭동만 적용하며, $\sqrt{r}=s$라 두면 식(1)은

$$\frac{\partial\delta\mu}{\partial t}=\left(\frac{\partial\mu}{\partial\Sigma}\right)_0\left[\frac{3}{s^3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(s\delta\mu)+2f(\nu_0)\delta\mu\right] \tag{7}$$

가 된다. 식(7)에서

$$f(\nu_0)=\nu_0\left[1+\left(\frac{\partial \ln \nu}{\partial \ln \Sigma}\right)_0\right]\left(\frac{\partial \mu}{\partial \Sigma}\right)_0^{-1}$$

이다.

따라서 식(7)의 계수 $(\partial\mu/\partial\Sigma)_0$가 확산계수 역할을 한다. 강착원반의 모든 물리량은 r의 함수이므로 강착원반이 섭동을 받으면 식(7)의 $\delta\mu=\mu_0\exp(i(kr-\omega t))$의 형을 갖는다. 이 $\delta\mu$ 식을 식(7)에 대입하고 정리하면

$$\frac{\omega}{k}=-\left(\frac{\partial \mu}{\partial \Sigma}\right)_0\frac{18}{s^2}, \tag{8}$$

이고,

$$2k^2=\nu_0\left[1+\left(\frac{\partial \ln \nu}{\partial \ln \Sigma}\right)_0\right]\left(\frac{\partial \mu}{\partial \Sigma}\right)_0^{-1}\mu_0$$

$$\sim \mu_0\left[1+\left(\frac{\partial \ln \nu}{\partial \ln \Sigma}\right)_0\right]$$

이 된다. 식(8)에서 $(\partial\mu/\partial\Sigma)_0<0$이면 ν의 증가함에 따라서 $\delta\mu$는 지수적으로 증가하여 이 계는 불안정하다. 따라서 파동은 강착원반을 구성한 입자들이 존재하는 별쪽의 반대쪽으로 전달되어 점성과 충돌을 가중시킨다.

이같은 내용은 $(\partial\mu/\partial\Sigma)_0$를 이용하여도 마찬가지이다. 점성과 충돌효과가 있을 때 시선 속도(Yoo, 2000 식(1) 참조)

$$v_r=-\frac{3}{r^{1/2}\Sigma}\frac{\partial}{\partial r}(r^{1/2}\eta\Sigma) \tag{9}$$

에서 기체의 확산에 의한 내반경 쪽은 $v_r<0$ 이므로 (4)식의

$$D(r)=(\partial\mu/\partial\Sigma)_0=\eta_0=v_{r_0}r_0^{3/2}<0$$

가 된다. Σ는 $(\partial\mu/\partial\Sigma)_0$에 의존하며 $(\partial\mu/\partial\Sigma)_0<0$ 이므로 $\delta\mu$는 지수적으로 증가한다. 즉 점성-충돌에 의한 확산을 가정한 강착원반은 점성과 충돌효과가 있을 때에 불안정적이다. 따라서 강착원반의 기체들의 충돌은 원반 진화에서 큰 역할을 한다고 본다.

### 각운동량 수송

강착원반내 기체의 충돌은 점성과 더불어 난류를 일으키고 각운동량 수송에 일익을 담당한다고 생각된다. 이러한 난류로 인한 기체들의 각운동량의 수송형태를 섭동방법으로 알아보자.

이때 기체의 속도(u) 및 각운동량(L)을 평균량과 평균에 대한 섭동량의 합 즉, $u=\langle u\rangle+u'$, $L=\langle L\rangle+L'$으로 가정한다. 이 경우 각운동량 수송방정식은

$$\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial t}+\nabla\cdot(\langle L\rangle\langle v\rangle+\langle L'\rangle\langle v'\rangle)=S \tag{10}$$

와 같이 된다. 여기서 S는 소멸율 및 생성율을 나타낸다. 한편 각운동량의 확산방정식은

$$\frac{\partial\langle L'\rangle}{\partial t}+\nabla\cdot(D_1\nabla\langle L'\rangle)=0 \tag{11}$$

이다. 이제 식(10)의 S에 대하여 $\partial\langle L\rangle/\partial t=S$로 하고 평형상태 때의 각운동량 수송방정식을 식(10)에 대입하면 $\nabla\cdot(\langle L'\rangle\langle v'\rangle)=\nabla\cdot(D_1\nabla\langle L'\rangle)$와 같이 간단히 쓸 수 있다. 따라서 이식을 정리하고 적분하면 $\langle L'\rangle=\langle L_0'\rangle e^{-\int(v'/D_1)dr}$ 가 된다.

## 논의 및 결론

강착원반에서 입자들의 점성과 충돌이 있을 때도 강착원반은 각운동량이 보존되기 위하여 중심별 쪽으로 Σ가 확장되는 확산 과정을 거친다. 확산은 가장 간단한 ambipolar 확산의 개념을 그대로 지닌다. 강착원반의 확산은 질량유입이 시간적으로 정적이든 아니든(Mineshighe *et al.*, 1993), 확산계수를 상수로 볼 때(Pringle, 1981)도 점성과 충돌을 포함한 강착원반은 동경 방향으로의 ambipolar 확산과 유사한 확산 과정을 밟는다. 다만 확산은 중심방향 쪽으로 진행되며 이 때 확산계수는 $3v_{r_0}/\sqrt{r}$ 이다. 이것은 간단한 모형(식(2)) 보다 더욱 서서히 확산됨을 의미한다.

물론 점성이 있을 때 강착원반은 난류가 발생하고 이러한 난류는 강착원반을 불안정하게 한다. 이러한 불안정은 경계에서 음파를 반사시켜 일어난다고 본다. 작은 양의 파의 전달은 강착원반의 안정에 크게 영향은 주지 않겠지만 계속적인 점성은 난류를 발생시키므로 결국 불안정한 쪽으로 진행된다. 충돌과 점성의 강착원반에서 $v_{r_0}<0$ 일 때 강착원반은 불안하다. $\omega/k<0$인 경우 파동은 별의 반대쪽으로 전달되어 확산 방정식은 지수적으로 증가하므로 강착원반은 역시 불안정하다. 즉 충돌은 강착원반의 불안정에 가중치

를 주는 셈이다.

점성 충돌 강착원반이 준 정적 상태에 도달되는 시간은 r에 비례하므로 내부 영역에서 기체들이 난류 발생에 효과적이다. 바꾸어 말하여 식(11)에 의하면 r →0 때 L'는 $L_0$'이고 r→∞이면 L'→0이다. 이것은 난류에 의한 각운동량이 시간적으로 내부쪽에서 외부쪽보다 각운동량 수송이 이른 시각에 시작 됨을 의미한다. 즉 내부에서의 점성과 충돌이 난류에 효과적이다. 때문에 강착원반은 불안정하게 되고 이 불안정은 각운동량 수송을 촉진한다.

## 참고문헌


Duschl, W.J., 1983, The symbiotic star CH Cygni. Astron. Astrophys, 119, 248–252.

Fleishman, G. and Arzner, K., 2000, Saturation of electron cyclotron maser by lower-hybrid waves. Astron. Astrophys, 358, 776–788.

Frank, J., King, A., and Raine, D., 1992, Accretion Power in Astrophys., Cambridge Univ. Press, 98 p.

Ulrich, M.H. and Molendi, S., 1995, Observations and models of the UV/soft X-ray spectrum of the quasar PG 1116+215. Astron. Astrophys, 293, 641.

Mineshige, S., Yamashaki, T., and Ishizaka, C., 1993, On the exponential X-ray decay in X-ray novae. Publ. Astron. Soc. Japan, 45, 707–713.

Pringle, J.E., 1981, Accretion discs in astrophysics. Ann. Rev. Astron. Astrophys, 19, 137–162.

Shakura, N.I. and Sunyaev, V., 1973, Black holes in binary systems, observational appearance. Astron. Astrophys, 24, 337–355.

Solf, J., 1987, Optical confirmation and high-resolution spectroscopy of the radio jet from the symbiotic star CH Cygni. Astron. Astrophys, 180, 207–212.

Yoo, K.H., 2000, Viscosity and collisions of particles in accretion discs. Publ. Korean Astron. Soc., 33, 173–175.


2000년 11월 28일 원고 접수
2001년 10월 9일 수정원고 접수
2001년 10월 12일 원고 채택