韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 265-280.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 265-280.

2002년 월드컵 축구 예제를 활용한 수학 I 의 확률학습모형 개발

박 동 준 (부경대학교)
박 광 원 (부경대학교)

고등학교 수학 I 의 확률 및 통계영역의 교육내용을 정리한 후, 고등학생들에게 확률 및 통계영역에 관한 흥미를 돋구기 위하여 2002년 월드컵을 소재로 한 문제들을 활용하여 비주얼 베이직으로 프로그램한 '확률상자' 라는 확률모형을 개발하였다. 확률상자에는 확률의 역사, 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 이항계수, 통계적 확률, 조건부 확률, 배반사건 등 모두 10가지 모듈을 포함한다. 확률상자의 초기화면에서 메뉴를 선택하면 선택된 내용에 관한 간단한 정의와 함께 문제가 제시되어 정답을 적도록 하였고, 오답일 때는 힌트를 누르면 정답을 이해할 수 있도록 풀이과정을 제시하였다. 특히, 메뉴가운데서 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 통계적 확률의 경우에는 풀이과정 중에 애니메이션 또는 시뮬레이션이 실행되도록 하여 이해를 돕도록 하였다.

I. 서 론

고등학교의 수학 교과목 가운데 한 부분인 확률 및 통계영역은 교재의 편성에서 뒷부분에 위치하고 있고 학생들의 관심도가 가장 떨어지는 부분 가운데 하나이다. 고등학생들에게 확률영역에 대한 흥미를 돋구기 위하여 비주얼 베이직(1998)으로 프로그래밍한 학습모형을 개발하고자 한다. 미국의 수학교사협의회 가운데서 본 논문과 관련된 내용을 정리하고 확률 및 통계영역에 관한 선행연구와 컴퓨터의 기술을 활용한 확률 및 통계영역에 관한 연구를 살펴본다.

미국수학교사협의회(http://www.nctm.org)에서는 유치원부터 12학년까지 학교 수학의 6가지 원리(principles)와 규준(standards)을 제시하고 있다. 규준들에는 수와 연산(number and operations), 대수(algebra), 기하(geometry), 측정(measurement), 자료 분석과 확률(data analysis and probability), 문제 해결(problem solving), 추론과 증명(reasoning and proof), 연결성(connections), 의사 소통(communication), 표현(representation)을 포함하여 모두 10가지이다. 그 가운데서 본 논문과 관련하여 살펴보아야 할 자료 분석과 확률 규준에 대한 4가지 구체적인 목표는 학생들이 교육 프로그램들을 통하여 자료로 제시된 물음을 공식화하고 그 물음에 답하기 위하여 관련된 자료들을 정리하고 전시할 수 있어야 하고, 자료를 분석하기 위한 적절한 통계적 방법들을 선택하고 사용할 수 있어야 하며, 자료를 근거로 하여 추론을 하고 예측할 수 있어야 하고, 확률의 근본적인 개념들을 이해하고 적용할 수 있는 능력을 갖추는데 있다.

확률 및 통계영역에 관한 선행연구들로 해방이후의 수학 교육 시기인 1954년부터 1995년까지 고등학교 통계 교육의 변천과정을 교육 과정과 교과서의 내용을 중심으로 정리하였고(이재욱, 1994), 확률적 논리와 확률적 진리들을 설명하고 귀납적 논증 등을 통하여 확률의 의미가 명확하게 규정되기 어려움을 확인하면서 확률의 의미에 관한 수학적인 논의를 철학적인 논의와 관련시키면서 비교하였다(이경화, 1996). 또한 방정식과 부등식 단원에서 2문제, 일차함수 단원에서 4문제, 확률 단원에서 달력 만들기, 주사위 놀이, 복권의 기대값, 피자 나누기 등 모두 10문제를 수학적으로 모델링하여, 탐구수업을 하는 중학교 2학년 수학교과서를 중심으로 각 단원에 알맞은 수학적 모델링 문제를 개발하고 이를 실제로 수업 현장에 적용하였다(홍정희와 송순희, 1995). 고등학교의 물리실험실에서 자유낙하 실험기구와 경사면 미끄럼 실험기구와 도르레 실험기구와 시계추 실험기구들을 이용하여 중력가속도를 측정하는 실험들을 여러 번 반복하여 나타나는 자료들을 이용하여 탐색적 자료분석을 실시하였다(Maher과 Pancari(1994)).

컴퓨터의 기술을 활용한 확률 및 통계영역의 교육에 관한 연구로서는 초등학생들이 통계영역에 관심을 갖고 학습효과를 증진시키기 위하여 비주얼 베이직으로 통계교육모형을 개발하였고(박동준과 강혜진, 2000), 컴퓨터를 이용한 확률 및 통계를 체계적으로 교육시키기 위하여 중학생을 대상으로 컴퓨터 소프트웨어인 PET(Probability Experimental Tool)를 개발하였으며(강행고, 1997), 고등학교의 통계영역에서 나타나는 확률밀도함수의 개념, 큰 수의 법칙의 이해, 정규분포 곡선의 변화, 이항분포의 근사, 표본평균의 분포, 모평균의 추정과 신뢰도의 의미 등에 관한 주요 내용들을 통계 연구용 객체지향 프로그래밍 언어인 XLISP-STAT을 이용하여 동적 그래픽과 시뮬레이션 프로그램을 제시하였다(박영희, 1997). 컴퓨터의 적극적인 활용을 위하여 수학교육자, 수학교사, 프로그램 개발 전문가가 공동으로 소프트웨어 개발에 참여할 것을 강조하고 교육용 소프트웨어에 관한 프로그램의 특성을 살펴볼 수 있도록 무료시범 디스켓을 용이하게 구할 수 있는 체제를 제안하고, Tool 소프트웨어의 활용방안 연구가 이루어져야 하며, 컴퓨터에 관한 소양을 길러줄 수 있는 교사 재교육이 시급히 이루어져야 한다는 것과 컴퓨터의 제한점을 아울러 지적하였다(장경윤, 1996).

본 논문은 제 7차 교육과정의 고교과정의 수학 가운데서 확률 부분에서 가르쳐야 할 주제들을 학교의 교실이나 일반가정에서 컴퓨터를 사용하여 손쉽게 배울 수 있도록 비주얼 베이직으로 프로그래밍한 확률상자라는 확률학습모형을 개발하였다. 주요 내용으로서는 확률의 역사, 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 이항계수, 통계적확률, 조건부확률, 배반사건 등이다. 화면의 구성은 한국교육학술정보원에서 제공하는 교육용 컨텐트 개발 표준화 연구에 나타나는 예시화면을 참고로 하였다. 주요 내용의 문제들은 고등학생들의 흥미를 돋구기 위하여 2002월드컵을 소재로 하여 문제를 구성하였다. 그리고 일부 내용 가운데는애니메이션이나 시뮬레이션이 실행되어 정답의 풀이과정을 쉽게 이해하도록 하였다.

Ⅱ. 제7차 교육과정의 수학 Ⅰ의 확률과 통계영역의 내용과 교수방법

확률학습도구를 개발하기 위하여 제 7차 교육과정의 확률과 통계영역의 교육내용과 교수방법을 살펴본다. 수학Ⅰ은 국민 공통 기본 교육 기간의 10단계 수학을 이수한 다음, 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 첫 단계 과목으로서, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고력, 논리적 추론능력을 키워, 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하며, 수학Ⅱ과목 이수의 기초가 되는 과목으로 크게 3개 영역으로 나누는데 영역과 내용은 <표 2.1>와 같다. 그리고 수학Ⅰ의 확률과 통계영역에서 교육되어야 할 순열과 조합, 확률, 통계의 내용들은 <표 2.2>와 같다.

<표 2.1> 수학 I 의 영역과 교육내용

영 역	교 육 내 용
대 수	지수와 로그 행렬 수열
해 석	수열의 극한 지수함수 로그함수
확률과 통계	순열과 조합 확률 통계

<표 2.2> 수학 I 의 확률과 통계영역의 교육내용

영역	소영역	교육 내용
확률과 통계	순열과 조합	• 경우의 수 • 순열 • 조합 • 이항정리
	확률	• 확률의 뜻 • 확률의 계산
	통계	• 확률분포 • 통계적 추정

확률과 통계영역 가운데 순열과 조합에서 교육되어져야 할 내용들은 경우의 수, 순열, 조합, 이항정리의 내용을 포함한다. 경우의 수에는 합의 법칙, 곱의 법칙을 포함하고 순열에서는 순열의 뜻, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 포함한다. 조합에서는 조합의 뜻, 조합의 수를 포함한다. 이항정리에서는 이항정리를 이용하여 여러 가지의 문제를 해결할 수 있도록 한다. 배울 용어와 기호들은 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_nP_r$, $n!$, ${}_nC_r$, ${}_n\Pi_r$ 들을 포함한다. 학습 지도상의 유의점으로는 염주순열과 같은 것이 있는 경우의 원순열과 중복조합은 다루지 아니한다. 확률의 뜻에 대한 교육내용은 통계적 확률과 수학적 확률의 뜻, 확률의 기본성질을 포함한다. 확률의 계산의 교육내용에는 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률, 조건부 확률, 사건의 독립과 종속, 확률의 곱셈정리, 독립시행의 확률들을 포함한다. 배울 용어와 기호들은 시행, 사건, 확률, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부 확률, 종속, 독립, 독립시행, $P(A)$, $P(B \mid A)$들이 있다.

확률·통계의 교수 방법으로서는 확률과 통계의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서

일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하고 해결할 수 있는 능력을 기를 수 있게 하고 교수·학습의 전 과정에서 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 학습의 효과를 높이도록 한다. 또한 교수·학습 과정에서 복잡한 계산이나 수학적 개념·원리·법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 한다.

Ⅲ. 확률학습모형의 개발

고교과정의 확률을 배우는 학생들의 흥미를 돋구기 위하여 개발한 확률상자의 내용으로서는 확률의 역사, 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 이항계수, 통계적 확률, 조건부 확률, 배반사건이 있고 포함된 내용을 정리한다.

3.1 확률의 역사

(1) 확률의 역사 내용

기회와 불확실성의 개념들은 인간의 문명의 역사만큼이나 오래되었고, 인간들은 이러한 불확실성을 줄이기 위해 끊임없이 노력해왔다. 이러한 불확실성을 포함하고 있는 도박과 확률의 역사는 분리하여 생각할 수 없다. 기원전 3500년경에 고대의 주사위라고 생각되어지는 뼈 조각으로 하는 기회의 게임(games of chance)들이 이집트와 여러 곳에 있었다(Degroot, 1986). 그리고 기원전 2000년경에 만든 이집트인의 무덤에서 현대의 주사위 눈금과 사실상 동일한 눈금들이 새겨진 입방체의 주사위가 발견되었다.

확률문제가 문헌에 처음으로 등장하는 것은 15세기 말이다. 확률의 역사에서 게임에 관한 연구에 커다란 기여를 한 학자들로서는 카르다노(Cardano), 갈릴레오(Galileo), 파촐리(Pacioli), 타르탈리아(Tartaglia)와 같은 학자들이 있다. 이탈리아의 수도사 파촐리는 1487년에 "산술, 기하 및 비례대전"이라는 최초의 대수학 책을 출판하였는데 여기에서 "Problem of Points"라는 도박문제를 소개하였다. 예를 들면 능력이 같은 두 경기자가 도중에 승패의 결말을 내지 못하고 경기를 중단했을 때 지금까지의 득점과 앞으로 할 득점을 예측하고, 이를 근거로 상금의 분배방법을 다루는 문제이다. 그러나 이러한 종류의 문제는 그 후 여러 사람에 의해 연구되었는데 특히 카르다노와 타르탈리아에 의해 16세기에 벌써 수학적으로 다루어졌고 그 후에 파스칼과 페르마에 의해서 이론적으로 완전히 해결되어졌다.

홀드(Hald, 1990)는 확률의 역사에서 확률의 이론이 결정적인 발달을 한 시기인 1660년부터 1750년까지를 세 기간으로 구분하였다. 확률의 출현기라고 불리는 1654년부터 1665년에 프랑스의 수학자 파스칼(Pascal)과 페르마(Fermat)는 "Problem of Points"와 비슷한 기회의 게임에서 몫의 균등한 분배 문제를 다루는 도박문제(gambler's ruin problem)에 관한 확률을 유도하여 이러한 문제 해결에 큰 기여를 하였다. 뿐만 아니라 그들은 이항계수와 파스칼의 삼각형에 관한 연구도 하였다.

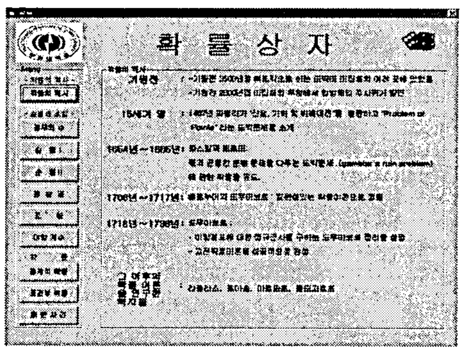
약간의 정체기간이 지난 후 1708년부터 1718년까지 베르누이와 드무아브르(De Moivre)의 연구들이 일관성 있는 확률의 이론으로 정립되었다. 몬몰트(Montmort)는 1713년에 Problem of Points를 일반적인 말로서 해결한 짝의 게임(game of matching pairs)에 관한 연구와 도박사의 문제(gambler's ruin problem)에서 게임의 연장에 관한 문제를 연구하였다.

1717년부터 1738년까지는 통합과 연장기였다. 드무아브르는 이항분포에 대한 정규근사를 구하는 드무아브르 정리를 설명함으로써 베르누이 정리를 진일보시켰고 중심극한정리의 한 예를 설명하였다. 그리고 이항분포에 대한 포아송근사를 설명하였고 확률과 관련된 적분문제를 처음으로 다루었다. 그는 오늘날 고전확률이론이라고 불리는 이론을 성공적으로 완성하였다.

그 이후 19세기 초 프랑스의 수학자 라플라스(Laplace)는 1827년에 확률에 관한 저서인 "확률의 해석적 이론"은 확률에 관해서 뿐만 아니라 통계학을 체계적인 수학의 형태로 저술하였다. 1837년경 포아송(Poisson)은 음이항분포의 극한이 포아송분포가 된다는 것을 보였다. 코시(Cauchy)는 1853년에 특성함수방법들에 의하여 중심극한정리를 완전하게 증명하였다. 소련의 학자인 마르코프(Markov)는 마르코프 체인의 개념을 소개하고 확률과정(stochastic processes)의 개발에 큰 기여를 하였다. 그리고 콜모고로프(Kolmogorov)는 1933년에 그의 저서에서 고전확률이론 뿐만 아니라 확률과정이론에 적합한 일반적으로 채택되는 공리(axiom)들을 도입하였다.

(2) 확률의 역사 프로그램해설

<그림 1> 확률상자의 초기화면



<그림 2> 확률의 역사 화면

<그림 1>은 비주얼 베이직으로 프로그램을 한 확률상자를 실행하였을 때 처음으로 나타나는 초기 화면이다. 초기화면 위쪽의 중앙에 "확률상자"라는 제목이 나타나고 왼쪽에는 부경대학교의 로고를 의미하고 오른쪽에는 정육면체 주사위 2개가 맞물려 회전하도록 만들었다. 왼쪽 아랫부분에는 확률상자에서 실행이 가능한 메뉴를 만들었고 오른쪽 아랫부분에는 확률상자의 내용을 간단히 소개하였다. <그림 2>는 초기화면의 첫 번째 메뉴인 확률의 역사를 마우스로 눌렀을 때 나타나는 화면이다.

3.2 순열과 조합

(1) 경우의 수

먼저 곱의 법칙으로서 첫째 사건이 일어나는 경우의 수가 m개이고, 둘째 사건이 일어나는 경우의 수가 n개가 있다면

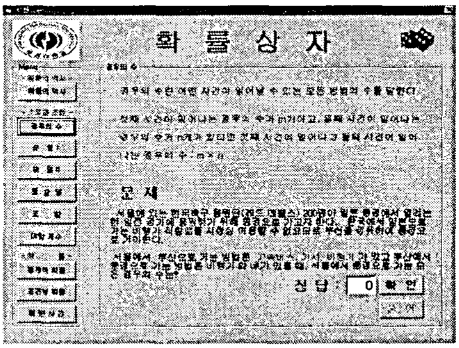
① 첫째 사건이 일어나고 둘째 사건이 일어나는 경우의 수 : $m \times n$개

② 첫째 사건과 둘째 사건이 같은 시간에 일어나게 하는 경우의 수 : $m \times n$개가 된다.

(예제 1) 서울에 있는 한국 축구 응원단(레드 데블스)200명이 일본 동경에서 열리는 한·일전 경기에 응원하기 위해 동경으로 가고자 한다. 한국에서 일본으로 가는 비행기 직항로를 사정상 이용할 수 없으므로 부산을 경유하여 동경으로 가야한다. 서울에서 부산으로 가는 방법은 고속버스, 기차, 비행기가 있고 부산에서 동경으로 가는 방법은 비행기와 배가 있을 때 서울에서 동경으로 가는 모든 경우의 수는?

(해) 서울에서 부산으로 가는 경우는 3가지이고, 부산에서 일본으로 가는 경우는 2가지이므로 총 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$개다.

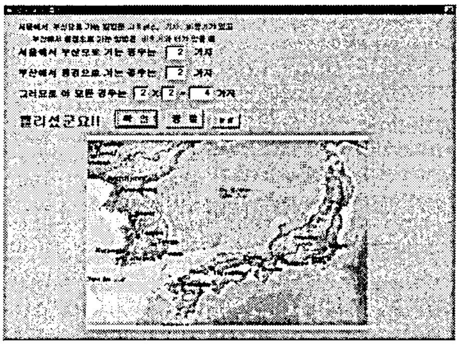
(2) 경우의 수 프로그램해설

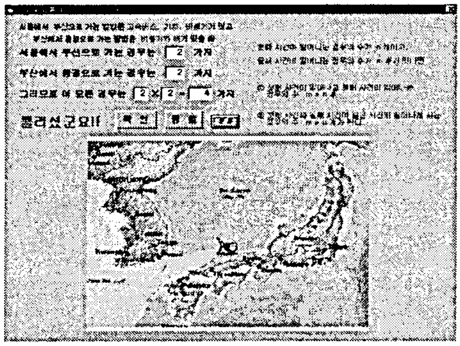


<그림 3> 경우의 수 초기화면

<그림 4> 경우의 수에서 오답기재화면

<그림 3>은 메뉴에서 경우의 수를 실행했을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 1)을 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 정답 칸에 적으면 정답인가를 확인할 수 있고 정답인 경우에는 다음 메뉴에 있는 순열문제로 들어갈 수 있다. 그러나 오답을 적으면 "틀리셨군요!"라는 메시지와 함께 풀이 단추가 활성화되고 풀이과정으로 갈 수 있다. <그림 4>는 오답을 적었을 때 화면의 모습을 보이고 있다. <그림 5>는 경우의 수의 문제에 대한 요약과 함께 순서대로 문제를 풀이하여 정답을 구할 수 있도록 화면을 구성하였다. 마지막 부분에 정답을 적었으나 틀린 경우에는 힌트를 누르면 <그림 6>과 같이 풀이에 대한 설명부분이 나타나고 지도에 모든 경우의 수에 대한 애니메이션이 실행되어 정답을 이해할 수 있도록 하였다.


<그림 5> 경우의 수에서 풀이화면


<그림 6> 경우의 수에서 힌트화면

(3) 순열

순열이란 어떤 물건들을 순서를 생각해서 배열하는 것을 말한다. n개의 서로 구별할 수 있는 물체로부터 한번에 r개를 취했을 때 순열의 수는 다음과 같다.

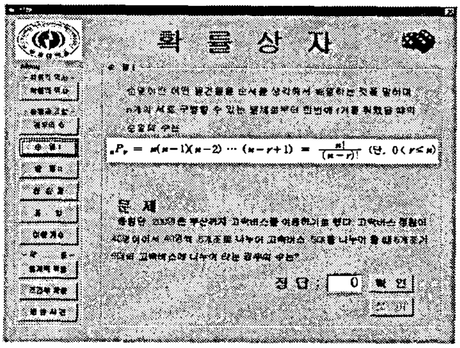
$$_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \ (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

(예제 2) 응원단 200명은 부산까지 고속버스를 이용하기로 했다. 버스 정원이 40명이어서 40명씩 5개조로 나누어 고속버스 5대를 나누어 탈 때 5개조가 5대의 버스에 나누어 타는 경우의 수는?

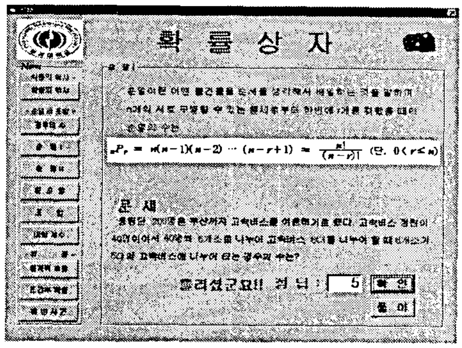
(해) 첫 번째 조가 골라 탈수 있는 버스의 종류는 5가지, 두 번째 조가 골라 탈수 있는 버스의 종류는 4가지이므로 이런 방법으로 5개조가 모두 탈 수 있는 경우는 $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$가지이다.

(4) 순열Ⅰ 프로그램해설

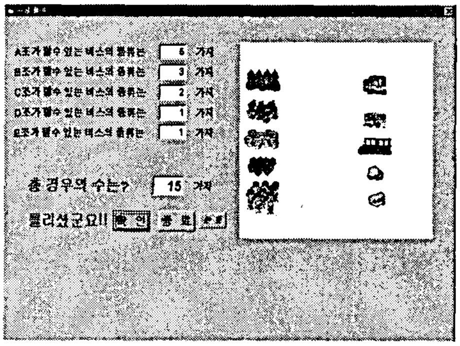
<그림 7>은 메뉴에서 순열Ⅰ을 실행하였을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 2)를 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고 <그림 8>은 오답을 적었을 때 화면의 모습을 보이고 있다. <그림 9>에는 A조가 선택할 수 있는 버스의 종류의 가지 수부터 단계적으로 문제를 풀이하여 정답을 구할 수 있도록 화면을 구성하였다. 마지막 부분에 정답을 적었으나 틀린 경우에는 힌트를 눌러서 <그림 10>과 같이 우측상단부분에 각 조들이 배치될 수 있는 버스의 종류에 대한 가지 수에 대한 애니메이션이 실행되어 정답의 풀이과정을 보였고 하단에 순열의 수에 대한 공식을 제시하였다.



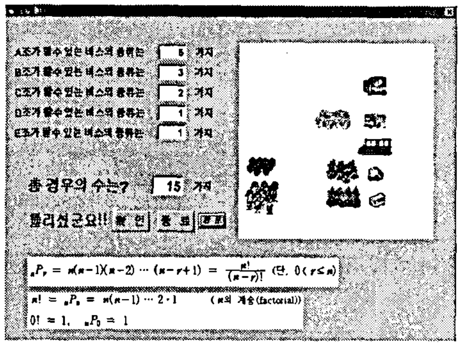
<그림 7> 순열 I 초기화면



<그림 8> 순열 I 에서 오답기재화면



<그림 9> 순열 I 에서 풀이화면

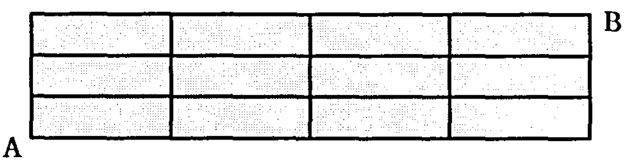


<그림 10> 순열 I 에서 힌트화면

(정리) n개 중에서 p개, q개, r개가 각각 같을 때, 순열의 수 :

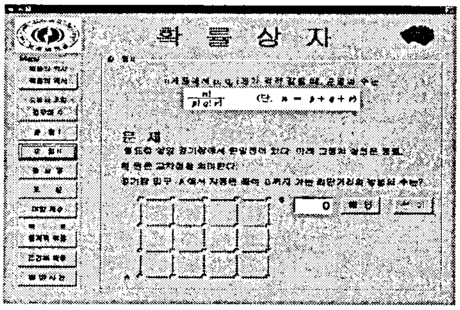
$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!} \qquad (\text{단, } n = p + q + r)$$

(예제 3) 월드컵 상암 경기장에서 한·일전이 있다. 지정된 좌석은 아래와 같다. 입구A에서 지정된 좌석B까지 가는 최단거리의 방법의 수는? (실선은 통로이다.)

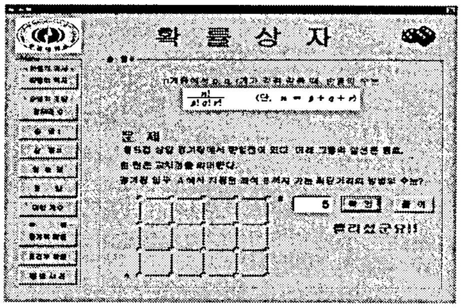


(해) 가로로 가는 경우가 총 4번, 세로로 가는 경우가 총 3번이면 A에서 B까지 갈 수 있으므로 구하고자 하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$가지이다.

(5) 순열II 프로그램해설

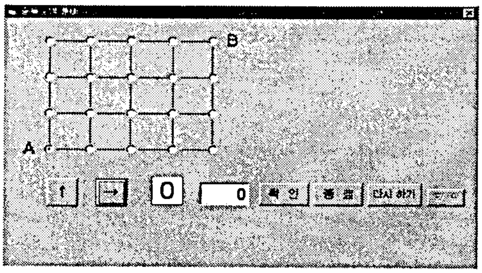


<그림 11> 순열II 초기화면

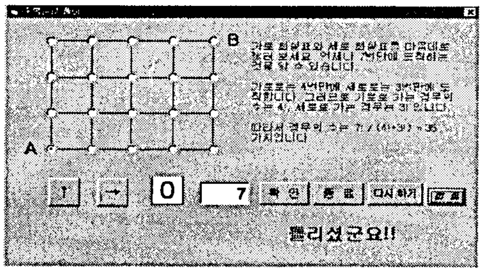


<그림 12> 순열II 오답기재화면

<그림 11>은 메뉴에서 순열II를 실행하였을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 3)을 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고 <그림 12>는 오답을 적었을 때 화면을 보이고 있다. <그림 13>은 오답을 입력한 후 풀이를 눌렀을 때 나타나는 화면으로서 정답을 다시 한 번 시도할 수 있고 틀린 경우 힌트를 눌러서 <그림 14>와 같이 풀이과정을 확인할 수 있다. 왼쪽의 화살표를 눌러서 A에서부터 B까지 진행하는 방법들을 순차적으로 확인하여 정답을 이해할 수 있도록 하였다.



<그림 13> 순열II에서 풀이화면

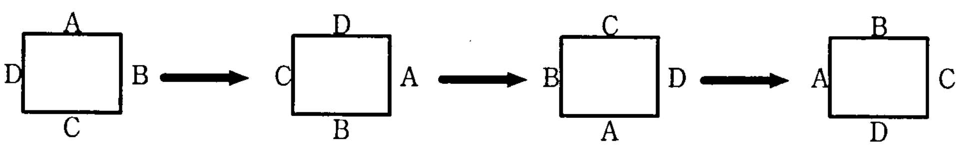


<그림 14> 순열II에서 힌트화면

(6) 원순열

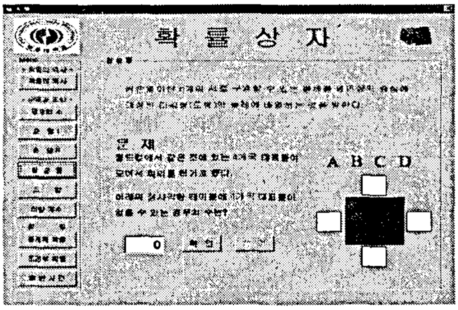
n개의 서로 구별할 수 있는 물체를 평면상의 중심에 대칭인 다각형(도형)의 둘레에 배열하는 것을 말한다.

(예제 4) 다음과 같은 정사각형의 둘레에 각 선분에 한 개씩 물체를 배열하는 경우의 수는?

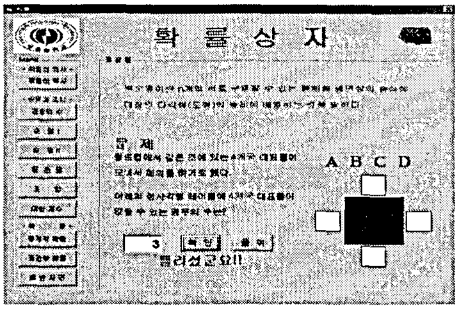


(해) 모두 $4!$경우가 있지만 위의 그림에서 4가지의 경우가 모두 같은 것이므로 $\frac{4!}{4}=6$개다.

(7) 원순열 프로그램해설

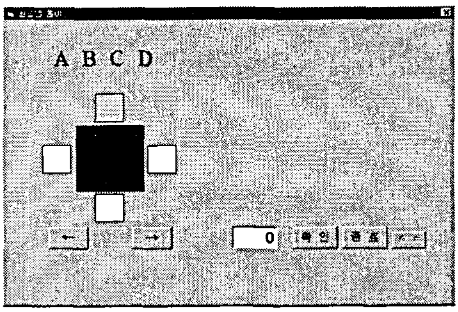


<그림 15> 원순열 초기화면

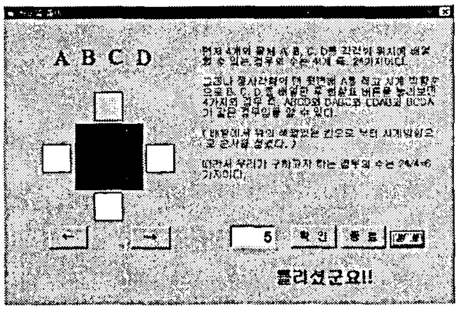


<그림 16> 원순열에서 오답기재화면

<그림 15>는 메뉴에서 원순열을 실행하였을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 4)를 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고 <그림 16>은 오답을 적었을 때의 화면을 보이고 있다. <그림 17>에서 다시 한번 정답을 입력할 수 있도록 하였고 틀린 경우에는 힌트를 눌러서 <그림 18>과 같이 우측상단에 (예제 4)를 해결하기 위한 설명을 적고 실제로 화살표를 눌러서 실행하여 원순열의 경우의 수에 대한 정답을 확인할 수 있도록 하였다.



<그림 17> 원순열에서 풀이화면



<그림 18> 원순열에서 힌트화면

(8) 조합

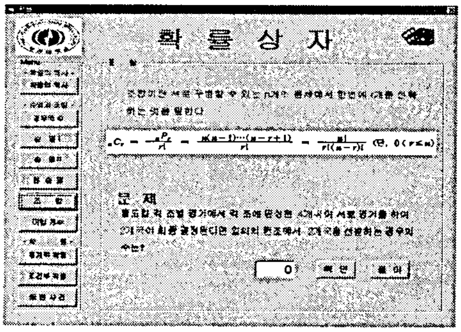
조합이란 서로 구별할 수 있는 n개의 물체에서 한번에 r개를 선택하는 것을 말하며 여기에서는 r개의 순서는 고려하지 않는다.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \le n) $$

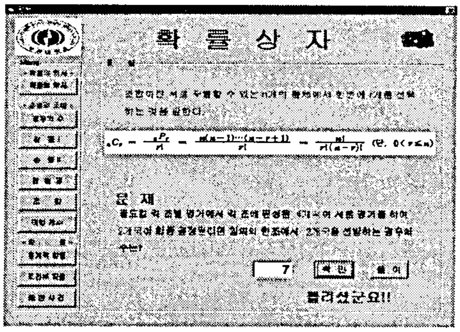
(예제 5) 4개국씩 편성된 월드컵 각 조별 시합을 통하여 2개국을 선발한다. 임의의 한 조에서 2개국을 선발하는 경우의 수는?

(해) 4개국 중에서 2개국이 선발되는 것이므로 ${}_4C_2 = 6$개다.

(9) 조합 프로그램해설

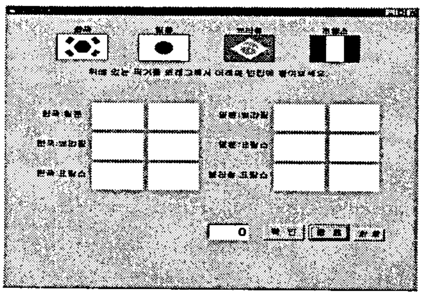


<그림 19> 조합 초기화면

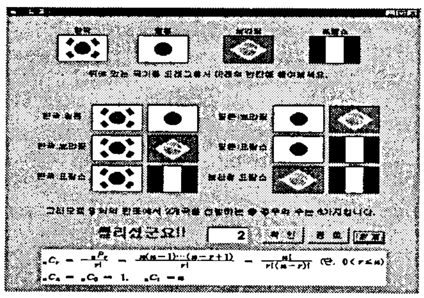


<그림 20> 조합에서 오답기재화면

<그림 19>는 메뉴에서 조합을 실행하였을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 5)를 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고 <그림 20>은 오답을 적었을 때, 화면을 보이고 있다. <그림 21>은 오답을 입력한 후 풀이를 눌렀을 때 나타나는 화면으로서 정답을 다시 한번 시도할 수 있고 틀린 경우 힌트를 눌러서 <그림 22>와 같이 실제로 4개국에서 2개국가로 선발되는 각각의 경우의 수에 대하여 국기를 마우스로 끌어다 붙힘으로써 정답을 확인할 수 있고 아래에는 조합에 관한 공식을 적었다.



<그림 21> 조합에서 풀이화면



<그림 22> 조합에서 힌트화면

3.3 확률

(1) 통계적 확률과 수학적 확률

통계적 확률 : 여러 번 시행하여 상대도수로 정한 확률

수학적 확률 : 각각의 근원 사건이 일어날 가능성이 모두 같은 경우, 그 사건에 속한 근원 사건의 개수를 표본공간의 원소의 개수로 나눈 값이다.

(정리) 수학적 확률

각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때,

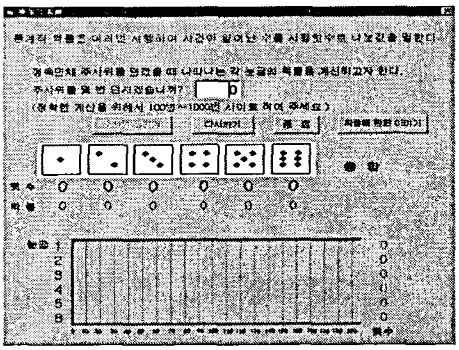
$n(S)$: 표본공간 S의 원소의 개수

$n(A)$: 사건 A에 속하는 근원 사건의 개수

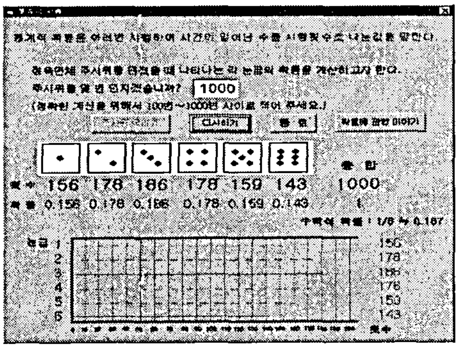
⇒ 사건 A의 확률 : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

(2) 통계적 확률 프로그램해설

<그림 23>은 메뉴에서 통계적 확률을 시행하였을 때 나타나는 화면으로서 정육면체 주사위를 100번에서 1000번 사이로 굴렸을 때 각 눈금의 통계적 확률을 구하기 위한 것이다. 【그림 24】는 실험결과 주사위의 각 눈금 아래에 각 눈금이 나타난 횟수와 계산된 통계적 확률을 보이고 가장 아래부분에 그 실험과정의 변화를 도수분포표로 볼 수 있도록 하였다.



<그림 23> 통계적 확률 초기화면



<그림 24> 통계적 확률 실행화면

(3) 조건부확률

$P(B \mid A)$: 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(정리) 확률의 곱셈정리(1)

A, B : 사건

⇒ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$

(예제 6) 한일전에서 한국과 일본이 동점을 기록해서 승부차기로 승부를 결정해야만 했다. 4번까지의 승부차기 결과는 아래와 같다.

	1	2	3	4	5
한 국	○	×	×	○	?
일 본	×	○	×	○	?

① 한국과 일본이 모두 승부차기에 골을 넣을 확률이 1/2 라면 5회째 양국 모두 골인시켜 6회째 공을 다시 차야되는 확률은?

② 이번에는 한국이 먼저 슛을 하여 골인을 시킬 확률이 1/2 일 때, 일본이 성공시킬 확률은 1/3 이고, 한국이 실축을 하여 일본이 성공시킬 확률은 2/3 이라고 한다면 5회째 일본이 성공시켰을 때 한국이 성공시켰을 확률은?

(해) 한국이 성공시킬 확률을 $P(A)$라 두고, 일본이 성공시킬 확률을 $P(B)$라고 하면

① 공을 다시 차야되는 확률은 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이다.

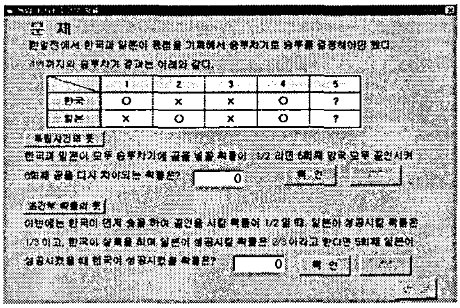
② 조건부 확률을 사용한다. 한국이 성공시킬 확률을 $P(A)$라 두고, 일본이 성공시킬 확률을 $P(B)$라고 하면 구하고자 하는 확률은 $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 이다.

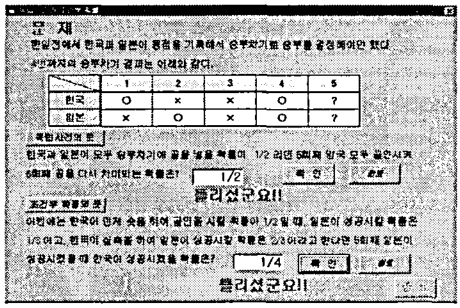
여기에서 $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ 이고, $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{3}$ 이다.

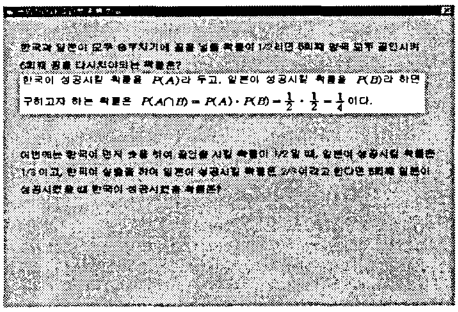
(4) 조건부 확률 프로그램해설

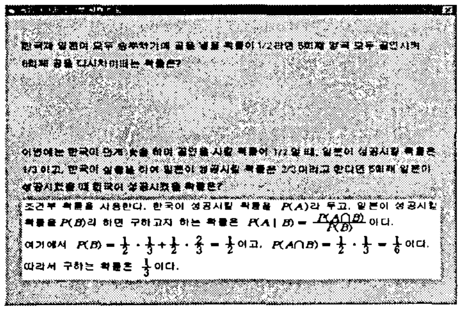
【그림 25】는 메뉴에서 조건부 확률을 실행했을 때 나타나는 처음 화면으로서 (예제 6)을 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고, 【그림 26】은 오답을 적었을 때 화면으로 보이고 있다. 【그림 27】과 【그림 28】은 오답을 입력한 후 풀이를 눌렀을 때 나타나는 ①번과 ②문제의 풀이과정을 각각 보이고 있다.


<그림 25> 조건부확률 초기화면



<그림 26> 조건부확률에서 오답기재화면


<그림 27> 조건부확률에서 풀이화면1


<그림 28> 조건부확률에서 풀이화면2

(5) 배반사건

배반 : 어떤 시행에서 두 사건이 동시에 일어나지 않는다.

배반사건 : 동시에 일어나지 않는 사건을 말한다. 즉, A, B : 배반 ⇔ $A \cap B = \phi$

(예제 7) 2002년 월드컵경기에서 32개의 참가국 가운데서 한국의 우승확률은 0.15 , 일본의 우승확률은 0.10 이고 한·일 공동우승확률은 0.02 (공동우승이 가능할 때)이라고 한다.

① 적어도 한국이나 일본이 우승할 확률은?

② 공동우승이 없다고 할 때, 한국이나 일본이 우승할 확률은?

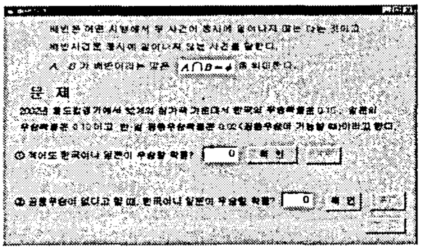
(해) 한국이 성공시킬 확률을 $P(A)$라 두고, 일본이 성공시킬 확률을 $P(B)$라 하자.

① 구하고자 하는 확률은 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$이고 이것을 계산해 보면 구하고자 하는 확률은 $P(A \cup B) = 0.15 + 0.10 - 0.02 = 0.23$이다.

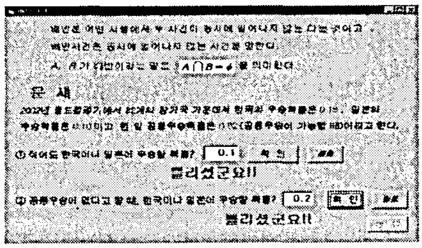
② 두 사건은 배반사건이므로 $A \cap B = \emptyset$ 이다. 따라서 구하고자 하는 확률은

$P(A \cup B) = 0.15 + 0.10 = 0.25$이다.

(6) 배반사건 프로그램해설

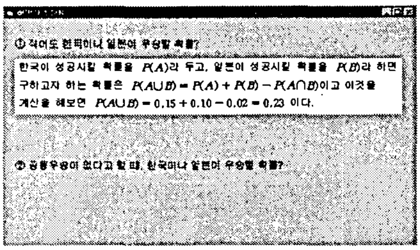


<그림 29> 배반사건 초기화면

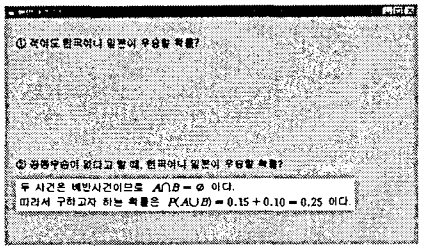


<그림 30> 배반사건에서 오답기재화면

<그림 29>는 메뉴에서 배반사건을 실행하였을 때, 나타나는 처음 화면으로서 (예제 7)을 확률상자의 문제로 작성하였다. 정답을 입력하여 정답여부를 확인할 수 있고 <그림 30>은 오답을 적었을 때의 화면을 보이고 있다. <그림 31>은 오답을 입력한 후 ①번 문제의 풀이를 눌렀을 때 나타나는 화면으로서 문제의 풀이과정을 보이고 <그림 32>는 ②번 문제의 풀이과정을 보인다.



<그림 31> 배반사건에서 풀이화면1



<그림 32> 배반사건에서 풀이화면2

Ⅳ. 결 론

지금까지 제 7차 교육과정 중에서 고등학교의 수학 I 의 확률 및 통계영역에서 교육되어야 할 순열과 조합, 확률의 내용을 정리하고 비주얼 베이직을 활용하여 확률상자라는 확률학습모형을 개발하였다. 비주얼 베이직으로 개발한 확률상자에는 이들 가운데서 확률의 역사, 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 이항계수, 통계적 확률, 조건부 확률, 배반사건 등 모두 10가지를 프로그램하였다. 고등학생들의 호기심을 유도하기 위하여 2002년에 한·일 공동으로 개최하는 월드컵을 소재로 한 문제들을 확률상자에 포함하였다. 확률상자의 메뉴를 선택하면 문제가 제시되어 정답을 적도록 하였고 오답인 경우에는 풀이를 눌러서 정답을 다시 한 번 적을 수 있도록 하였으며 틀린 경우에는 힌트를 눌러서 정답에 대한 풀이과정을 보였다. 특히 경우의 수, 순열, 같은 것이 있는 순열, 원순열, 조합, 통계적 확률에는 풀이과정 중에 애니메이션 또는 시뮬레이션이 실행되거나 화면상의 화살표들을 마우스로 클릭하여 정답의 풀이과정을 쉽게 이해할 수 있도록 하였다. 단순히 교과서의

지면으로 나타난 문제들을 손으로 풀이하는 것이 아니라 확률상자라는 확률에 관한 프로그램을 컴퓨터 화면상에서 반복하여 실행함으로써 애니메이션등을 통하여 풀이과정을 쉽게 이해하도록 하였다.

참 고 문 헌

강행고 (1997). PET(Probability Experimental Tool)를 이용한 확률 개념의 교수 · 학습에 관한 연구, 한국교원대학교 교육학 박사학위 논문.

박동준 · 강혜진 (2000). 비주얼 베이직을 활용한 초등학교 고학년용 통계교육모형, 한국수학교육학회 시리즈 C <초등교육> **4(2)**, pp.127-137, 서울: 한국수학교육학회.

박영희 (1997). XLISP-STAT의 동적 그래픽을 이용한 통계교육, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **36(2)**, **pp**.119-126, 서울: 한국수학교육학회.

이재욱 (1994). 고교 통계교육의 변천 고찰, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **33(1)**, pp.1-10, 서울: 한국수학교육학회.

이경화 (1996). 확률의 의미에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 **6(1)**, pp.179-187, 서울: 대한수학교육학회.

장경윤 (1996). 컴퓨터와 수학, 수학교육, 대한수학교육학회 논문집 **6(1)**, pp.33-44, 서울: 대한수학교육학회.

홍정희 · 송순희 (1995). 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구수업 효과의 고찰, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **34(1)**, pp.83-96, 서울: 한국수학교육학회.

교육부 고시 제1997-15호 (1998). 제7차 수학과 교육과정, 대한 교과서 주식회사.

Carolyn Maher & John Pancari (1994). Statistics in High School Scienc, *Teaching Statistics at its best* Edited by David Green, pp.131-135, England: The Teaching Statistics Trust.

Microsoft Visual Basic version 6.0 (1998), Microsoft Corporation.

참고 사이트

미국수학교사협의회; http://www.nctm.org