

컴퓨터 대수학 알고리즘의 개념 및 변화를 이용한 응용모듈 설계모형 작성¹⁾

박 용 범 (부경 대학교)
김 부 윤 (부산 대학교)
허 만 성 (한국카이시스템)

학교수학²⁾을 가르치고 배우는 과정에서 교사의 역할은 기술 공학³⁾의 활용으로 변화하고 있다. 기술공학의 역할은 학생들로 하여금 수학에 대한 태도를 변화게 하여, 탐구적이며 창의적인 방법으로 수학을 공부하는데 열의를 갖도록 한다. 반면에 현재의 수학교수는 여전히 보수적이며 환경의 변화에 더디게 적응하고 있으나, 세상이 상당히 빨리 변하고 있으므로 기술공학을 활용하여 현재의 교수를 개선해 나가야 하겠다. 변화에 대한 인식과 갈망은 학습자료, 재정 상태, 그리고 기타 여러 가지 요인보다도 훨씬 중요하며 가장 중요한 것은 교수관점 및 교수전체의 변화에 대한 의지이다. 교사가 기호연산 실행 조작⁴⁾이 가능한 수학 학습용 컴퓨터 응용 소프트웨어⁵⁾와 이들을 탑재한 휴대용 수학학습 전용기⁶⁾를 중등학교수학에 적용할 경우, 수학교육에서 신중히 고려해야 할 것은, 첫째 모든 수준의 학생들을 격려하며, 둘째 대상 영역의 수학학습 내용을 이해하도록 기술공학을 활용한 새로운 교수 기법⁷⁾에 접근할 수 있어야 한다는 점이다.

1. 수학교수에 기술공학을 활용함으로써 얻는 것과 잃는 것

수학교수에 기본적인 기법의 확립 없이 기술공학을 현장에 적용할 경우 결과를 예측할 수 없음을 분명하다. 수학교수에 테크놀로지를 수용하는 의견에는 회의적이며, 비판적인 수학교사 및 교육이론도 현저히 나타나고 있다. 그러나 기술공학의 적용은 실생활 문제뿐만 아니라 급진적인 사람들은 새로운 교수법에 대한 접근을 시도하며, 기본적인 연산과 실행조작 기법 그리고 수학적 능력까지도 향상시킬 수 있다고 한다. 집중적인 기술공학의 적용으로 간과될 수 있는 기술공학을 활용한 교수기법의 개발에는 현장으로부터 획득된 자각적인 실제⁸⁾를 필요로 한다. 연구자로서 교사의 연구활동 실행

1) 이 논문은 1999년도 부경대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

2) School Mathematics: Secondary Level and Advanced(Higher) Level

3) Technology : the use of the word "Technology" became ingrained in the academic literature about the use of calculators and computers for teaching

4) Symbolic Manipulation

5) Computer Algebra & Dynamic Geometry Systems

6) Symbolic Graphing Calculators

7) Skills

은 현실적 요구를 포함하여 다음을 전제로 한다.

- 1) 현재까지 주어진 실체로부터 획득 가능한 자료
- 2) 지식 기반 체계에 근거한 가정
- 3) 이론적으로 가능한 실체
- 4) 과학적 분석방법
- 5) 과학적 분석 방법의 결과에 따른 가능한 실제적 모형

이러한 연구활동의 과정이 학교 수학교실의 수업모형으로 전개될 때 다음의 세 항목, 교수관점과 교수매체 및 이에 따른 교수법의 변화를 들 수 있다.

1) 교수관점 변화

수학적 개념이나 원리를 전수하는 교사주도형에서 학습자 규제성이 강화된 자기 주도형으로 체험 및 조작, 그리고 실생활에 근거한 자료획득이 가능한 실험적 행동을 할 수 있는 환경.

2) 교수 매체의 변화

목표로 하는 교수 또는 학습을 성공적으로 실현하는데 필요한 모든 종류의 교수 학습자료를 포함하는 교육환경-교사의 교수기술 및 학습 분위기까지도 포함.

3) 구조지향(구성주의)교수법에 나타난 특징

물리적인 조작적 자료 및 구체적인 물체를 활용하면 대상화를 용이하게는 하나, 논리적인 이해로부터 연계되는 관계적 이해에 미치지 못하므로, 기술공학적 도구와 기호연산 실행조작을 통하여 기호적인 표현 체계와의 연결을 시도하여 구조를 구체화.

이에 따라, 학생들이 주도하는 문제풀이는 다음과 같은 교수단계를 밟아 가게 된다

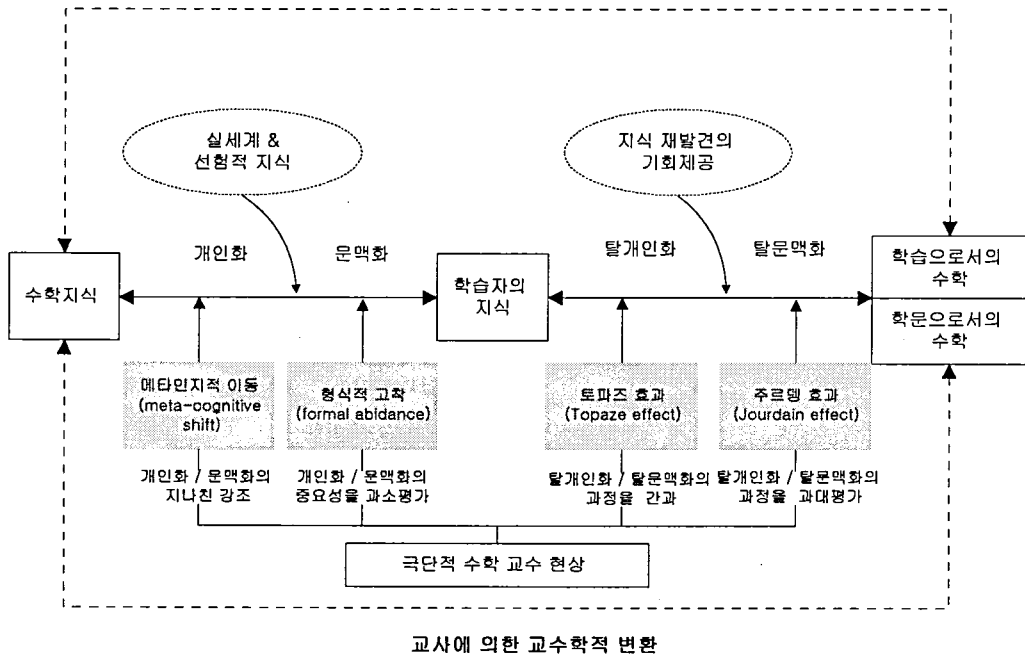
- 단계 1: 능동적인 도입 설정 - 문제제기,
- 단계 2: 개별적 탐구시도 - 가정,
- 단계 3: 소그룹 비교 토론 - 증명,
- 단계 4: 표준화에 접근 시도 - 정리,
- 단계 5: 문제 풀이 - 다른 문제에도 적용

2. 교사는 어떤 과정수행으로 교수기법에 접근할 수 있는가?

교사는 선행된 실험계획으로서 교실수업에 적용된 다른 도구와 마찬가지로 기술공학의 적용에 필요한 기본적인 기법을 구성하여 본다. 이때 중요한 차이점은 다른 도구와 달리 기술공학의 활용은 학생이 어려움 혹은 문제에 직면하였을 때 스스로 해결을 가능하게 하는 것이며, 교사 또한 이점에서는 동일한 과정을 겪게 될 것이다. 기술공학을 적용한 많은 예를 포함하고 있는 전형적인 수학 교과용 지침서도 학생에게 제기된 문제의 풀이에 충분하지는 않을 것이다. 또한 단계별 설명으로 이해

가능한 문제도 학생은 만족하지 않을 것이다. 만약 현재의 교수기법 유형에 기술 공학을 적용한다면 학생의 문제 해결 수행에 결손부분이 발생할 것이다. 이에 대하여 이종영(1999)⁹⁾은 논문 소재 중.

‘컴퓨터 환경에서의 극단적인 교수 현상의 가능성’에서 기호 조작 소프트웨어를 이용한 수학 학습에서는 사용되는 문자나 대수 식에 대한 어떠한 배경 지식이 없이도 인수분해, 두 다항식의 곱, 미분, 적분, 극한의 값을 계산할 수 있다. 문자나 변수에 대한 이해 없이 이런 조작들을 컴퓨터 환경에서 수행한다면, 바로 형식적 고착현상이 일어날 가능성이 높다고 하였다. 또한 과정을 학습해야 할 단계에서는 사전에 충분한 숙달 과정을 거쳐야 하고 그러한 기능을 도입 할 때에는 충분한 수리 능력을 갖춘 단계가 되도록 유의해야 한다는 점이다. 학생들이 기초적인 지식과 기능을 학습하는데 방해가 될 소지가 충분히 있을 것으로 생각된다 하였으며, 검토 도구 이상으로 사용되어서는 안 될 것이다.’ 하였다.



<그림 1> 교수학적인 극단현상들의 상호관계

또한 같은 논문에서 이러한 부정적인 두 가지 극단적인 현상인 메타-인지적 이동 및 형식적 고착에 대한 해결로서 Vygotsky의 근접발달영역 이론과 비계설정’의 소재의 결론에서 컴퓨터 기반 학습 환경에서 학생들과 컴퓨터의 상호작용뿐만 아니라 교사와 언어를 통한 상호작용의 필요성을 들고 있다. 이점에 대한 해결로서는 허만성, 박용범, 김부윤(1999)¹⁰⁾은 대화형 실행 매체¹¹⁾를 작성하여 교실

9) 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적분석, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

수업에 활용함으로써 극복 할 수 있다고 제안하였다. 이로써 수업모형에 대한 교사 자신의 생각을 실현하는 데에는 컴퓨터 응용프로그램 및 하드웨어의 형태와는 무관함으로써 탈개인화/탈배경화와 관련된 두 가지 극단적인 현상인 토파즈 효과와 조르단 효과¹²⁾도 최소화 할 수 있다. <그림 1>은 교수학적인 극단현상들의 상호관계를 설명하고 있다.

소프트웨어의 제작자들이 대부분 교사에게는 잘 알려져 있지 않은 잠재적인 효과를 강조하여도 교사는 대화형 실행 매체에 자신의 교수목표와 교수기술을 실을 수 있다. 따라서 기술 공학을 활용한 새로운 교수기술에 접근하는 방법은 교사가 대화형 실행 매체를 작성하는 것이며, 이는 반드시 필요로 하는 것이 아닐지라도 컴퓨터 세대의 교과서 유형이 될 수도 있을 것이다. 학습자료의 구성은 형식적인 역할에서 새로운 형태의 필수적인 역할을 담당할 서술적 실제 상황을 포함하는 'Contexts' 개념이 도출 될 것 같다. 기술공학의 도입으로 수학 교실의 수업모형은 Contexts 와 기술공학적 도구를 함께 사용함으로써 변화된 평가의 개념까지도 포함한다 할 것이다. 개별화 학습이 가능하며, 개인의 수준에 적합한 방법은 스스로 학습과정에서 결정 될 것이다.

3. 수학교수에 기술공학의 필요는 어떤 이유에 근거하는가?

1990년 Claus는 “인류의 진보는 인류가 고안한 도구에 의해 상세히 기록되었다. 한편으로는 도구는 인지의 결과이고, 또 한편으로 도구를 사용하지 않은 새로운 인지는 불가능하다” 하였다. 17세기에 Leibnitz는 계산기계의 발명을 시도하면서 “인류가 우둔하며 단조로운 계산을 행하는 것에 시간을 낭비하는 것은 노예의 행위와 같이 가치 없는 것이다”라고 하였다. 그러나 현재까지도 수학교수와 평가에는 계산기법¹³⁾의 비율이 여전히 우세하게 나타나 있다. 1995년 Köhler는 그의 교수법 저술에서 “계산은 1) 수학교육에 활동을 위한 필수적인 자료를 제공하며, 2) 부진 학생에게는 성취감을 고취시키고, 3) 교사와 학생에게 변화를 갖게 한다.”라는 의심스런 논리를 펴고 있다. 더불어 “기술공학의 진보는 노력 활동을 하는 부진 학생에게 성취감을 갖게 하는 일련의 연습과정을 박탈한다.”고 쓰고있는 교수법 논문도 있다. 위 두 인용에서 매우 위험한 점이 있음을 지적하지 않을 수 없다. 그것은 바로 부진아 학생에게 성취감을 부여하기 위하여 의미 없는 과제 혹은 수업의 목표에 매달린다면 이것이야말로 가치 없는 것이라 판단된다. 1999년 H. Heugl은 그의 논문에서 “만약 기호연산 실행조작의 지원을 받는 수학교수 방법에서는 일련의 연습과정까지도 의미 있는 수업의 목표로 할 수 있다”고 주장하고 있다. 수학의 주된 목표는 긴 계산과정을 분명히 하여 스키마와 알고리즘¹⁴⁾을 개발

10) 김부윤 (1999). 수학교수-학습을 위한 컴퓨터 응용프로그램 모형 설계에 따른 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)의 작성에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집 9(1), pp.321-332.

11) Interactive Math Texts

12) Topaze & Jourdain effect

13) Calculating Skills

14) Schemes, Algorithms

하는 것으로 높은 수준의 창의적인 능력 배양에 주안점을 둔다.

기호연산 실행조작이 가능한 개선된 교수법을 화이트박스/ 블랙박스 원리¹⁵⁾라 한다. 이 원리는 두 변화의 양상을 나타내며, 그 중 화이트박스 개념은 과정을 이해하는 알고리즘과 학생으로 하여금 근본적이며 연필로 수행할 계산기법에 해당하는 기능을 요구한다. 이 과정 이후의 실행조작은 기호연산 실행을 함으로써 블랙박스 개념이 적용된다. 교수방법의 도구로서 이러한 양상은 첫째로 학생은 제어의 도구를 사용하여 화이트박스를 구성하고, 둘째로 계산용 및 검정 및 해석의 도구로서 블랙박스를 사용함은 수학 및 수학교육의 목적과 일치할 것이다. 이러한 교수방법의 적용은 계산 능력의 중요성에 대한 변화가 주요 논점이 될 것이다. 결론적으로 수학은 추론에 근거한 문제 해결능력이크로, 근본적인 대수능력이 계산능력 보다 우위에 둔 교수방법을 선택하여함은 당연하다 하겠다.

4. 기호연산 실행조작을 활용한 교수기법.

이러한 관점에서 보면, 기호연산 실행조작과 수학교육의 관계는 쉽게 이해 될 수 있다. 이것은 단지 기술공학을 활용한 도구를 사용하는 것과 사용하지 않는 교수학적인 사항을 설명하려 하는 것은 아니다. 기호연산 실행조작을 통한 일반적인 교수이론을 확립하려는 임상적인 연구가 계속 될 필요가 있음을 나타내며, 이러한 과정자체가 개선된 교수 및 학습과정이 수행된다는 뜻이다. 그러나 이러한 과정을 학교 수업에 적용 할 때 발생할 수 있는 극단적인 현상에 대해서는 1절에서 언급하였다. 이러한 현상에 대하여 David Tall은 “학생들이 포괄적¹⁶⁾ 형성체¹⁷⁾를 추상화의 도구로 이용하리라는 점을 보장할 수 없다는 점을 인식하여야 한다”고 하였다. 따라서 교실 수업의 운영에서 형성동인¹⁸⁾을 사용한 안내의 필요성을 제안하였다.

다음은 Tall이 제안한 수업처치의 세 단계이다.

1) 의미를 익히고 파악 : 교사와 학생간의 대화는 ‘강화된 산과술’¹⁹⁾로 지칭되는 대화 속에서 수행되는 것을 의미하며, 또한 수학이 더 이상 교사의 머리 속에서만 존재하거나 책 속에 정적으로 기록되어 있는 것이 아님을 말하고 있다. 즉 수학은 역동적인 과정으로 컴퓨터에서 외적 표상으로 표현되어 진다는 것이다.

2) 학생이 포괄적 형성체를 가지고 자율적으로 학습.

3) 요점을 정리하고 학생들이 구성한 개념 이미지가 수학자들의 개념이미지와 같은 것인지 확인하는 토론과 평가를 한다.

이 때 수학언어로 표현하는 과정에서 개념들 사이의 관계는 대응하는 기호들 사이의 관계 또한

15) White Box/ Black Box Principle

16) 포괄적이라는 용어는 추상적인 개념을 구체화한 예에 학습자가 주의를 집중하도록 함을 의미한다.

17) generic organizer: 사용자에게 개념의 예를 조작하는 편의를 제공하는 환경.

18) 교사, 교재, 적절한 컴퓨터 자료.

19) enhanced : 컴퓨터에 의한 의사소통을 의미한다.

포함되므로, 기호적 이해가 기호체계와 적절한 개념구조 사이의 상호동화라고 잠정적으로 형식화 할 수 있다. 이를 R. R. Skemp는 “기호적 이해는 기호체계와 개념구조 사이의 상호동화이며, 개념구조에 더 영향을 받는다” 라고 그의 저술²⁰⁾에서 표현하였다.

그리고 개념적 실체의 형성과 수학기호사이의 상호 작용에 대한 세 가지 측면을 살펴보면,

- 1) 개념적 실체 형성에서 수학기호의 역할
- 2) 여러 가지 유형의 수학기호와 수학기호를 이용해서 개념구조를 표현하는 방법
- 3) 개념을 대신 하는 것으로의 기호로 설명 할 수 있다.

그러나 기호에 대한 정신적 대상들을 만들 수 있는 경험을 충분히 제공하기 전에 기호조작에 집중함으로써 개념표현과 정교화가 불충분할 수 있다는 문제가 제기 되었다. 이는 기호로 표현할 기회를 준 후, 다시 표준화된 기호로 안내하여 기호와 개념을 동시에 이해하도록 하면 될 것이다.²¹⁾ 이러한 논의의 결과로 보면 수학적 원리와 구조를 발견하기 위하여 기호연산 실행조작의 개념을 제안하게 되었다. 기호연산 실행조작이 가능한 도구를 활용함으로써

- 1) 과정실행을 통하여 결과에 집중 할 수 있고
- 2) 과정을 대상화하며
- 3) 변화과정을 구체적으로 제시함으로써 대상들의 관계에 집중 할 수 있다.

요약하면, 과정과 과정들에 의해 만들어진 과정-개념 관계를 구분해서 집중 할 수 있다. 이를 지식의 선택적 구성 원리²²⁾라 한다. 또한, 학생은 추상화 과정을 이해하는 것이므로 수학교수방법은 고전적인 전개²³⁾로 부터 추상화 과정을 이해하는데 필요한 문제를 제공하고 이에 적합한 새로운 유형의 교수절차²⁴⁾를 고안²⁵⁾하여야 할 것이다. 기호연산 실행조작 도구를 활용한 수학 개념 형성과정과 비계구성에 관하여 Bernhard Kutzler는 그의 논문²⁶⁾에서 다음과 같이 설명하고 있다. 수학개념의 형성과정을 살펴보면,

- 1) 문제가 제시되고, 학습자는 이전에 구성된 지식체계를 이용하여
- 2) 문제풀이 방법을 선택하여,
- 3) 과정실행을 통해 결과를 도출하게 된다.

문제풀이 방법의 선택(과정실행)을 higher-level task, 그 과정에 따른 결과를 lower-level task라 한다. 이는 과정과 결과를 분리하여 변화과정을 구체적으로 제시함으로써 대상들의 관계에 집중, 지

20) Richard R. Skemp. *The Psychology of Learning Mathematics*(1989)

황우형(옮김). *수학학습심리학*. 대우학술총서107

21) Guershon Harel & James Kaput. (1991). *The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts*.

22) *Principle of Selective Construction of Knowledge*, David Tall

23) 정의(Definition)→정리(Theorem)→증명(Proof)→예(Examples)→검정(Test)

24) 문제(Problem)→탐구(Explore)→가정(Hypothesis)→증명(Proof)→정리(Theorem)

25) Kiki Ariyanti Sugeng. (1999). *Maple and Abstraction Process*

26) (1999). *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*

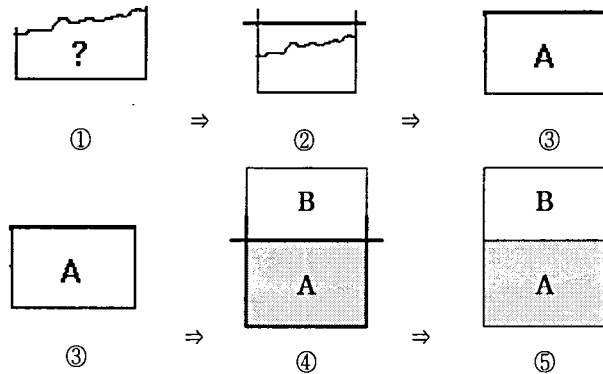
식의 선택적 구성원리가 가능하다. 그러므로 기호연산 실행조작을 수행하는 도구를 사용하는 중에는 학생은 다음의 <그림 2>와 같은 과정을 구성한다.

실행조작방법 선택



<그림 2> 도구를 활용한 실행조작 과정

한편 교사는 학습자가 새로운 문제풀이 방법을 배우는 시도 중, 과정실행에 있어 잘못된 판단은 어떻게 수정하는가? 학습도구로서 기호연산 실행조작은 개념형성에 어떤 이점을 가져오는가? 에 관하여 관심을 갖는다. 이어서 비계구성은 불완전한 지식체계, ②도구를 활용한 비계구성:higher-level skill 수행 시 도구로 lower-level skill 확인, ③과정을 대상으로 대상화(A):Encapsulating, ④대상화된 A를 이용, 추가적 문제해결에 의한 대상화(B), ⑤일반화 $A+B \Rightarrow (A+B)= C$ 의 단계로 볼 수 있다. 이를 <그림 3>으로 보면 다음과 같다.



<그림 3> 비계구성의 단계

이러한 일련의 과정에 따라 수학교육의 목표는 크게 지적훈련²⁷⁾과 문제 해결능력²⁸⁾신장으로 나누어 볼 수 있다. 도구를 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 발생하는 두뇌활동에 의한 계산능력 신장과 사고력 증진을 지적훈련이라 할 수 있고, 수학적 추론을 하여 문제를 파악하고 해결하는 능력이 문제 해결능력의 신장²⁹⁾이다. 따라서 기호연산 실행조작이 가능한 도구 활용은 문제 해결능력의 목표달성에 효과적인 역할을 담당할 것이다.

5. 대화형 실행 매체를 작성할 때 유의하여 검토 할 항목은?

27) Intellectual Sports: Theoretical Meanings of Mathematical Concepts

28) Problem Solving: Application

29) Problem Solving by Mathematical Reasoning

CASs 와 DGSs는 기호연산 실행조작이 가능하며, 수학기념을 이해하고 수학기념을 응용할 수 있는 수학교수용으로 이미 만들어진 수학적 도구이다. 앞에서 보았듯이 현재와 비교하여 교수방법 뿐만 아니라 교수목적까지도 상이함을 보였다. 이에 대하여 황혜정³⁰⁾은 III. 새로운 검정 기준의 의미 소절에서 “우리나라의 수학과정은 컴퓨터와 계산기를 비롯한 교구의 사용이 교사나 학교의 재량에 따라 이루어지도록 권장하고 있다. 그러나, 실제로 학교 현장에서는 이에 대한 구체적인 교수-학습 자료 및 지침이 없어 제대로 활용하지 못하고 있다. 그러므로, 기본적인 수학적 아이디어를 학생들로 하여금 직접 실험하거나 제작해 보고, 또 컴퓨터나 구체물을 이용하여 수학적 원리와 규칙을 발견하고 일반화하여 적용할 수 있도록 교육적 기반을 조성하는 일이 중요하다.” 하였고, 또한 같은 절에서 “평가의 중요한 기능은 학생의 학습 정도나 결과를 파악하는데 그치는 것이 아니라 그들이 학습 상태를 점검하고 처치하는 데 있다고 할 수 있다.” 고 하였으며 이는 평가의 방법이 학습과정에 포함되어야 한다는 점을 강조한 대목이라 생각된다.

학교수학을 가르치고 배우는데 이러한 개념을 활용함은 매우 중요한 귀결이라 할 수 있으며, 수학 교수의 개선을 가능하게 하는 도구이다. 그러나 교사와 학생 모두에게 가장 핵심이 되는 것은 과정을 수행하는 동안 과정의 효율성에 대한 피드-백을 획득 할 방법이 문제이다. 이 문제를 Vlasta kokol 은 “검정에 관한 의문”³¹⁾ 이라고 하였다. 이는 과제물이나 연습문제와는 의도/ 기능 그리고 내용에서 상당한 차이점이 있다. 이는 다음의 몇 가지 중요한 사실을 고려하여 작성하고 또한 분석하여야 한다.

작성 유의사항을 보면

- 1) 특정 내용을 활용한 일반적 목표이어야 하고 이는 기법이 아니라 수행능력 이어야 한다.
- 2) 이 능력은 교수과정 중의 대화에 의하여 구성된다.

Laughbaum은 이를 “기법에 가려진 개념”³²⁾이라 하였다.

다음으로 분석할 때 고려하여야 할 사항으로는

- 1) 실제상황의 모델링과 수학적 내용에 대한 추상화의 기본적인 능력.
- 2) 문제해결에서 요구된 수학적 구조와 계산기법의 분배에 관한 분석.

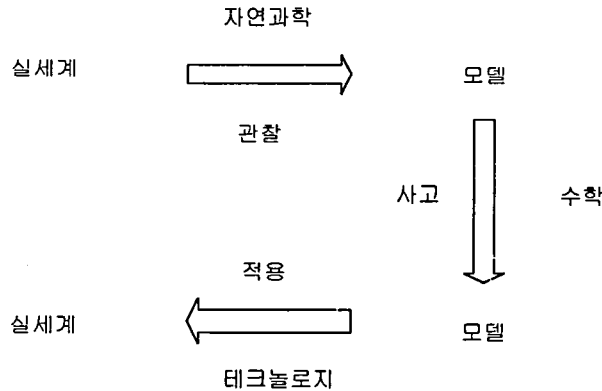
을 하여야 한다. 이에 따라 대화형 실행 매체를 작성할 때에 다음의 요소를 고려하여야 한다. 여기서의 초점은 과거로부터 현재까지 수학교육의 가치 및 목표로 간주하고 있는 문제해결 과정에서 획득할 수 있는 기본적인 대수능력의 향상이다. 이에 관하여 Bruno Buchbergers는 “수학은 추론에 의한 문제해결 방법이다” 라고 정의하였으며 <그림 4>로 나타내고 있다. 수학적 지식의 발견 과정은 ‘실험 > 정확 > 응용’의 세 단계를 거친다고 하였으며, 각 단계별 과정에 대한 설명은 다음과 같다.

30) (2000.5). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고. 한국 수학교육 학회지 시리즈 A, <수학교육> 제 39(1)집, 1-9

31) (1999). Exam question when using CAS for school mathematics teaching

32) (1988). the Concepts behind the Skill

- 1) 알고 있는 수학적 알고리즘을 이용해 문제를 푸는 과정에서 관찰된 바를 통해 어떤 개념을 추측. (The phase of 1. experimentation)
- 2) 추측을 증명을 통해 이론으로 확정하고, 새로운 알고리즘 실행.(The phase of 2. exactification)
- 3) 발견된 새로운 알고리즘 활용. (The phase of 3. Application)



<그림 4> 수학적지식의 발견

이에 Helmut Heugl³³⁾은 근본적인 대수능력에 관한 중요한 요소로서 다음의 일곱 항목에 대하여 설명하고 있다.

1) 표현과 형식을 찾는 능력

기호연산 실행조작이 가능한 도구를 학교수학에 활용할 때 학생의 언어를 수학적 언어로 변환하는 과정을 수행한다면, 계산이 아닌 계산능력까지도 포함한 대수능력의 신장을 기대할 수 있다. 즉, 대화형 실행 매체가 기호연산 실행조작의 과정에서

- 가) 구어체인 문장에서
- 나) 형식어로
- 다) 수학적 언어로 표현된 기호적인 대상

의 세 단계를 구현하는 일련의 안내까지도 한다면 언어능력으로부터 획득되는 교수학적 개념에도 일치 될 것이다.

2) 구조와 같은 표현으로 변환하는 인지능력

구조인지활동을 배경으로 기본적인 대수법칙에 관한 필수적인 지식으로서 수학적 지식 없이는 기호연산 실행조작을 성공적으로 수행할 수 없도록 하는 능력을 말하며, 기호연산 실행조작으로부터 획득된 결과와 구조를 해석한다. 이때, 다양한 과정을 수행하여 도달한 각각의 결과가 동등한지를 검

33) (1999) The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems. (ACDCA)

토한다

3) 질적 검증에 관한 능력

수학적 지식과 능력을 검증하므로 해와 해에 대한 해석의 옳고 그름을 확정하고, 학생 스스로 발견할 수 있는 검증 전략이 포함되도록 한다. 좀더 높은 수준의 검증능력은 실험적이며, 독자적인 학습과정을 통한 모델링에 대한 해석능력까지도 포함한다. 왜냐하면 각각의 실행조작으로부터 다른 결과를 얻을 수 있기 때문이다. 대수와 기본 알고리즘을 획득하게 되어 문제와 연계된 폭넓은 이해가 가능하게 한다.

4) 계산능력

목적으로서 규정된 상황 하에서 주어진 계산과정을 수행하는 인간능력을 말하며, 이는 알고리즘과는 구별된다. 여기서는 경험수준의 대상과 계산수준의 기호 사이의 관계를 설정함으로써, 수학적 개념과 의사소통이 가능케 한다. 다시 말해서 도구적 이해가 관계적 이해 수준에 필수적인가 하는 문제를 검증할 수 있어야 하고, 관계적 이해가 도구적 이해에 필수적 기법을 지원할 수 있도록 구성한다. 다시 말하면, 형식과 내용에 관한 이해가 서로 연계되도록 한다.

5) 시각화 능력

추상적인 사실에 관한 그래픽 표상으로서의 이해를 말한다. 함수의 특징과 가장 중요한 점을 발견하여 그래프를 그릴 수 있게 함으로서 개념에 관한 다양한 모형이 획득될 수 있다. 표상간의 이동으로 대수문제를 그래프를 활용하여 해결하며 이에 대한 분석 및 토론을 목표로 한다.

6) 모듈을 사용할 수 있는 능력

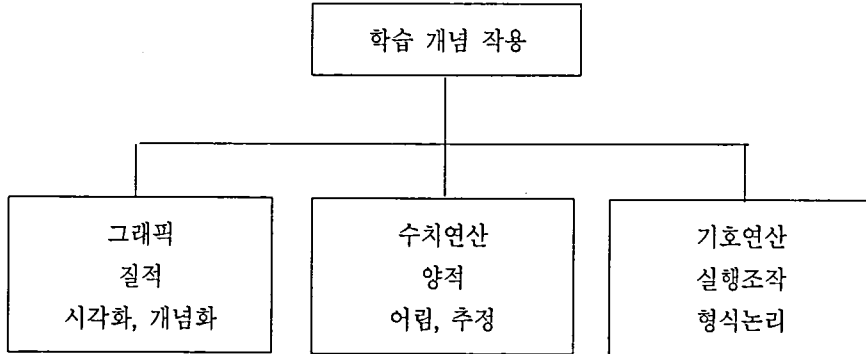
모듈이라 함은 학습자가 문제에 관한 모델을 갖는다는 것을 의미하며, 모듈을 사용한다 함은 스스로 계산을 수행하도록 하는 것을 의미한다. 학생이 수식의 구조를 좀더 잘 이해할 수 있도록 단순화하면 알고리즘을 발견할 수 있을 것이며, 서술적 언어표현을 수학적 언어표현으로 변환하는 전략을 이 단계에서 구사할 수 있도록 한다.

7) 도구사용에 관한 능력

근본적인 대수능력을 조작하는데 필요로 하는 최소기능을 습득하도록 구성한다. 최초로 사용할 때 발생 할 수 있는 도구 사용의 장애를 최소화하기 위하여 각 단계에 필요한 기능에 대한 단편적인 예를 구성하여 도구에 대한 흥미를 갖도록 한다.

이러한 요소들을 고려함으로써 교사중심에서 소그룹의 학생 중심으로, 연역적 방법에서 귀납적 방법으로 교수 형태의 변화를 생각할 수 있다. 또한 연습과 숙제, 그리고 시험에 이르는 일련의 수학문제를 다루는 교수목표의 변화도 수반될 것이다. 이에 따르는 변화를 요약하여 보면, 지정된 내용을 수행하는 과정을 검정하게 되며, 기법이 아닌 능력을 그리고 학습한 내용에 대하여 토론 할 수 있는 능력의 배양이 교수목표로 될 것이다. 따라서 교실 수업에서 사용되는 대화형 실행 매체는 핵심적인 내용-개념, 원리, 법칙 등-을 구조적으로 혹은 통합적으로 습득하게 하기 위해 해당 내용에 대한 절차를 안내하거나 유도하는 방식으로 구성하고, 또 그러한 내용을 중심으로 전체 내용이 연결 되도록

함으로서 단원간 연계를 강조하여 학습자 자신이 분류 한 스키마를 구성하는데 도움이 되도록 하여야 한다.



<그림 5> 대화형 실행매체(IMTs)의 표상과 학습개념 요소

Kaput, J. J.(1998)는 수학적 구조의 표상에 나타나는 수학적 특징과 인지적 특징 사이는 상호보완적(반대 방향의 상호 보완적인 과정) 이어서, 여러 가지 표상을 이용하여 어떤 주제에 대한 한정되고 구체적인 이해로부터 추상적이고 융통성 있는 이해로의 전이를 할 수 있도록 학생들을 돕는 방안 에 관한 연구는 계속할 필요가 있다 하였다.

학습과정에서 상호보완성의 교수학적 이용은 <그림 5>와 함께 다음과 같이 요약된다.

- (1) 하나의 표상 이용하기
- (2) 하나 이상의 표상을 병행하여 이용하기
- (3) 함께 이용된 표상들 사이의 연결 고리 만들기
- (4) 표상들의 통합과 그들 사이의 유연한 전환

그리고 이것은 리처드 스킴프(Richard R. Skemp)의 지능모델<그림6> 및 포착효과(Capture effect)에 대한 구조의 표현과도 일치한다.

		이해의 종류		
		도구적	관계적	논리적
사고 활동 의 양식	직관적	I_1	R_1	L_1
	반영적	I_2	R_2	L_2

<그림 6> 지능 모델

기호 연산조작의 배경과 수학 지식 체계에 대한 상호작용은 개념적 실제의 형성과 수학적 기호사 이의 상호작용에 관한 세 가지 측면으로 요약된다.

첫째, 개념적 실체 형성에서의 수학적 기호의 역할

둘째, 여러 가지 유형의 수학적 기호와 수학적 기호를 이용해서 개념구조를 표현하는 방법

셋째, 개념을 대신하는 것으로서의 기호

그러나 기호에 대한 정신적 대상들을 만들 수 있는 경험을 충분히 제공하기 전에 기호조작에 집중한 개념표현과 정교화가 불충분하게 될 수도 있으나, 기호로 표현할 기회를 준 후, 다시 표준화된 기호로 안내하여, 기호와 개념을 동시에 이해 할 수 있게 된다. 다시 말하면, 추상적 개념이 컴퓨터 및 계산기에서 실행, 표현될 때 그 개념은 구체적으로 형상화되어 마음속에 존재하게 된다. 기술공학의 기능과 활용방법을 확립함으로써, 기술공학의 존재가 「어떻게 수학내용의 강조 점에서 변화를 내포하는가? 질적으로 다를지도 모를 학생들의 사고 방식을 내포하는가?」라는 두 가지 의문에 대하여 학습자는 경험과 선형지식에 더하여 과정실행 속에서 대상화하고 수학기념을 일반화하여 개념을 재구성한다.

6. 교실수업의 검정에 관한 피드-백과 평가내용 영역의 관계

중등학교의 수학교실의 수업에서 CAS를 활용한다는 것은 교수법의 변화, 가르쳐야 할 내용 및 나아가 최소한의 범위에서 평가의 절차와 방법에 관한 변화까지도 포함한다 할 것이다. 따라서 전통적인 평가의 유용성에 근거하여 CAS환경에서 수학교실에서 학생의 성취도에 대한 검정의 방법과 평가내용 영역의 관계를 살펴보고자 한다. 첫째, CAS의 활용은 수학교실에서 교수-학습의 변화를 기대 할 수 있다. 개별적인 개념으로 일반적 개념에 대하여 근본적인 능력의 신장을 기대할 수 있다. 이는 실세계 상황에 대한 모델링으로 수학교과 내용에 대한 재현을 실행 할 수 있으며, 계산기법과 사고 절차로부터 일반적인 개념을 획득 할 수 있다. 또한 전통적인 수학교수업에서 학생의 성취도에 대한 검정은 계산능력에 대한 검정이 지배적이나, CAS환경에서 수학교수업에 대한 학생의 성취도에 대한 검정은 이론 및 응용 지향적인 물음과 교사의 수업에 관한 검정 물음의 유형으로 규정 할 수 있다. 평가문항의 측정 형태별 구분은 15분 혹은 30분형으로 수학교수업 내용에 관한 근본적인 능력-계산, 시각화-에 대한 검정 및 CAS 사용의 능력과 50분 혹은 100분형으로 문제해결 능력, 응용지향의 논의, 쟁점, 추론 및 해석형으로 나눌 수 있다. 평가문항의 내용 영역 구분은 능력I (Abilities): 개념이해, 절차지식, 문제해결과 능력II (Competence): 추론, 연결, 의사소통, 각 요소의 가닥 연결에 근거하여 다음의 <그림 7>로 나타낼 수 있다.

개념이해 추론	개념이해 연결	개념이해 의사소통
절차지식 추론	절차지식 연결	절차지식 의사소통
문제해결 추론	문제해결 연결	문제해결 의사소통

<그림 7> 능력사이의 연결 가닥

검정의 물음형태 및 내용 영역의 구분은 수학의 교수-학습 과정에서 교수법의 도구로서 매우 중요한 역할을 담당한다. 학습과정에서 일어나는 피드-백의 획득뿐만 아니라 교수상황의 피드-백에도 핵심이 된다. 이는 다음의 두 가지, 수학개념의 이론적인 의미의 이해와 실세계상황의 모델링에서 수학개념의 사용 교육적 목표를 달성하는데는 필수적이라 생각된다. 수학 교수-학습 상황에서 CAS를 사용하는 목표는 가장 자연스러운 상태에서 학생들의 성취도를 검증하는데 도움을 준다.

7. 결론

컴퓨터 대수체계 및 동적 기하에 기반한 대화형 실행매체가 교수-학습을 좀더 향상시킬 수 있는 도구 중의 하나로 고려할 수 있는 이유는 컴퓨터 대수체계로부터 제공될 수 있는 수학 학습과 교수 사이에 일어나는 수학 지식 체계에 대한 상호작용을 이해하려는 데 초점을 두고 있기 때문이다. 즉 수학 세계를 탐구하고, 학습의 단서를 제공하는 도구가 되기 때문이다. 따라서, 수학교육에서 기술공학의 역할은 수학을 가르칠 때에 다음과 같은 준거에 따라 수학교육용 프로그램을 수업에 활용하는 것이다³⁴⁾.

준거 :

1. 교실 수업에서 직관적으로 설명될 수 없는 문제에 접근할 수 있는가?
2. 학습자의 생각으로 과정 수행에 참여할 수 있는가?
3. 학습자의 실수나 의문에 즉각 답할 수 있는가?
4. 다음 단계로의 이행에 필요한 생각의 시작점을 제공하는가?
5. 단순모델로부터 좀더 복잡하고 동적인 문제로 일반화가 가능한가?

<그림 6: CASs & DGSs를 내장한 Technology>[부록참조] 은 컴퓨터 대수 체계가 과학과 응용공학 분야에서도 널리 사용되고 있다는 사실을 수학교육의 연장선에서 고려하여야 함은 물론, 컴퓨터 대수체계와 연동된 응용프로그램, 웹기반형(WBI³⁵⁾) 및 휴대형 테크놀로지(Hand-held Graphing Calculator) 를 사용하는 것이 교수-학습의 효율성을 높일 수 있음을 보여주고 있다. 결론적으로 Computer Algebra Systems와 Dynamic Geometry Systems을 학교수학에 활용하려면 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)의 작성과 기호연산 실행조작(Symbolic Manipulation)의 환경은 필수적이라 생각된다.

34) 여기서 '수업에 활용한다'라는 말은 학습자의 입장에서 역할의 반전 — 학생이 교사의 역할을, 컴퓨터가 학생의 역할을 수행 — 이 가능하기를 의미한다.

35) Web-based Instruction

8. 전망 및 과제.

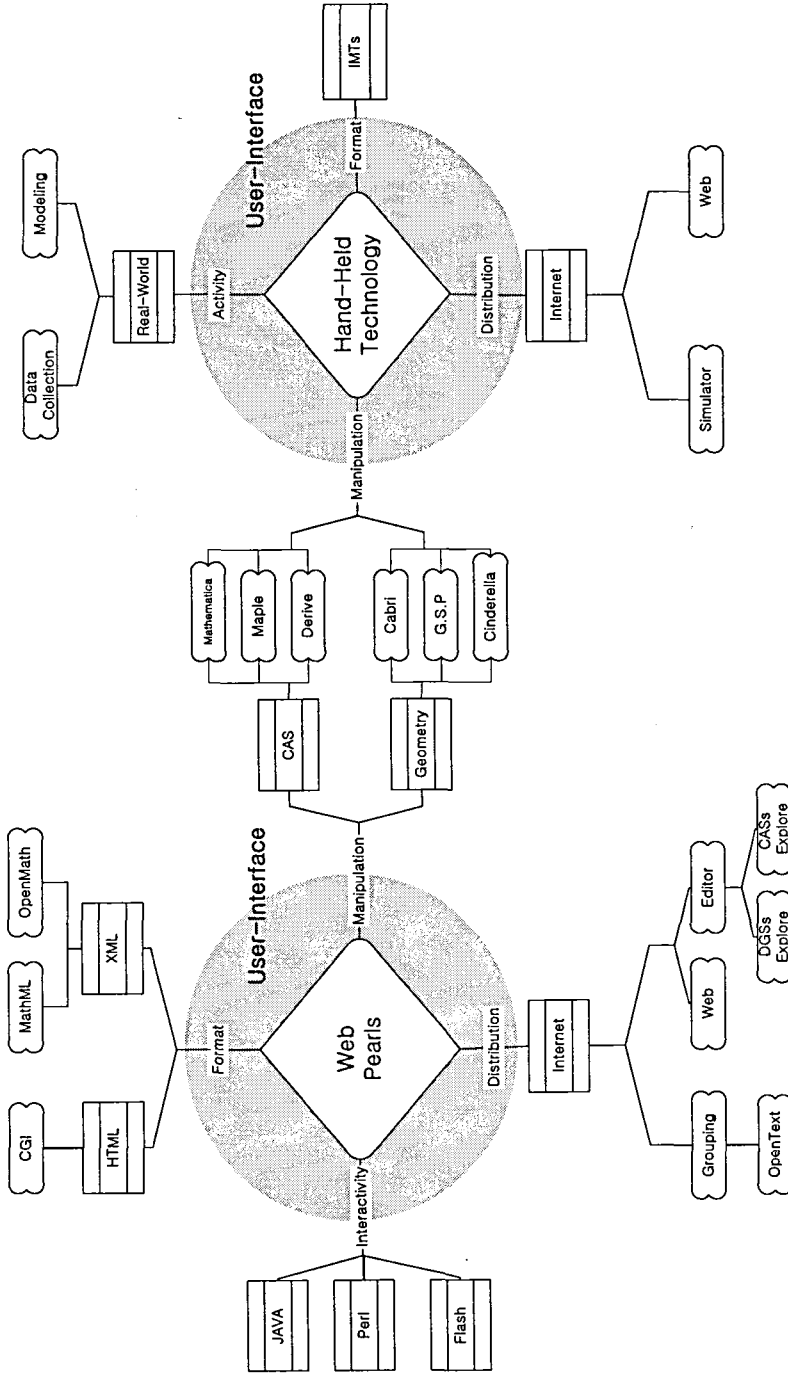
앞에서 우리는 수학교사가 컴퓨터 대수체계 및 동적 기하와 연계한 응용 프로그램을 활용한 대화형 실행 매체를 작성할 때에는 응용 프로그램 체계선택의 중요성에 대하여 알아보았다. 더불어 서술적 실제 상황을 포함하는 'Contexts'의 구성으로 학습의 진행과정에 근거한 평가도 포함할 수 있음을 설명하였다. 다만, 교사의 입장에서는 과정수행에 대한 학습자의 언어(Language) 및 구어적 문장 표현(Texts) 선택성향에 근거하여 학습과정에 대한 이해 및 평가가 가능한 교수-학습의 체계로서 'Formal Theory'에 대한 연구를 필요로 한다.

참 고 문 헌

- 이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 허만성 · 박용범 · 김부윤 (1999). 수학교수-학습을 위한 컴퓨터 응용프로그램 모형 설계에 따른 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)의 작성에 관한 소고, 대한수학교육학회 논문집, 9(1), pp.321-332. 서울: 대한수학교육학회.
- 황혜정 (2000). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고, 한국수학교육학회지 시리즈 A, <수학교육> 39(1), pp.1-9, 서울: 한국수학교육학회
- Bernhard Kutzler. (1999). Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education, *A Collection of papers*, Edward d. Laugbaum(Ed.), The Algebraic Calculator as a Pedagogical tool for Teaching Mathematics, pp.98-109.
- David Tall. (1992). *Advanced Mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers.
- David Tall. (1992). *Symbolic computation in undergraduate Mathematics Education*, Zaven A. Karian.(Ed.), Mathematical Processes and Symbols in the Mind, pp. 57-68.
- Ed Dubinsky.(1992). *Symbolic computation in undergraduate Mathematics Education*, Zaven A. Karian.(Ed.), A Learning Theory Approach to Calculus pp. 43-55
- Estela A. Gavosto; Steven G. Krantz & William McCallum. (1999). *Contemporary Issues in Mathematics Education* (Eds.), Cambridge University Press.
- Helmut Heugl. (1999). The Necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems, *Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy*, 1999.
- Josef Böhm & Bundeshandelsakademie St. Pölten. (1999). Basic Skills and Technology-not a Contradiction, but a Completion. *Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy*, 1999.

- Juergen Maasz. W. Schloeglman. (1994). Black Boxes im Mathematikunterricht, in: *Journal für Didaktik der Mathematik* 1/1994.
- Kaput, J. J., & Roschelle, J. (1999). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Studies in Mathematics Education Series 10: Rethinking the Mathematics Curriculum* pp.155-170. London. Falmer press.
- Richard R. Skemp.(1989). *The Psychology of Learning Mathematics*, 황우형(옮김), 수학학습심리학. 대우학술총서 107.
- Vlasta kokol-voljc. (1999). *Exam questions when using CAS for School mathematics teaching*.
- Wilfrid Herget; Helmut Heugl; Bernhard Kutzler & Eberhard Lehmann. (2000). *Indispensable Manual Calculation skills in a CAS Environment*, (<http://www.kutzler.com/main.html>)

[부록]



< 그림 6: CASs & DGSS와 연계한 수학교육용 Technology >