韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 211-232.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 211-232.

수학교육에서 Maple[1] 모듈의 활용 방안[2]
-고등학교 이차곡선을 중심으로-

박 용 범 (부 경 대 학 교)
박 일 영 (부산과학고등학교)
김 한 희 (부산여자고등학교)
임 기 문 (부산동고등학교)
허 만 성 (한국카이시스템)

수학 교수-학습에서 기호 연산 조작이 가능한 수학 응용소프트웨어인 Maple을 활용한 지도 방안을 모색해 보고자 한다.
Maple의 내장함수를 단순히 이용하는 것보다 모듈을 사용하여 학습자가 학습내용에 능동적으로 단계적인 풀이과정과 수학적 개념을 찾아갈 수 있도록 하였다. 이를 위해 Maple Procedure를 사용하여 Package를 생성하고, 이를 Cell sheet에 적용시켜, 이차곡선에 대한 일반화된 개념 확립과 교사 - 매체 - 학생간의 원활한 상호작용으로 학생들의 문제해결력 향상에 도움이 될 수 있는 교수-학습 모형을 탐색해 보고자 한다.

Ⅰ. 연구목적 및 필요성

학교 수학의 가르치고 배우는 과정에서 교사의 역할은 기술 공학의 활용으로 변화하고 있다. 그러나 현재의 수학 교수-학습방법은 아직도 보수적이며 환경의 변화에 더디게 적응하고 있다. 세상이 우리의 생각보다 빨리 변하고 있어 기술공학을 활용한 교수-학습방법의 개선이 필요하다고 본다. 기술공학은 학생들로 하여금 수학에 대한 태도를 변화시키고, 탐구적이며 창의적인 방법으로 수학을 공부하는데 열의를 갖도록 한다. 변화에 대한 인식과 갈망이 학습자료나 재정, 그리고 다른 여러 요인보다 훨씬 중요하다. 즉, 교수관점 및 교수견해의 변화에 대한 의지가 가장 중요한 것이다.

오늘날 수학 교육이 안고 있는 문제점들은 여러 측면에서 그 요인을 찾을 수 있겠지만 이를 개선하기 위해 무엇보다 먼저 학생들이 흥미를 가지고 수학을 대할 수 있도록 전통적인 수학 수업 형태에서 탈피한 새로운 방법의 지도 계획 수립이 요구되어진다(NCTM).

기술 공학을 활용한 새로운 교수기술에 접근하기 위해서는 교사가 대화형 실행 매체(Interactive Mathematics Texts, IMTs)를 작성하여야하며, 이는 컴퓨터 세대의 교과서 유형이 될 수 있을 것이

1) Waterll 상표임.
2) 이 논문은 2000년도 부경대학교 중등교원 협동연구비 지원에 의하여 연구되었음.

다. H. Heugl은 "만약 기호연산 실행조작(Symbolic Manipulation)의 지원을 받는 수학교수 방법에서는 일련의 연습과정까지도 의미 있는 수업의 목표로 할 수 있다"고 주장하고 있다. 수학의 주된 목표는 계산과정을 분명히 하여 스키마와 알고리즘을 개발하는 것으로 높은 수준의 창의력 배양에 주안점을 둔다. 따라서 근본적인 대수능력을 계산능력 보다 우위에 둔 교수방법을 선택하여야 한다.

또한 수학 문제 해결에 있어서 각 단계의 알고리즘을 이해하고 있다면 굳이 중간 단계의 계산을 일일이 하지 않아도 되지만, 단계별 수식의 전개가 이해되지 않는 학생은 수식변환의 과정을 차근차근 살펴보는 것이 학습에 도움이 될 것이다. 이와 같은 단계별 풀이 과정을 규칙을 이용한 패턴 매칭으로 처리하는 것은 Rewriting system에 속하는데, 주로 중·하위권 학생에게 단계별 풀이 과정이 학습에 도움이 되는 것으로 보고되었다(전영국, 2000).

컴퓨터를 이용한 교수·학습에서는 도구를 적절히 이용하면 문제해결 중심의 구체적인 사례로부터 추상화에 이르는 경험을 맛볼 수 있게 해 줄 뿐만 아니라, 수학의 일반화 개념을 도와주고 논리적 추측을 도와준다. 개인용 컴퓨터가 제공되지 않는 일반교실에서 Maple과 같은 수학 교수-학습용 패키지를 이용하여 모듈을 구성하면 위의 학습효과를 기대할 수 있을 뿐만 아니라 자기 스스로 개념을 이해하고 논리적 추측을 도와주며 사고과정을 되돌아보게 하는 장점을 가지고 있다.

교육 매체들의 유기적인 연결과 교사와 학습자 사이의 상호작용을 성공적으로 이행하기 위해서는 수학적 사고와 창의력 배양을 위한 '교재의 재구성'과 학습자 스스로가 학습내용에 대하여 능동적인 태도로 수학적 개념을 찾아가도록 하는 '학습수행지(Work-Sheet)'의 개발이 필요하다.

본 연구에서는 기호연산 실행조작이 가능한 컴퓨터 응용소프트웨어인 Maple을 사용하여 고등학교 이차곡선의 도입과정을 구성하였다. Maple의 내장함수를 단순히 이용하는 것보다 모듈을 사용하여 학습자가 학습내용에 능동적으로 단계적인 풀이과정과 수학적 개념을 찾아갈 수 있도록 하였다. 이를 위해 Maple Procedure를 사용하여 Package를 생성하고, 이를 Cell sheet에 적용시켜, 이차곡선에 대한 일반화된 개념 확립과 교사 - 매체 - 학생간의 원활한 상호작용으로 학생들의 문제해결력 향상에 도움이 될 수 있는 교수 학습 모형을 탐색해 보고자 한다.

먼저 Maple을 사용한 대화형 실행매체를 작성하여, 교사 - 매체 - 학생간의 원활한 상호작용을 도모하고, 스스로 탐구하고 문제를 해결해나가는 창의적인 학습을 수행할 수 있도록 하며, 수학에 대한 긍정적인 태도와 자신감, 추측 능력을 기를 수 있는 지도 방안을 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학 교수·학습에서의 구성주의

최근의 수학 교육의 대표적인 흐름의 하나는 수학 교수·학습의 과정에서 구체적인 조작활동을 통하여 학생 개개인이 가능한 한 스스로 수학 지식을 구성할 수 있게 해주어야 한다는 구성주의적 수학 교육 이론이다. 인식론의 한 형태로 시작된 구성주의는 '지식의 자주적 구성', '지식의 생장 지

향성', '지식의 사회적 구성'을 지식 구성의 원리로 보고, 이의 구조적 이해와 구성주의에 입각한 수학 교수·학습론의 연구를 활발히 진행하고 있다. 수학 지식이 구성된다는 것은 수학 지식이 주는 자의 정신 세계에서 받는 자의 정신 세계로 전달되는 '상품'이 아니며, 특히 '학생중심적'이기를 요구하는 새로운 수학 교육에서의 수학지식은 교사의 도움을 받아 학생 스스로 구성하는 것으로서 교사는 학생으로 하여금 스스로 문제를 인식하고 능동적으로 그것을 해결할 수 있도록 안내해 줌으로써, 학생들이 '수학하는(doing mathematics)' 참 맛을 맛볼 수 있게 해주어야 한다는 것이다.

'수학 교수학적 구성주의의 원리'로는 지식 전달자에서 안내자로의 교사역할 변화와 능력과 개성의 차를 고려하는 '학생 중심적 개별화의 원리', 교사의 계획되고 의도적으로 준비된 상호작용에 의한 발문이 필요함을 강조한 '발문 중심적 상호 작용의 원리', 교사와 학생들의 상호 의견 교환과 논의를 거쳐 수학 지식의 합의 영역을 도출해 내기 위한 의미 지향적 활동의 기회가 제공되어야 함을 강조한 '의미 지향적 활동의 원리', 학생의 마음속에서 이루어지는 것으로 수학 지식의 자주적인 구성을 가능하도록 해주는 심리적 메커니즘으로 동화와 조절 등에 의하여 내면화된 자주적 활동을 강조하는 '반영적 추상화의 원리' 등이 있다.(박영배, 1996)

수학교육의 목표가 학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성이라고 볼 때 학생들의 다양하고 창의적인 문제해결 과정의 개발을 격려하고, 수학적 지식이 구성되어지는 것으로 수학적 학습을 구성의 과정을 탐구하고 이해하며 그리고 교사와 학생 자신들의 수학적 문제해결 경험으로부터의 추상화를 포함하는 교사의 준비와 개발을 위한 목표를 설정한다는 일련의 생각은 구성주의적 관점을 잘 나타내고 있다. 구성주의적 수학 교육은 교육의 주체가 학생이 되고 교사는 단지 학생이 수학 지식을 형성해 나가는 과정에서 보조 역할로서 존재한다. 교사는 절대로 수학 지식을 학생들의 머리에 직접 넣어 줄 수 없고 학생 스스로가 구성해 나가야 한다고 주장했던 것이다(Steffe, 1991).

Kilpatrick은 '첫째, 지식은 환경으로부터 수동적으로 받아들여지는 것이 아니라 인식 주체에 의해 능동적으로 구성되는 것이다. 둘째, '알게 된다'는 것은 인식 주체가 자신의 경험세계를 스스로 조직화해 가는 적응과정이다. 셋째, '알게 된다'는 것은 인식주체의 정신세계와는 독립적으로 이미 존재하고 있는 세계를 발견하는 것이 아니다.' 라고 구성주의의 세 가지 기본 가정을 정리하였다.

구성주의에 따르면 지식은 학생에 의해 자주적으로 구성되나 이것은 지식이 저절로 구성된다는 것을 의미하지는 않는다. 오히려 지식이 적절한 환경에서 교사의 안내 또는 도움을 받아 구성되는 것으로 보고 있다. 이는 교사의 역할을 무시하는 것이 아니라 오히려 강조하고 있다.

2. 수학 교육에서의 CAS의 활용

수학에 관련된 대상을 기호(symbol)로 처리하여 연산을 수행하는 컴퓨터 시스템으로서 수치계산과 대수적 연산을 수행하고 필요한 경우에 함수를 그래픽으로 처리하는 시스템을 통틀어 컴퓨터 대수 시스템(Computer Algebra System, CAS)으로 부르고 있다. 컴퓨터 대수 시스템을 기호연산 시스템으로 간주하기도 하는데, 그것은 기호를 사용한 수학적 연산을 수행한 후에 연산의 결과를 대수적

인 정확한 결과와 함께 수치적으로 근사값을 계산해 내는 특징 때문에 붙여진 이름에서 연유된다.

수학 문제를 해결하는 알고리즘을 이해한 학생이라면 수식의 결과만 신속하게 처리하는 것이 다른 수학의 개념을 탐구하는데 더 도움이 될 것이지만, 문제해결의 단계를 이해하지 못하는 학생은 손으로 직접 문제를 풀어보면서 단계별 풀이과정을 습득하는 것이 바람직하다. 기호연산을 조작함으로써 풍부한 수학적 표현을 경험하게 되고, 대수적 기호 처리를 기하학적 표현으로 변환하는 과정을 살펴봄으로써 수학개념의 이해를 증진시키는 것이 CAS가 수학교육에 도입되는 근거가 된다.

기호연산 실행 조작이 가능한 수학 학습용 컴퓨터 응용 소프트웨어를 중등 학교 수학교육에 적용할 경우 신중히 고려해야 할 것은 모든 수준의 학생들을 격려하며 대상 영역의 수학학습 내용을 이해하도록 기술공학을 활용한 새로운 교수기법에 접근할 수 있어야 한다는 점이다.

기술공학은 실생활 문제뿐만 아니라 새로운 교수법에 대한 접근 시도와 기본적인 연산과 실행조작 기법 그리고 수학적 능력까지도 향상시킬 수 있다고 한다. 그러나 수학교수에 기본적인 기법의 확립 없이 현장에 적용할 경우 결과를 예측할 수 없음은 분명하다. 수학교수에 테크놀로지를 활용하는데 있어서 회의적이거나 비판적인 수학교사 및 교육이론도 많다.

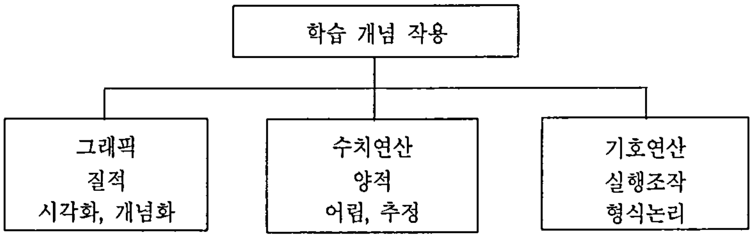
만약 현재의 교수기법에 기술 공학을 적용한다면 학생의 문제 해결 수행에 결손부분이 발생할 것이다. 이에 대하여 이종영(1999)은 '컴퓨터 환경에서의 극단적인 교수 현상의 가능성'에서 기호 조작 소프트웨어를 이용한 수학 학습에서는 사용되는 문자나 대수 식에 대한 어떠한 배경 지식이 없이도 인수분해, 두 다항식의 곱, 미분, 적분, 극한의 값을 계산할 수 있어, 문자나 변수에 대한 이해 없이 이런 조작들을 컴퓨터 환경에서 수행한다면, 바로 형식적 고착현상이 일어날 가능성이 높다고 하였다. 또 과정을 학습해야 할 단계에서는 사전에 충분한 숙달 과정을 거쳐야 하고 그러한 기능을 도입할 때에는 충분한 수리 능력을 갖춘 단계가 되도록 유의해야 한다는 점을 들었다. 학생들이 기초적인 지식과 기능을 학습하는데 방해가 될 소지가 충분히 있을 것으로 생각되어 검토 도구 이상으로 사용되어서는 안 될 것이라고 하였다. 또한 부정적인 두 가지 극단적인 현상인 메타-인지적 이동 및 형식적 고착에 대한 해결로서 컴퓨터 기반 학습 환경에서 학생들과 컴퓨터의 상호작용뿐만 아니라 교사와 언어를 통한 상호작용의 필요성을 들고 있다. 이에 대하여 허만성, 박용범, 김부윤(1999)은 대화형 실행 매체(IMTs)를 작성하여 교실수업에 활용함으로써 극복 할 수 있다고 제안하였다.

IMTs를 작성할 때에 다음의 요소를 고려하여야 한다. 수학교육의 가치 및 목표는 문제해결 과정에서 획득할 수 있는 기본적인 대수능력의 향상이다. 이에 Helmut Heugl은 근본적인 대수능력에 관한 중요한 요소로서 다음의 일곱 항목을 들었다. 표현과 형식을 찾는 능력, 구조와 같은 표현으로 변환하는 인지능력, 질적 검증에 관한 능력, 계산능력, 시각화 능력, 모듈을 사용할 수 있는 능력, 도구사용에 관한 능력이 그것이다.

이러한 요소들을 고려함으로써 교사중심에서 소그룹의 학생 중심으로, 연역적 방법에서 귀납적 방법으로 교수 형태의 변화를 생각할 수 있고, 연습과 숙제, 그리고 시험에 이르는 일련의 수학문제를 다루는 교수목표의 변화도 수반될 것이다. 이에 따르는 변화를 요약하여 보면, 지정된 내용을 수행

하는 과정을 검정하게 되며, 기법이 아닌 능력을 그리고 학습한 내용에 대하여 토론 할 수 있는 능력의 배양이 교수목표로 될 것이다. 따라서 교실 수업에서 사용되는 IMTs는 핵심적인 내용-개념, 원리, 법칙 등-을 구조적으로 혹은 통합적으로 습득하게 하기 위해 해당 내용에 대한 절차를 안내하거나 유도하는 방식으로 구성하고, 또 그러한 내용을 중심으로 전체 내용이 연결 되도록 함으로서 단원간 연계를 강조하여 학습자 자신이 분류 한 스키마를 구성하는데 도움이 되도록 하여야 한다.

한편, Kaput, J. J.(1998)는 수학적인 구조의 표상에 나타나는 수학적 특징과 인지적 특징 사이는 상호보완적(반대 방향의 상호 보완적인 과정) 이어서, 여러 가지 표상을 이용하여 어떤 주제에 대한 한정되고 구체적인 이해로부터 추상적이고 융통성 있는 이해로의 전이되는 작용을 <그림 1>과 같이 나타내고 있다.



<그림 1> 대화형 실행매체(IMTs)의 표상과 학습개념 요소

이는 R. R. Skemp의 지능 모델 및 포착 효과에 대한 구조의 표현과도 일치한다.

		이해의 종류		
		도구적	관계적	논리적
사고 활동의 양식	직관적	I_1	R_1	L_1
	반영적	I_2	R_2	L_2

<그림 2> 지능 모델

CAS에 기반한 대화형 실행매체가 교수-학습을 좀더 향상시킬 수 있는 도구 중의 하나로 고려할 수 있는 이유는 CAS로부터 제공될 수 있는 수학 교수-학습 사이에서 일어나는 수학 지식 체계에 대한 상호작용을 이해하려는데 초점을 두고 있기 때문이다. 즉 수학 세계를 탐구하고, 학습의 단서를 제공하는 도구가 되기 때문이다.

결론적으로 CAS는 기호연산 실행조작이 가능하며, 수학개념 이해와 응용에 적합하게 만들어진 수학적 도구이다. CAS를 활용한 수학 교수 학습은 교수방법 뿐만 아니라 교수목적까지도 다르다. 이러한 CAS를 학교수학에 활용하려면 대화형 실행매체의 작성과 기호연산 실행조작의 환경은 필수적이라 할 수 있다. 교육공학 매체들의 활용에는 학생들의 다양한 사고 과정과 학습 요소가 연계된 교수·학습 모델이 필요하다. 그리고, 교육 매체들의 유기적인 연결과 교사와 학습자 사이의 상호작용

을 성공적으로 이행하기 위해서 수학적 사고와 창의력 배양을 위한 상호작용적인 교재의 구성이 요구되고 학습자 스스로가 학습 내용에 대하여 능동적이고 적극적인 태도로 수학적 개념을 찾아가도록 하는 '학습수행지(Work-Sheet)'가 필요하다.

3. Maple의 특징과 기능

가. Maple의 특징

Maple은 수학에 관련된 대상을 기호(symbol)로 처리하여 연산을 수행하는 수학전용 컴퓨터 응용 소프트웨어로써 수치계산과 대수적 연산을 수행하고 함수의 그래프를 그래픽으로 처리할 수 있다.

Maple은 미적분, 미분방정식, 정수론, 조합론, 행렬, 통계학, 2차원 및 3차원 그래픽, 애니메이션 등 각종 수식계산을 위한 명령어와 Package를 제공한다. Maple의 가장 놀라운 기능은 그래픽 기능이고, On-line Help 기능, 일상 언어와 비슷한 문법에 의해 쉽게 사용할 수 있는 점이 특징이다. 또한, 사용설명서를 읽지 않고도 쉽게 이용할 수 있다는 장점을 가지고 있다(추인선 외, 2000).

Maple은 복잡한 수학문제를 작은 단위로 분해하여 각각의 부분을 모듈별로 프로그래밍 할 수 있는 환경을 제공하고 있다. 또 특정 함수가 변화하는 모습을 애니메이션으로 구현할 수 있고, Web상에서 구현되는 VRML 파일로 작성할 수 있는 등 다양한 기호연산 환경을 제공한다.

Maple 6은 특히 그래픽 파일을 WMF, BMP, POV-Ray, DXF과 같은 다양한 포맷으로 파일을 생성할 수 있다. 또한 NAG(Numerical Algorithms Group) 라이브러리를 통하여 총 78개의 다양한 기능을 제공하고, Matlab 과 Matrix Maket의 연산 기능을 호출할 수 있으며, 516개의 내장함수와 3000개 이상의 라이브러리를 갖추고 있어 선형 대수 분야에서 효율적인 연산을 수행하는 등, 전반적으로 수치 계산에 관한 향상된 알고리즘을 지원하고 있다.

나. Maple의 기능

Maple은 수학에 관련된 대상을 기호(symbol)로 처리하여 연산을 수행하는 컴퓨터 시스템으로서 수치계산과 대수적 연산을 수행하고 필요한 경우에 함수를 그래픽으로 처리하는 시스템이다.

1) 수치계산

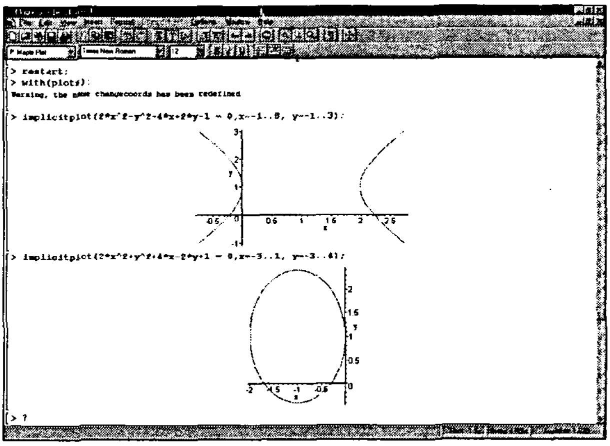
수치계산을 수행하는 Maple은 간단히 말해서 계산기보다 확장된 기능을 갖추고 있다. Maple의 수치 알고리즘에 의하여 수행되는 계산을 행렬과 벡터의 생성과 조작을 통한 연산을 포함하고 있으며, 방정식의 해를 원하는 정도에 따라 근사치를 계산해 낸다.

2) 대수적 연산

방정식 또는 다항식에 관련된 연산의 결과를 수행하거나 대수적인 성질을 가진 집합의 원소에 대한 연산의 결과를 보여주는 것이 대수적 연산에 속한다. 다항식의 곱이나 다항식의 인수분해, 다항식의 전개식, 수식의 단순화, 수식의 변형, 함수의 정의, 연립방정식의 해 구하기, 부등식의 해 구하기 등의 대수적 연산과 미적분, 미분방정식, 선형대수, 정수론, 논리 연산 등의 대수적 연산을 수행한다.

3) 그래픽 표현

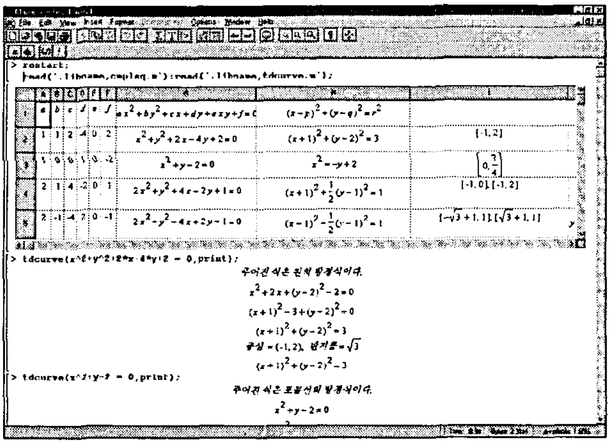
수식의 연산을 표현하는 또 다른 방법은 그래픽 처리이다. 한번에 그려진 복수개의 함수의 집합, 극좌표로 구성된 함수의 그래프, 벡터로 표현된 미분 방정식의 해 등을 그래픽으로 나타내어 시각적인 표현을 통하여 함수의 모습을 직관적으로 이해할 수 있게 해준다.



<그림 3> Maple에서의 그래픽 표현

4) 알고리즘적 사고와 Maple

Maple은 사용자에게 수학의 원리, 개념, 이해와 계산 능력과 관련된 환경을 제공한다. Maple 6에 내장된 약 516개의 내장함수의 명령어는 사용자가 지시한 입력에 대하여 연산의 결과를 대부분 즉각 출력해 주므로 계산을 수행하는 명령어의 단순한 사용만으로 수학의 원리, 개념, 이해를 증식시킨다고 보기는 어렵다. 그러나 사용자가 어떤 수학 문제를 해결하기 위하여 필요한 명령어를 선택하는 것은 수학적인 추론을 하는 것과 같은 것이고, 모듈에 대응되는 Maple 명령어를 선택하여 사용하는 일련의 절차는 일종의 스크립트를 작성하는 것으로 볼 수 있다. 다시 말하면, Maple의 내장된 기본 명령어를 합성함으로써 원하는 계산의 결과를 도출해내는 것은 궁극적으로 수학적 지식을 구축해 가는 과정으로 볼 수 있다. 단, 여기서 전제가 되는 것은 사용자가 기본적인 명령어가 구현된 과정에 대한 알고리즘적 이해를 하고 있어야 하고, 지필 계산으로도 동치의 결과를 낼 수 있어야 한다. 그러므로 Maple과 같은 CAS는 수학에 대한 일반적인 이해를 갖춘 단계에서 수학에 대한 입체적인 사고를 확장하는 도구로써 사용하는 것이 바람직하다.



<그림 4> 모듈을 이용한 Cell Sheet 작성 예

Ⅲ. Maple 모듈의 설계 및 구현

1. Maple 시스템과 언어의 특징

Maple 시스템은 수식 자체를 인식하여 내부의 자료구조와 형태(type)를 통해서 연산을 처리한다. 다항식의 표현이 계수, 미지수, power, 항의 사칙연산 등이 각기 자료타입에 저장되고 필요한 부분은 치환이 가능하다. Maple 사용자는 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 명령어로 호출하여 사용하거나 사용자가 따로 정의한 부분을 토대로 수학적 개념을 매우 용이하게 구축할 수 있다.

Maple은 커널, 인터페이스, 라이브러리 등으로 구성되어 있다. 수와 식에 관련된 간단한 계산을 수행하는 부분의 집합이 커널로 불린다. 다항식을 인수분해 하는 기능, 적분 계산 또는 연립방정식의 해를 찾는 기능 등과 같이 복잡한 계산을 수행하는 부분은 Maple 언어로 작성되어 라이브러리로 구축되어 있다. 선형대수와 같은 응용을 위하여 Maple 언어로 작성된 패키지나 온라인 도움말도 라이브러리에 포함된다. Maple은 필요한 경우에 이 라이브러리를 자동적으로 로드시킨다. Maple의 커널과 라이브러리를 함께 묶은 부분이 수학 계산을 수행하는데 필요한 내장된 지식을 제공하게 된다.

Maple 언어는 매우 조직적으로 짜여져 있고, 이해하기 쉬우며, 고급 언어에 속한다. 이 언어를 표면적으로 보면 파스칼과 같은 Algol 계열의 언어와 유사하다는 것을 알 수 있다. Maple 언어는 함수(functions), 순열(sequences), 집합(sets), 목록(lists), 배열(arrays), 표(tables) 등의 자료구조를 갖추고 있다. 이러한 자료구조는 각각이 고유한 자료형태(data type)를 띠게 된다. 따라서 자료형태를 검사하는 연산, 하나의 자료형태에서 다른 자료형태로 변환하는 연산, 복합형태의 자료형태를 생성하는 연산 등이 제공되고 있다.

수학적 알고리즘은 집합 또는 리스트와 같이 특정 형태를 띤 자료구조가 생성 및 변환되어 원하는 문제해결의 해를 찾아내는 코드의 집합이다. 따라서 Maple 언어를 사용하면 다른 컴퓨터언어를 사용하는 것보다 기호연산을 수행하는 수학 알고리즘을 작성하는데 많은 이득을 볼 수 있다. 이것은 Maple의 커널과 라이브러리에 내장된 명령어를 호출하여 사용하는 이점과 새로운 Procedure를 작성할 경우에 Maple의 자료구조가 지닌 장점을 사용하면 매우 효율적인 코드를 작성할 수 있기 때문이다. 또한, 사용자는 Maple의 라이브러리에 포함된 특정 코드를 열람할 수 있고, 사용자가 원하는 경우에 라이브러리를 수정 또는 확장할 수도 있다. C/Fortran 코드 자동생성에 관한 기능도 있다.

2. 모듈 설계

가. Cell Sheet의 활용

1) Cell Sheet의 의미

Cell Sheet는 학습자의 black box를 이용해 문제를 일반화 할 수 있도록 모듈을 구성하여 한 spread sheet에 나타낸 것이다. 각각의 Cell에 CAS의 calculator function을 이용하여 Cell을 정의하면 입력된 값에 따라 재 계산되어진 결과를 보여준다.

2) Cell Sheet의 특징

(1) 구성 : Cell의 배열은 모든 순서가 학습의 순서에 맞게 하여야 한다. 예를 들어

① 주어진 식의 계수에 임의의 값을 대입

② 식 표현

③ 그 식이 의미하는 바를 알 수 있도록 표준화

④ 식의 성질을 알 수 있는 특징 표현

과 같은 순서로 Cell을 배열하였을 때 학습자가 스스로 변화하는 과정을 단계적으로 이해하고 일반화시킬 수 있다.

(2) 비교를 통한 일반화 : Cell Sheet는 학습자가 직접 실행 조작하여 나타나는 식의 유형을 하나의 Sheet에 표현하여 그 성질 및 특징을 비교할 수 있게 했다. 즉, 어떤 형태의 방정식이 갖는 성질을 일반화하기에 편리하다.

① 임의의 값에 따른 식의 변화 속에서 공통점을 찾아 식을 일반화할 수 있다. 예를 들면, 이차곡선의 활용에서 값을 입력할 수 있는 각각의 Cell에 임의의 값을 대입하였을 경우에 그것을 재 계산하여 나타나는 이차곡선의 방정식과 특징을 관찰하면서 비교하여 보면

㉠ 원의 방정식은 이차항의 계수가 같고,

㉡ 포물선의 방정식은 이차항의 계수가 서로 다르며 계수의 곱이 0이고,

㉢ 타원의 방정식은 이차항의 계수의 곱이 양수이고,

㉣ 쌍곡선의 방정식은 이차항의 계수의 곱이 음수인 것으로 원뿔곡선을 분류할 수 있다.

② 값의 변화에 따라 나타나는 여러 가지 이차곡선의 방정식을 분류해 보고, 각각의 이차곡선이 갖는 특징을 비교할 수 있다. 비슷하지만 다른 이차곡선의 방정식이 갖는 성질을 한 눈에 살펴 볼 수 있다. 예를 들면, 원에서는 중심의 좌표와 반지름의 길이를 알 수 있고, 포물선에서는 초점의 좌표와 준선의 방정식을 알 수 있으며 타원에서는 초점의 좌표를 알 수 있으며 쌍곡선에서는 초점의 좌표, 준선의 방정식과 점근선의 방정식을 알 수 있다.

3) Cell Sheet의 특성을 보여줄 수 있는 단원의 예

(1) 공통점을 찾아 식을 일반화시킬 수 있는 단원

인수분해, 이차방정식의 근의 판별 / 이차함수의 꼭지점의 좌표와 축의 방정식 / 미분, 적분

(2) 각각의 유형이 갖는 특징을 비교할 수 있는 단원 : 원 - 포물선 - 타원 - 쌍곡선 등을 Cell Sheet를 이용하면 편리하게 일반화시킬 수 있다.

나. 모듈의 활용

1) 모듈의 의미

모듈이란 학습자가 문제에 관한 모델을 갖는다는 것을 의미하며, 모듈을 사용한다는 것은 스스로 계산을 수행하도록 하는 것을 말한다. 학습자에게 모듈은 새로운 것이 아니며, 코사인 법칙, 이차방

정식의 근의 공식과 같은 공식이 학습자에게 모듈로써 보여지게 된다. CAS는 복잡한 식의 부분을 하나의 변수로 정의하거나 저장하여 이 모듈을 이용해 사고(thinking)하고 활용(working)할 수 있도록 한다. 학생이 수식의 구조를 좀더 잘 이해할 수 있도록 단순화하면 알고리즘을 발견할 수 있을 것이며, 서술적 표현을 수학적 언어로 변환하는 전략을 이 단계에서 구사할 수 있도록 한다.

2) 모듈의 구성

학습자가 모듈 을 구성하기 위해서는 그 문제 자체의 알고리즘을 발견할 수 있어야 한다. 그 단계를 Step 1, Step 2, Step 3으로 나누어 설명할 수 있다. Step 1 또는 Step 2를 통해 발견한 문제의 풀이과정을 모듈로 구성하는 단계가 Step 3에 해당된다.

Step1 : 기존의 전통적인 방법으로 학습자가 문제를 푸는 단계 - 학생 스스로 연필로 계산하는 기법인 White Box 개념

Step2 : CAS를 이용해 학습자의 Black Box로서 computer에 의해 학습자가 결정한 방법에 의해 실행되어 지는 단계 - 기호연산 실행조작을 하는 Black Box 개념

Step3 : 수식의 구조를 모듈화하는 단계 - 수학적 언어의 새로운 요소로 정의된 모듈을 정의한다. 모듈을 정의하는 단계는 다음과 같다.

① 적절한 수식의 형태로 명명화

② 구어체로 알고리즘을 설명

③ 구어체인 문장을 수학적인 언어로 표현된 기호로 나타냄.

이러한 단계를 거쳐 모듈을 정의하여 Library Package를 생성한다.

3. 이차곡선의 모듈

고등학교 교과서에는 이차곡선의 간단한 예를 들고 곡선의 방정식을 나타내어 이차곡선을 정의하고 그 성질들을 알아보는 형태로 구성되어 있다. 이것은 이차곡선의 방정식을 구하는 과정에서 이차곡선의 정의를 알도록 하는 것이지만, 본 연구에서는 주어진 이차방정식의 여러 가지 유형을 비교분석하여 이차곡선의 방정식을 스스로 찾아내고 이를 통하여 이차곡선의 정의를 이끌어 낼 수 있도록 구성하였다. 모듈과 Cell Sheet를 활용하여 이차방정식의 각 계수에 임의의 값을 대입해 보면서 표준형으로 바뀌는 과정을 탐구하고, 이를 그래프로 나타내어 여러 가지 유형의 이차곡선을 쉽게 비교할 수 있도록 하였다.

가. 모듈의 내용

1) cmplsq.m

이 모듈은 이차도형의 방정식의 일반형을 표준형으로 바꾸어주는 모듈로서 2차항의 계수를 비교하여 이차항의 계수가 0이 아닌 값으로 같으면 원, 이차항의 계수의 곱이 0이면서 서로 같지 않으면 포물선, 이차항의 계수의 곱이 양수이면 타원, 이차항의 계수의 곱이 음수이면 쌍곡선으로 나누며, 먼저 y에 대한 완전제곱식으로 바꾼 후 x에 대한 완전제곱식으로 바꾸어 이차곡선의 각 유형에

대한 표준형으로 바꾸어 준다.

2) tdcurve.m

이 모듈은 일반형의 방정식을 표준형으로 고치는 과정과 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 성질 및 특징을 단계적으로 구하는 과정을 나타내주는 모듈이다. 학습자가 Cell Sheet에서 각 항의 계수를 대입함으로써 찾아지는 원뿔곡선의 각 유형에 대한 성질 및 특징을 이해할 수 있도록 도와주는 모듈이다. 이를 통하여 이차곡선에 대한 개념을 세우고 여러 가지 문제 해결에 적용할 수 있도록 한다. 예를 들어, Cell Sheet에서 원의 방정식의 일반형을 이 모듈에 적용시킨 후 Print를 실행하면 다음과 같이 출력된다.

```
> tdcurve(x^2+y^2-2*x+4*y = 0,print);
```

주어진 식은 원의 방정식이다.

$$x^2 - 2x + (y+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - 5 + (y+2)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

중심 = (1, -2), *반지름* = $\sqrt{5}$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

<그림 5> 모듈을 활용한 원의 방정식

나. Library Package 생성 및 실행

1) 이차곡선의 일반형을 표준형으로 바꾸어 주는 모듈(cmplsq.m)[부록 2]를 불러와 실행시킨다.

2) 도형의 판별 및 도형에 관한 정보를 알려 주는 모듈(tdcurve.m)[부록3]을 불러와 실행시킨다.

3) 위의 과정을 수행하면 Maple 6 안에 Library Package가 생성된다.

4) Maple Wortsheet에서 이차곡선에 대한 파일을 열어 생성된 Library Package-cmplsq.m과 tdcurve.m를 불러와 실행시킨다.

5) Wortsheet에 만들어진 Cell Sheet의 계수 입력 Cell에 여러 가지 값을 대입시켜본다.

6) 변화하는 이차곡선의 방정식과 특징을 관찰한다.

Ⅳ. 도형의 방정식 탐구 모형

1. 도입

가. 이차곡선을 나타내는 도형의 방정식 일반형 $ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=0$ 을 제시하여 계수 a , b, c, d, e, f 에 임의의 값을 대입하여 도형을 탐구한다.

나. 실제학습에 있어서 이차곡선이라는 용어를 사용하지 않고 도형의 방정식이라는 일반적인 용어를 선택하며, 학생들이 컴퓨터를 직접 조작하고 실행을 함으로써 스스로 문제상황을 인식한다.

다. 교사는 학생들의 조작과 실행과정에서 상황에 따라 적절한 발문을 하여 자기주도적학습을 하도록 안내하는 역할을 한다.

2. Cell의 구성

가. A, B, C, D, E, F 열은 각 계수들의 값을 대입하도록 구성한다.

나. 1행은 원의 방정식의 일반형과 성질을 나타낼 수 있도록 하였으며, 2행은 포물선, 3행은 타원을 4행은 쌍곡선의 방정식들과 성질을 나타낼 수 있도록 구성하였다.

다. G 열은 도형의 방정식의 일반형 식, H 열은 표준형의 식, I 열은 원의 중심이나 초점, J 열은 원의 반지름, 포물선의 준선과 쌍곡선의 점근선을 나타낼 수 있도록 구성한다.

라. 행과 열의 각 Cell 들은 교사의 의도대로 재구성할 수 있다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	a	b	c	d	e	f	$ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=$C	$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$		
2	1	1	2	-4	0	2	$x^2+y^2+2x-4y+2=0$	$(x+1)^2+(y-2)^2=3$	[-1, 2]	
3	1	0	0	1	0	-2	$x^2+y-2=0$	$x^2=-y+2$	$\left[0, \frac{7}{4}\right]$	
4	2	1	4	-2	0	1	$2x^2+y^2+4x-2y+1=0$	$(x+1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2=1$	[-1, 0], [-1, 2]	
5	2	-1	-4	2	0	-1	$2x^2-y^2-4x+2y-1=0$	$(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2=1$	$[-\sqrt{3}+1, 1], [\sqrt{3}+1, 1]$	y
6	1	-1	0	0	0	0	$x^2-y^2=0$	[두 일차식의 곱, $-(y-x)(y+x)=0$]		

<그림 6> 이차곡선의 Cell Sheet

3. 활동과 관찰

가. Cell Sheet에 값을 직접 대입하도록 하며, 이에 따른 해당 Cell을 클릭하여 식의 변화를 관찰하게 한다. 값을 대입할 때마다 연동하여 움직이는 것 보다 대입한 후 Cell을 클릭하여 해당열의 변화를 선택하여 볼 수 있도록 하는 효과를 나타내었다.

나. 임의의 값을 대입하고 값을 조작하는 과정을 반복하여 수학적 개념을 시각적· 직관적으로 형

성하게 한다. 값의 변화에 따른 식의 변화가 기존의 수학사고와 화면에서 나타나는 현상과의 상호작용을 하며, 자신의 내면과 갈등을 겪으며 지식의 재구성이 이루어지게 한다.

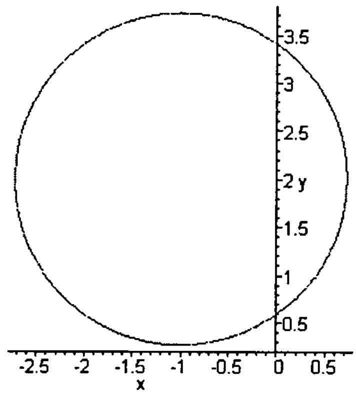
다. 이차항의 계수에 따라 이차곡선이 결정되며, 원의 방정식에서는 상수항의 값에 따라 원이 될 수 없는 경우를 이해할 수 있다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	c	d	e	f	$ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=0$	$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$	
2	1	1	2	-4	0	7	$x^2+y^2+2x-4y+7=0$	$(x+1)^2+(y-2)^2=-2$	[-1, 2]

<그림 7> 원의 방정식의 Cell Sheet

라. Maple 프로그램을 실행하여 인지된 이차곡선들의 그래프를 그려보고 Cell의 변화에 따른 각 도형의 그래프를 직관적으로 이해하여 Cell Sheet의 대수적인 식과 기하학적인 그래프와의 상호관계를 관찰한다.

```
> implicitplot(x^2+y^2+2*x-4*y+2 = 0, x=-3..2, y=-1..4);
```



<그림 8> 이차곡선의 그래프

마. 모듈을 실행시켜 형성된 지식을 정리한다.

```
> tdcurve(x^2+y^2+2*x-4*y+2 = 0,print);
```

주어진 식은 원의 방정식이다.

$$x^2+2x+(y-2)^2-2=0$$

$$(x+1)^2-3+(y-2)^2=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3$$

중심 $=(-1,2)$, *반지름* $=\sqrt{3}$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3$$

<그림 9> 모듈 실행 예

4. 교사의 역할

가. 수업을 설계하고 교사가 의도하는 학습목표에 맞는 적절한 Cell Sheet를 작성하고, 모듈을 설계하여야 한다. 모듈의 설계는 학습과정을 충분히 반영할 수 있도록 하여야 한다.

나. 교사는 값의 변화에 따른 학생들의 반응을 관찰하고 여러 상황에서 일어나는 현상들을 학습목표에 도달할 수 있도록 발문과 조언을 한다.

다. 프로그램을 실행하거나 조작하는 과정에서 학생들이 겪는 애로를 덜 수 있게 교사는 충분히 실행과정을 안내한다.

5. 이차곡선의 개념 형성

가. 계수의 값을 차례대로 대입하여 변화된 식에서 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 식의 공통점과 차이점을 발견할 수 있다.

(1) 이차항의 계수가 같은 경우
(2) 이차항이 하나만 있는 경우
(3) 이차항 계수의 부호가 같고 값이 다른 경우
(4) 이차항 계수의 부호가 다르고 값이 다른 경우
(5) xy 항이 있는 경우

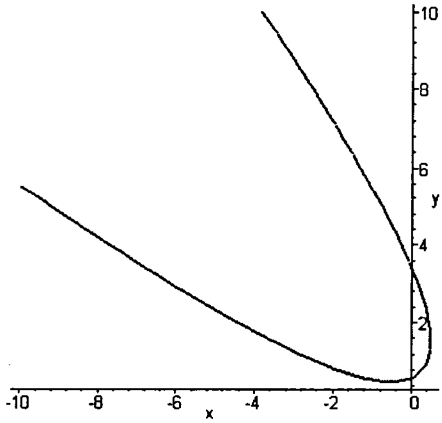
나. 표준형으로의 변형이 나타내는 뜻을 찾게 한다.

이차곡선의 정의를 제시하여 접근하는 것보다 값의 변화에 따른 각 Cell에서 식의 변형을 관찰함으로써 자연스럽게 정의를 인지할 수 있게 한다.

다. 이차곡선의 방정식에서 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 특징을 나타낼 수 있는 성질을 하나 하나 점검할 수 있도록 한다.

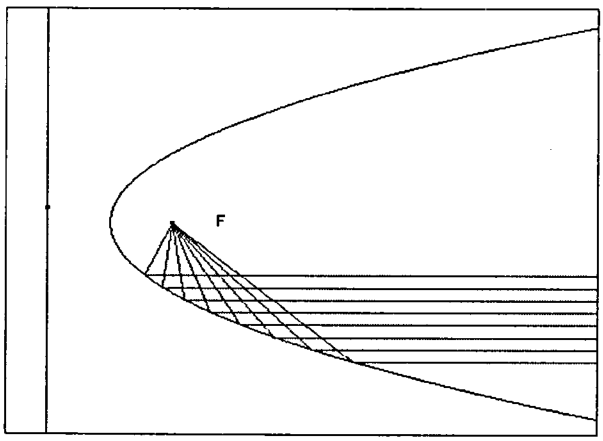
라. Maple 프로그램을 실행시켜 그래프를 관찰하며, 교과서에서 나타난 정형화된 그래프를 대수적인 식의 변형으로 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등 일차변환에 의해 변환된 그래프를 시각적 · 직관적으로 관찰하여 다양한 경험을 갖게 한다.

```
> implicitplot(x^2+y^2+2*x*y-4*y+2 = 0, x=-10..10, y=-2..10);
```



<그림 10> 변환된 이차곡선의 그래프

마. 실생활 속에서 이차곡선의 성질을 이용한 예를 찾아 어떻게 적용 및 활용되고 있는지를 확인한다.



<그림 11> 포물선의 예 - 곡면 거울의 반사 원리

V. 결 론

이차곡선에 대한 개념 이해에 도움을 줄 수 있는 교수·학습 방안을 찾기 위해 CAS에 대하여 살펴보고, 기호연산 실행조작이 가능한 컴퓨터 응용소프트웨어 Maple을 활용하여 교수·학습 모델을 구안하였다. 먼저 이차곡선의 학습 요소를 Maple 사용 환경에 적합하도록 재구성하였다. 그리고 Maple의 모듈을 이용하여 Package를 생성하고, 이를 Cell Sheet에 활용하여 이차곡선의 도입 과정에서의 지도 방안을 제시하였다. 이의 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 기호연산 실행조작이 가능한 컴퓨터 응용소프트웨어를 활용함으로써 추상적이고 형식적인 개념을 시각적·직관적으로 구현할 수 있었고, 시각화 개념화에서 형식논리로 이르는 학습 개념 형성 과정에서 대화형 실행매체(IMTs)를 통한 여러 표상들간의 변환과 그 과정에서 얻어지는 반영적 사고활동을 통하여 수학적 지식 구성에 유용하였다.

둘째, 모듈을 이용하여 Maple의 Library Package를 생성하고, Cell Sheet에 이를 적용하여 여러 가지 값을 대입하는 조작을 실행함으로써 이에 따른 이차곡선의 방정식의 변화를 관찰할 수 있어 이차곡선의 일반화 개념을 이끌어 내는데 유용하였다. 또한, 일반형의 방정식을 표준형으로 변화시키는 과정과 이차곡선의 방정식들의 특징을 이해하게 되어 문제해결력 향상에 도움이 될 뿐만 아니라 'plots'를 실행하여 이차곡선의 그래프의 변화를 실시간에 학습할 수 있어 모듈의 활용이 학생 스스로 지식 체계를 세우는 데 매우 유용하였다.

셋째, 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)를 통하여 학습자, 학습수행지, 컴퓨터 응용소프트웨어, 교사가 연결되어 이를 매개로 한 교사 - 학생, 학생 - 컴퓨터 응용소프트웨어간의 원활한 상호작용이 이루어질 수 있어 학생 스스로 능동적이고 적극적인 태도로 학습동기를 갖게 되었다. 특히, 학습수행지의 계획적인 발문은 적극적인 상호작용을 유도하는데 효과적이었다.

VI. 앞으로의 과제

최근 컴퓨터 기술의 급속한 발달로 수학교육에 있어서도 테크놀러지가 수학적 개념과 주제에 흥미를 갖도록 하는데 주요한 역할을 하고 있다고 본다. 그러나 지필 환경을 대체하는 수학 교수·학습 도구로서가 아니라 창의적이고 탐구적인 수학 학습 활동에 적용될 수 있는 교재의 재구성에 대한 연구와 노력이 필요하다. 앞으로는 문제의 해를 단계별로 제공하는 모듈을 개발하여 교수-학습의 어떤 단계에서 효과적으로 활용될 수 있는지에 대한 연구가 요청된다.

참 고 문 헌

김민경 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학적 교수-학습의 구성주의적 접근, 교육학 연구 **36(2)**, pp.183-202.

김한희 · 박일영 · 박용범 (2000). 수학 응용소프트웨어를 활용한 효과적인 이차곡선의 지도방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, pp.125-141.

류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제, 대한수학교육학회 1998 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.29-43.

박영배 (1996). 수학 교수 · 학습의 구성주의적 전개 과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문.

박한식 외 (1999). 고등학교 수학II, (주) 지학사.

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

전영국 (2000). 미적분 문제의 해를 단계별로 제시하는 웹기반 Mathematica 모듈, 대한수학교육학회 2000 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.699-735.

추인선 · 박용범 · 하회영 · 최재룡. (2000). Maple V와 미분적분학, 교우사.

허만성 · 박용범 · 김부윤 (1999). 수학 교수-학습을 위한 컴퓨터 응용프로그램 모형 설계에 따른 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)의 작성에 관한 소고, 대한수학교육학회 논문집, **9(1)**, pp.321-332.

Helmut Heugl. (1999). The Necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems, *Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy*, 1999.

Kaput, J. J. (1998). Mixing New Technology, New Curricula and New Pedagogies to Exteaordinary Performance from Ordinary People in the Next Century, Department of mathematics, *University of Messachusetts-Dartmouth. ICMI-EARCOME1 Proceeding* **1.** pp.141-156.

Kilpatrick, J (1987). *What Constructivism Might Be in Mathematics Education,* PME-XI ; Program, pp.3-27.

M. B Monagan; K. O. Geddes; K. M. Heal; G. Labahn; S. M. Vorkoetter & J. McCarron (2000). *Maple 6 Programming Guide*, Waterloo Maple Inc.

NCTM. (2000). *Principle and Standards for School Mathematics,* NCTM.

Steffe, L. P. (1991). The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications. In E. von Glasersfeld(Ed.), *Radial Costrutivism in Mathrmatics Education,* Kluwer Academic Publishers. pp.177-194.

[부 록 1]　　학 습 수 행 지 (Work-sheet)

월　　일　　　　　　학번 :　　　　　성명 :

[탐구주제] 도형의 방정식 $ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=0$ 탐구

[활동1] (1) 제시된 Cell Sheet에서 A, B, C, D, E, F 열의 각 Cell에 임의의 값을 대입한다.

(2) 각 Cell의 값을 대입한 후 H, I, J 열의 Cell을 마우스로 클릭한다.

```
> restart:
  read(`.libname,cmplsq.m`):read(`.libname,tdcurve.m`);
```

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	b	c	d	e	f	$ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=0$	$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$		
2	1	2	-4	0	2	$x^2+y^2+2x-4y+2=0$	$(x+1)^2+(y-2)^2=3$	[-1, 2]	$\sqrt{3}$
3	0	0	1	0	-2	$x^2+y-2=0$	$x^2=-y+2$	$\left[0, \frac{7}{4}\right]$	$y=\frac{9}{4}$
4	1	4	-2	0	1	$2x^2+y^2+4x-2y+1=0$	$(x+1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2=1$	[-1, 0], [-1, 2]	
5	-1	-4	2	0	-1	$2x^2-y^2-4x+2y-1=0$	$(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2=1$	$[-\sqrt{3}+1, 1], [\sqrt{3}+1, 1]$	$y=-\sqrt{2}(x-1)+1, y=\sqrt{2}(x-1)+1$

[관찰1] (1) G 열의 식의 변화를 살펴보고 도형 방정식의 이름을 정할 수 있다.

①

②

③

④

(2) H 열의 식의 변화를 살펴보고 도형 방정식의 이름을 정할 수 있다.

①

②

③

④

(3) I 열의 식의 변화를 살펴보고 도형 방정식의 이름을 정할 수 있다.

①

②

③

④

(4) J 열의 식의 변화를 살펴보고 도형 방정식의 이름을 정할 수 있다.

①

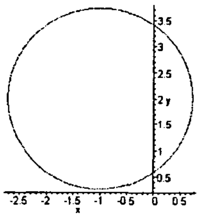
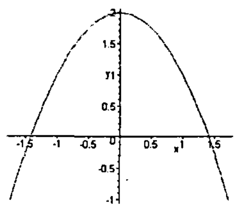
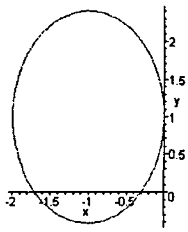
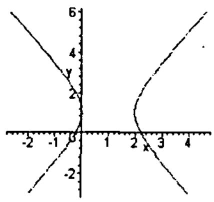
②

③

④

[활동2] 결정된 도형의 방정식을 그래프로 나타낼 수 있다.

사용할 명령어 " > implicitplot(f , x= , y=); "

[관찰2] (1) 도형의 방정식을 표준형으로 나타내는 이유를 알 수 있다.

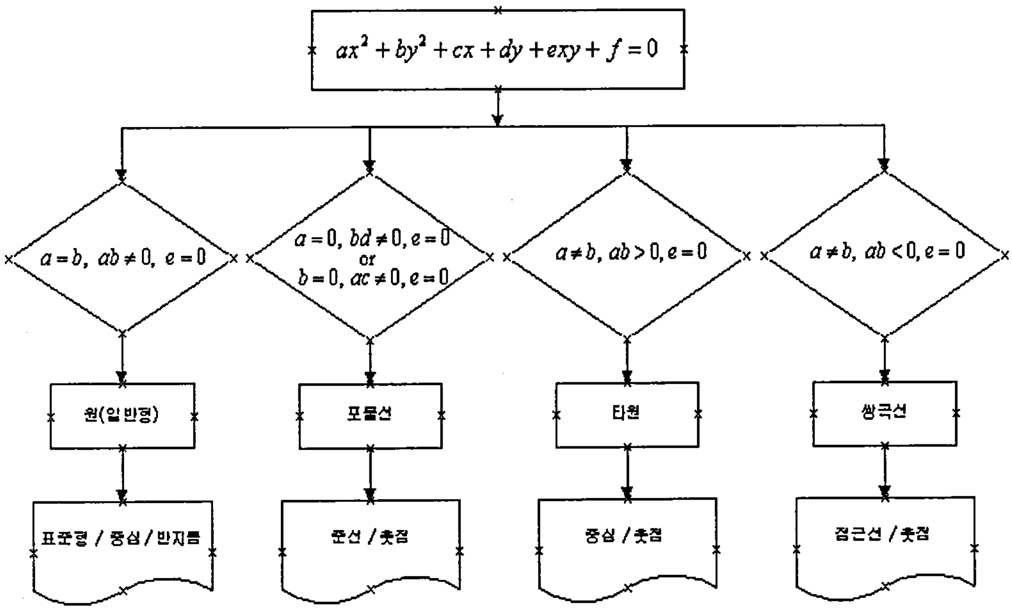
(2) 도형이 결정되지 않는 이유를 알 수 있다.

[학습 내용 정리] 모듈을 실행하여 학습한 내용을 정리

[예고] 다음 차시 수업에서는 일차변환에 의해 결정되는 도형에 관하여 탐구한다.
일차변환을 생각하여 보자.

※ 오늘의 탐구학습에 대한 소감을 생각나는 대로 적어보자.

[부록 2] 모듈설계의 순서도



[부록 3] 이차곡선의 일반형을 표준형으로 바꾸는 모듈

```
cmplsq := proc()
local eq, p1, p2, p3, p22, e1, e2, e, eqb, v, res;
   if type(args[1], equation) then eq := expand(lhs(args[1]) - rhs(args[1])) = 0; eqb := true else eq := args[1]; eqb := false end if;
   if nargs = 2 and args[2] = real then
      v := sort([op(indets(eq))]);
      if eqb then e := lhs(eq) else e := eq end if;
      if nops(v) = 3 then
         res := (v[1] + sign(lcoeff(e, v[1]*v[2]))*v[2])^2 + (v[2] + sign(lcoeff(e, v[2]*v[3]))*v[3])^2 + (v[3] + sign(lcoeff(e, v[3]*v[1]))*v[1])^2;
         RETURN(1 / 2*res)
      else
         e1 := completesquare(e, v[1]);
         e2 := completesquare(e1 - op(1, e1), v[2]);
         if eqb then RETURN(op(1, e1) + e2 = 0) else RETURN(op(1, e1) + e2) end if
      end if
   else
      if degree(lhs(eq), x) = 2 and degree(lhs(eq), y) = 2 then
         p1 := sort(completesquare(lhs(eq), y)) = 0;
         p2 := completesquare(lhs(p1), x) = 0;
         p22 := -simplex[cterm](lhs(p2));
         p3 := select(has, lhs(p2), x) + select(has, lhs(p2), y) = p22;
         if nargs = 2 and args[2] = print then print(p1); if p1 ≠ p2 then print(p2) end if end if;
         if coeff(expand(lhs(eq)), x^2) = coeff(expand(lhs(eq)), y^2) and coeff(expand(lhs(eq)), x^2) ≠ 1 then p3 := p3 / coeff(expand(lhs(eq)), x^2) end if;
         if coeff(expand(lhs(p3)), x^2) < 0 then p3 := -p3 end if;
         RETURN(sort(p3, [x, y], plex))
      else
         if degree(lhs(eq), x) = 2 and degree(lhs(eq), y) = 1 then
            p1 := completesquare(lhs(eq), x) = 0; p22 := lhs(p1) - select(has, lhs(p1), x); p2 := select(has, lhs(p1), x) = -p22
         else
            if degree(lhs(eq), x) = 1 and degree(lhs(eq), y) = 2 then
               p1 := completesquare(lhs(eq), y) = 0; p22 := lhs(p1) - select(has, lhs(p1), y); p2 := select(has, lhs(p1), y) = -p22
            end if
         end if;
         if e ≠ p2 and nargs = 2 and args[2] = print then print(p1) end if;
         RETURN(p2)
      end if
   end if
end proc
```

[부록 4] 이차곡선의 성질 및 특징에 관한 모듈

```
tdcurve := proc()
local EX1, A, B, C, _F, G, fax, _p, q, info, info1, _T, k, P;
    EX1 := lhs(args[1]) - rhs(args[1]) = 0;
    q := coefl(lhs(EX1));
    A := q[1];
    B := q[2];
    C := q[3];
    _F := q[4];
    G := q[5];
    fax := factor(EX1);
    if C = 0 then
        if type(lhs(fax), `*`) then info := [`두 일차식의 곱`,fax]; RETURN(info)
        else
            _p := cmplsq(EX1);
            if A = B then
                if A ≠ 0 then
                    if nargs = 1 then RETURN(_p) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = all then RETURN(cir(_p, all)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = O then RETURN(cir(_p, O)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = R then RETURN(cir(_p, R)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = print then print(`주어진 식은 원의 방정식이다.`); k := cmplsq(EX1, print); print(_p); cir(_p) end if
                end if
            else
                if A = 0 and _F ≠ 0 or B = 0 and G ≠ 0 then
                    if type(lhs(_p), `*`) then _p := _p / op(lhs(_p))[1] end if;
                    if nargs = 1 then RETURN(_p) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = F then RETURN(para(_p, F)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = D then RETURN(para(_p, D)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = all then RETURN(para(_p)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = V then RETURN(para(_p, V)) end if;
                    if nargs = 2 and args[2] = print then print(`주어진 식은 포물선의 방정식이다.`); k := cmplsq(EX1, print); print(_p); para(_p, print) end if
                else

                    else
                        if 0 < A*B then
                            _p := _p / rhs(_p);
                            if nargs = 1 then RETURN(_p) end if;
                            if nargs = 2 and args[2] = F then RETURN(elp(_p, F)) end if;
                            if nargs = 2 and args[2] = all then RETURN(elp(_p)) end if;
                            if nargs = 2 and args[2] = print then print(`주어진 식은 타원의 방정식이다.`); k := cmplsq(EX1, print); print(_p); elp(_p, print) end if
                        else
                            if A*B < 0 then
                                _p := _p / abs(rhs(_p));
                                if nargs = 1 then RETURN(_p) end if;
                                if nargs = 2 and args[2] = F then RETURN(hyp(_p, F)) end if;
                                if nargs = 2 and args[2] = asymp then RETURN(hyp(_p, amp)) end if;
                                if nargs = 2 and args[2] = all then RETURN(hyp(_p)) end if;
                                if nargs = 2 and args[2] = print then print(`주어진 식은 쌍곡선의 방정식이다.`); k := cmplsq(EX1, print); print(_p); hyp(_p, print) end if
                            end if
                        end if
                    end if
                end if
            end if
        end if
    end proc
```