韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 155-170.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 155-170.

다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구[1)]

한 인 기[2)](경상대학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

중등학교 수학교육 분야에서 기하 영역과 관련된 많은 연구들을 볼 수 있는데, 이들 중에서 도형에 관련된 다양한 개념 자체에 대한 심도 있는 논의는 많이 이루어지지 않았다. 예를 들어, 우리에게 가장 친숙한 개념들 중의 하나가 넓이임에도 불구하고, 왜 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이가 a^2인가? 와 같은 물음은 그리 쉽지 않은 질문이 될 것이다. 그리고, 다각형의 넓이 자체는 다양한 수학 문제의 해결을 위한 중요한 도구이지만, 넓이를 활용한 다양한 문제해결의 경험을 제공하지 못하고 있다.
본 연구에서는 다양한 다각형들의 넓이를 규정하는 공식들을 유도하고, 유도된 넓이의 공식들을 활용한 다양한 문제해결의 아이디어를 제시하고, 이를 통해, 다각형의 넓이를 활용한 효율적인 수학 교수-학습을 위한 접근을 모색할 것이다.

1. 서 론

수학교육 과정에서 도형 부분은 세계 어느 나라를 막론하고 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 우리 나라 경우도 마찬가지로, 초·중등학교 수학 교육과정을 보면, 도형 부분이 매우 중요한 부분인 것을 알 수 있으며, 도형 부분은 특히 학생들의 논리적 사고력 향상에 중요한 도구가 될 수 있다.

실제로, 중등학교 수학교육 분야에서 기하 영역과 관련된 많은 연구들을 볼 수 있으며, 이 연구들에는 도형 부분의 증명의 본질 및 증명 능력 신장에 관련된 연구들(Lakatos, 1976; 우정호, 1994; 류성림, 1998; 나귀수, 1998; 서동엽, 1999; 한인기·장병철, 1997 등), 반힐의 기하학적 사고 능력과 증명 능력에 관련된 연구들(신현성, 1999; 강완·백석윤, 1998); 한태식, 1995 등), 도형 분야에서 몇몇 유형의 문제에 대한 해결 능력 신장에 관한 연구들(한인기, 2000a; 한인기, 2000b; 한인기·강인주, 2000a; 한인기·강인주, 2000b; 한인기, 1999a 등), 도형 분야에서 학생들의 오류에 관한 연구(류성림, 1993) 등을 비롯한 많은 연구가 있었고, 지금도 많은 전문가들이 다양한 측면에서 도형 분야의 효율적인 교수-학습에 관련된 많은 연구를 수행하고 있다.

그러나, 현재까지 도형 분야의 연구들 중에 도형에 관련된 다양한 개념 자체에 대한 심도 있는 논의가 이루어진 것은 매우 드물다. 예를 들어, 우리에게 가장 친숙한 개념들 중의 하나인 길이, 각의 크기, 넓이 등등. 특히, 넓이 개념은 초등학교 때부터 학생들이 많은 시간과 노력을 기울여 배우고

---

1) 이 논문은 2000년 교육부 학술 연구 조성비에 의하여 연구되었음.
2) 경상대학교 사범대학 중등교육연구소 소원임.

있지만, 학생들에게 왜 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이가 a^2인가? 왜 삼각형의 넓이는 ½×밑변×높이라는 공식으로 계산될 수 있는가? 넓이는 무엇을 하는데 활용할 수 있는가? 와 같은 물음에 대한 대답은 수학에 흥미가 있는 학생들에게조차도 그리 쉽지 않은 질문이 될 것이다.

그리고, 다각형의 넓이 자체는 다양한 수학 문제의 해결을 위한 중요한 도구가 될 수 있음에도 불구하고, 수학 교수-학습 과정에서는 대부분 주어진 도형의 넓이를 계산하는 문제들을 중점적으로 다룰 뿐, 학생들에게 넓이 개념을 활용한 다양한 문제해결의 경험을 제공하지 못하고 있다.

본 연구에서는 다양한 다각형들의 넓이를 규정하는 공식들을 유도하고, 유도된 넓이의 공식들을 활용한 다양한 문제해결의 아이디어를 제시할 것이다. 이를 통해, 넓이에 대한 이해의 폭을 넓히며, 효율적인 수학 교수-학습을 위한 다양한 접근을 모색할 것이다.

2. 다각형의 넓이

다각형의 넓이에 대해 다양한 측면에서 접근할 수 있는데, 발티얀스키(1985)나 아따나시얀·데니소바·실라예프(1997) 등의 연구에서 다각형의 넓이를 정의 구역이 다각형인 함수로 정의하고 있다. 발티얀스키(1985)는 도형 M의 넓이를 $s(M)$이라 하고, 다음과 같은 성질을 만족하는 함수 s의 존재성과 유일성을 증명하였다.

1. 임의의 도형 M의 넓이 $s(M)$은 음이 아니다.
2. 만약, 도형 M_1과 M_2가 합동이면, $s(M_1) = s(M_2)$.
3. 만약, 도형 M을 두 개의 도형 M_1과 M_2로 분할하면(즉, $M_1 \cup M_2 = M$), $s(M) = s(M_1) + s(M_2)$.
4. 만약, K를 한 변이 단위 길이인 정사각형이라 하면, $s(K) = 1$.

함수 s의 존재성이나 유일성에 대한 구체적인 증명은 본 연구에서는 논의하지 않을 것이다. 한편, 아따나시얀·데니소바·실라예프(1997), 빠가렐로프(1990), 끼숄로프·리프낀(1995), 그리고 한인기(1999b) 등은 넓이의 성질 1-4를 넓이에 대한 공리로 받아들이고, 다른 다각형들의 넓이 공식들을 고찰하고 있다. 이제, 다양한 다각형들의 넓이 공식들을 구체적으로 유도하여 보자.

3. 기본 도형의 넓이

다각형들의 넓이 공식을 유도하기 위해, 우선 기본 도형의 넓이를 증명해야 하는데, 몇몇 연구들은 기본 도형으로 정사각형을, 몇몇 연구들은 기본 도형으로 직사각형을 잡고, 다른 다각형의 넓이 공식을 유도하고 있다. 이들 중에서 대표적인 몇몇 연구를 살펴보자.

정리 1. 변의 길이가 a, b인 직사각형의 넓이 S는 ab임을 증명하여라.

다음 증명은 빠가렐로프(1990)의 기하 교과서에 제시된 것으로 9학년 학생들에게 필수적으로 부과되는 내용이다.

증명. 같은 밑변 AD를 가지는 두 직사각형 $ABCD$와 $A_1B_1C_1D_1$이 주어졌고(그림 a), 이들의 넓이를 각각 S와 S_1이라 하고, $\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}}$을 증명하자.

직사각형 의 변 AB를 n(큰 수)등분하면, 각 부분은 $\frac{\overline{AB}}{n}$이 된다. 이제, m을 변 $\overline{AB_1}$을 분할한 개수라고 하면,

$$\left(\frac{\overline{AB}}{n}\right)m \le \overline{AB_1} \le \left(\frac{\overline{AB}}{n}\right)(m+1).$$

얻어진 식에서 $\overline{AB}$를 각각 나누면,

$$\frac{m}{n} \le \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} \le \frac{m}{n}+\frac{1}{n} \quad \text{---} \ ①$$

분할 점을 지나 밑변 AD에 평행한 직선들을 작도하면, 이들은 직사각형 ABCD를 n개의 합동인 직사각형들로 분할하며, 이들 각각의 넓이는 $\frac{S}{n}$이다. 이때, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$는 아래로부터 세어 처음 m개의 직사각형을 포함하며, $m+1$개의 직사각형에 포함된다. 그러므로,

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \le S_1 \le \left(\frac{S}{n}\right)(m+1).$$

이로부터,

$$\frac{m}{n} \le \frac{S_1}{S} \le \frac{m}{n}+\frac{1}{n} \quad \text{---} \ ②$$

부등식 ①과 ②로부터, 두 수 $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}$와 $\frac{S_1}{S}$는 $\frac{m}{n}$과 $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$사이에 속한다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 이들은 $\frac{1}{n}$보다 작게 차이가 난다. 우리가 n을 임의로 크게 잡을 수 있으므로, 이것은 $\frac{S_1}{S} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}$인 경우에만 가능하고, $\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}}$이 증명되었다.

이제, 한 변이 1인 정사각형, 변의 길이가 각각 1과 a인 직사각형, 그리고 변의 길이가 각각 a와 b인 직사각형을 잡자(그림 b). 이들의 넓이를 비교하면, 위에서 증명한 것에 의해,

$$\frac{S'}{1} = \frac{a}{1}, \quad \frac{S}{S'} = \frac{b}{1}.$$

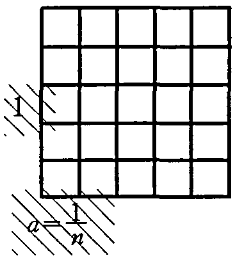
이 등식들을 항별로 곱하면, $S = ab$.

이제, 기본 도형으로 정사각형을 잡아 증명한 몇 가지 접근 방법을 살펴보기로 하자.

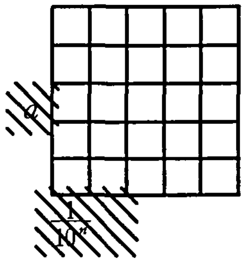
정리 2. 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이가 n^2이라는 것을 증명하여라.

증명. 이 증명은 아따나시얀 · 부뚜조프 · 까돔쩨프 · 뽀즈냑 · 유디나(1996)의 중학교 기하학 교과서에 제시된 것인데, 교과서 상에 이 증명은 학생들에게 선택적으로 지도할 수 있다고 표시되어 있다.

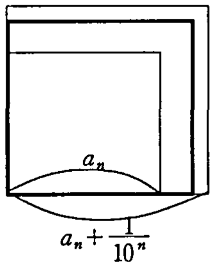
한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이 S가 a^2이라는 것을 증명하기 위해, 우선 n이 정수인 경우 $a = \frac{1}{n}$일 때의 증명부터 시작하자. 한 변이 1인 정사각형을 n^2개의 합동인 정사각형으로 분할하였다고 하자(그림 a 참조, 그림에서는 n이 5인 경우를 보여주고 있음).



<그림 a>



<그림 b>



<그림 c>

큰 정사각형의 넓이가 1이므로, 각각의 작은 정사각형 넓이는 $\frac{1}{n^2}$이며, 작은 정사각형의 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$, 즉 a이므로,

$$S = \frac{1}{n^2} = (\frac{1}{n})^2 = a^2 \text{ --- ①}$$

이제, a가 소수점 아래에 n개의 숫자를 가지고 있는 유한 소수라 하자(특히, 수 a는 $n = 0$이면 정수임). 이때, 수 $m = a \cdot 10^n$은 정수이다. 한 변이 a인 주어진 정사각형을 m^2개의 합동인 정사각형으로 그림 b에서와 같이 분할하자(그림 b에서 m은 5인 경우임). 이때, 주어진 정사각형의 각 변은 m등분되었으며, 작은 정사각형의 변의 길이는 $\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}$이다. 이때, 식 ①에 의해, 각각의 작은 정사각형의 넓이는 $(\frac{1}{10^n})^2$이며, 결국 주어진 정사각형의 넓이 S는

$$m^2 \cdot (\frac{1}{10^n})^2 = (\frac{m}{10^n})^2 = (\frac{a \cdot 10^n}{10^n})^2 = a^2.$$

마지막으로, 수 a가 무한 소수라고 하자. 수 a_n을 수 a에서 소수점 아래 $n+1$번째 이하의 숫

자들을 모두 버려 얻어진 수라 하자. 이때, 수 a와 a_n의 차는 $\frac{1}{10^n}$이하이므로, $a_n \le a \le a_n+\frac{1}{10^n}$이고(그림 c 참조), 이로부터

$$a_n^2 \le a^2 \le (a_n+\frac{1}{10^n})^2 \text{ --- ②}$$

한편, 주어진 정사각형의 넓이 S는 한 변이 a_n인 정사각형의 넓이와 한 변이 $a_n+\frac{1}{10^n}$인 정사각형의 넓이 사이, 즉 a_n^2과 $(a_n+\frac{1}{10^n})^2$사이에 있으므로,

$$a_n^2 \le S \le (a_n+\frac{1}{10^n})^2 \text{ --- ③}$$

이때, 수 n을 무한히 크게 하면, $\frac{1}{10^n}$은 원하는 만큼 작게 되므로, 수 $(a_n+\frac{1}{10^n})^2$와 a_n^2의 차를 원하는 만큼 작게 할 수 있다. 그러므로, 부등식 ②와 ③으로부터, 수 S와 a_2의 차가 원하는 만큼 작게 되므로, 이들은 같게 되고, $S = a^2$.

한인기의 연구(1999b)에는 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이가 n^2이 된다는 흥미로운 증명이 소개되어 있다. 본 연구에서는 이 증명 방법을 좀더 명료하게 개선하여 진술하도록 하자. 이를 위해, n이 자연수인 경우, n이 유리수, 그리고 n이 무리수인 경우에 대해 각각 살펴보기로 하자.

정리 3. n이 자연수일 때, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이는 n^2이라는 것을 증명하여라.

증명. 한 변의 길이가 n인 정사각형 ABCD에서 변 AB, BC를 각각 n등분하면, 한 변의 길이가 $\overline{EF}$인 n^2개의 정사각형을 얻게 된다. 이때, 분할하여 얻어진 작은 정사각형의 한 변의 길이가 단위 길이인 1이므로, 넓이의 성질 4에 의해 작은 정사각형의 넓이는 1이다. 한편, 정사각형 ABCD는 n^2개의 정사각형으로 분할되었으므로, 넓이의 성질 3에 의해 정사각형 ABCD의 넓이는 n^2이다.

정리 4. n이 유리수일 때, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이는 n^2이라는 것을 증명하여라.

증명. n이 유리수이므로, $n = \frac{p}{q}$ (p와 q가 자연수)라 놓자. 만약, $q=1$이면, 정리 3에 의해 그 넓이가 n^2이다. 이제, $q>1$이라 가정하자. 정리 3에 의해, 한 변이 p인 정사각형의 넓이는 p^2이다.

한편, $p = nq$이므로, 한 변이 p인 정사각형의 각 변을 q등분하면, 한 변이 n인 q^2개의 정사각형을 얻을 수 있다. 한 변이 n인 정사각형의 넓이를 S라 하면, 한 변이 p인 정사각형의 넓이는

넓이의 성질 3에 의해, q^2S와 같게 된다. 즉, $p^2 = q^2S$. 이로부터,

$$S = \frac{p^2}{q^2} = (\frac{p}{q})^2 = n^2.$$

정리 5. n이 무리수일 때, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이는 n^2이라는 것을 증명하여라.

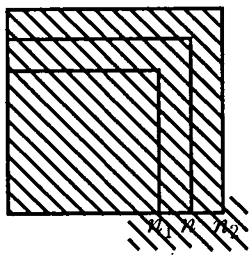
증명. 귀류법으로, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이가 S일 때, $S \neq n^2$이라 가정하자. 이로부터, $\sqrt{S} \neq n$이므로, 편의상 $\sqrt{S} > n$이라 가정하자. 그러면,

$$\sqrt{S} - n = k > 0 \text{ --- ①}$$

n이 무리수이므로, n 근처에서 두 유리수 n_1과 n_2를 차 $n_1 - n_2$의 값을 임의로 작게 하는 값을 잡을 수 있다. 가령,

$$n_1 - n_2 < k \text{ --- ②}$$

가 되도록 n_1과 n_2를 잡고, 물론 $n_1 < n < n_2$이다. 그러면, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이는 한 변의 길이가 n_1인 정사각형의 넓이보다는 크고, 한 변이 n_2인 정사각형의 넓이보다는 작게 된다.



즉, $n_1^2 < S < n_2^2$이고, $n_1 < \sqrt{S} < n_2$.

얻어진 부등식과 부등식 $n_1 < n < n_2$으로부터,

$$n_1 - n_2 < \sqrt{S} - n < n_2 - n_1.$$

이때, $\sqrt{S} - n$은 양수이므로,

$$0 < \sqrt{S} - n < n_2 - n_1 \text{ ---③}$$

식 ①, ②, 그리고 ③으로부터 우리는 $k < k$라는 결론을 얻게 되므로, 모순이 발생하므로, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이는 n^2임이 증명된다.

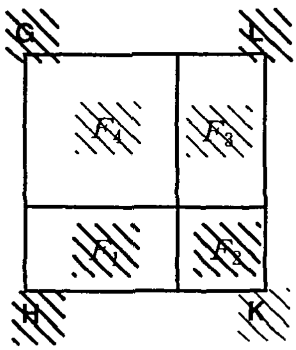
4. 다각형의 넓이를 구하는 공식들

이제, 다른 몇몇 도형들의 넓이를 구하는 공식들을 증명하자. 정리 3의 접근에서는 기본 도형으로 직사각형을 잡았지만, 다른 두 접근에서는 기본 도형으로 정사각형을 잡았다. 우선, 기본 도형으로 정사각형을 잡은 경우, 직사각형의 넓이 구하는 공식을 유도해 보자.

정리 6. 직사각형의 넓이는 가로와 세로의 곱과 같다는 것을 증명하여라.

증명. S를 직사각형 $ABCD$의 넓이라고 하자. 길이가 a인 변 AB를 가로, 길이가 b인 변 AD를 세로라 하고, S = ab를 증명하자.

우선, 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 GHKL을 생각하자. 변 GH에 $\overline{GM}$ = a인 점 M을 잡고, 변 GL에 $\overline{GN}$ = b인 점 N을 잡자. 그리고, 점 M, N을 지나며 변 GH와 GL에 각각 수직인 직선을 그으면(그림 참조), 이 직선들은 정사각형 GHKL을 네 개의 사각형 F_1, F_2, F_3, F_4로 분할한다. 이때, 사각형 F_1과 F_3는 직사각형 ABCD와 합동이므로 이들의 넓이는 S이다. 한편, 사각형 F_2와 F_4는 변의 길이가 각각 b, a인 정사각형이므로, 이들의 넓이는 각각 b^2, a^2이다.



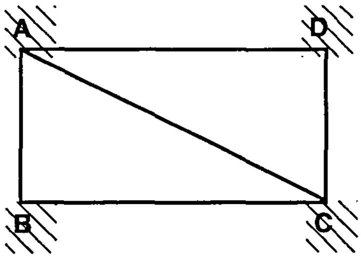
한편, 정사각형 GHKL의 넓이는 $(a+b)^2$이므로, 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다:

$$(a+b)^2 = \mathrm{S} + b^2 + \mathrm{S} + a^2.$$

이로부터, S = ab.

정리 7. 직각 삼각형의 넓이는 직각 삼각형의 두 옆변의 곱을 2로 나눈 것과 같다는 것을 증명하여라.

증명. S를 직각을 낀 두 변이 $\overline{AB}$ = a, $\overline{BC}$ = b인 직각 삼각형의 넓이라 하자. $\overline{AB}$ = a, $\overline{BC}$ = b인 직사각형 ABCD에서 대각선 AC를 긋자(그림 참조).

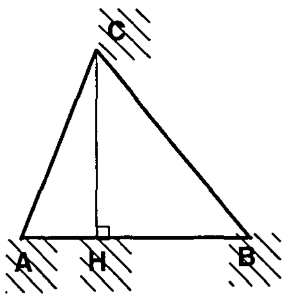


이때, 얻어진 두 직각 삼각형 ABC와 CDA는 합동이며, 직각 삼각형 ABC와 CDA에서 옆변들의 길이가 각각 a, b가 된다. 한편, 넓이의 성질 3에 의해, $S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA}$. $S_{\square ABCD}$ = 2S = ab이므로, S = ½ ab.

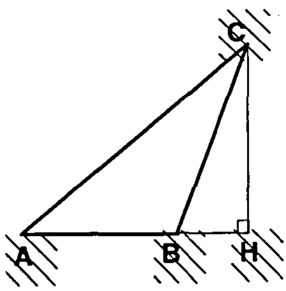
정리 8. 삼각형의 넓이는 밑변과 높이의 곱의 절반과 같다는 것을 증명하여라.

증명. S를 삼각형 ABC의 넓이라고 하자. 이때, 변 AB를 삼각형의 밑변으로 하고, 높이 CH를 작도하여, S = ½ $\overline{AB} \cdot \overline{CH}$을 증명하자. 이미 직각 삼각형에 대해서는 증명하였으므로, 이제 ABC가 예각 삼각형인 경우와 둔각 삼각형인 경우에 대해 살펴보자.

첫째, 삼각형 ABC가 예각 삼각형인 경우. 이때, 점 H는 선분 AB에 놓여있게 되며, 높이 CH는 삼각형 ABC를 두 개의 직각 삼각형 AHC와 BHC로 나눈다(그림 a). 그러므로, S = $S_{\triangle AHC}$ + $S_{\triangle BHC}$. 그러므로, S = ½ $\overline{AH} \cdot \overline{CH}$ + ½ $\overline{HB} \cdot \overline{CH}$ = ½ $(\overline{AH} + \overline{HB}) \cdot \overline{CH}$ = ½ $\overline{AB} \cdot \overline{CH}$.



<그림 a>



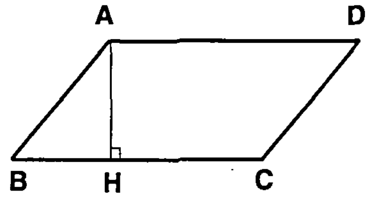
<그림 b>

둘째, 삼각형 ABC가 둔각 삼각형인 경우. 이때, 점 H는 선분 AB의 밖에 있고, 선분 BC는 삼각형 AHC를 두 개의 삼각형 ABC와 BHC로 나눈다(그림 b). $S_{\triangle AHC}$ = S + $S_{\triangle BHC}$. 그러므로, S = ½ $\overline{AH} \cdot \overline{CH}$ - ½ $\overline{BH} \cdot \overline{CH}$ = ½ $(\overline{AH} - \overline{BH}) \cdot \overline{CH}$ = ½ $\overline{AB} \cdot \overline{CH}$.

정리 9. 평행사변형의 넓이는 평행사변형의 밑변과 높이의 곱과 같다는 것을 증명하여라.

증명. S를 평행사변형 ABCD의 넓이라고 하자. 변 BC를 밑변으로 하고, 높이 AH를 긋고, S =

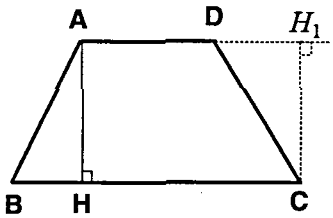
$\overline{BC} \cdot \overline{AH}$를 증명하자(그림 참조).



대각선 AC는 평행사변형을 두 개의 삼각형 ABC와 CDA로 나눈다. 평행사변형의 성질에 의해, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$이고, $\overline{AD}$는 공통이므로, 삼각형 ABC와 CDA는 합동이다. 그러므로, $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = 2S_{\triangle ABC}$. 이로부터, $S = 2 \cdot ½\,\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \overline{BC} \cdot \overline{AH}$.

정리 10. 사다리꼴의 넓이는 밑변들의 합의 절반에 높이를 곱한 것과 같다는 것을 증명하여라.

증명. S를 밑변이 AD, BC이고, 높이가 AH인 사다리꼴 ABCD의 넓이라고 하고, $S = ½(\overline{AD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AH}$를 증명하자(그림 참조).



대각선 AC는 사다리꼴을 두 삼각형 ABC와 CDA로 나눈다. 이때, 선분 BC와 AD를 삼각형의 밑변으로 잡으면, $\overline{AH}$와 $\overline{CH_1}$은 높이가 되며, $\overline{AH} = \overline{CH_1}$. 그러므로,

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} = ½\,\overline{AH} \cdot \overline{BC} + ½\,\overline{CH_1} \cdot \overline{AD}$$
$$= ½\,(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{AH}.$$

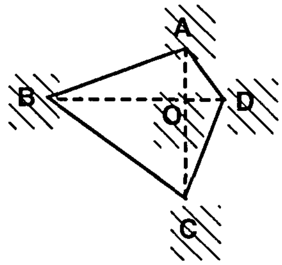
이제, 대각선을 포함하는 직선들이 직교하는 임의의 사각형의 넓이를 구하는 방법을 살펴보자.

정리 11. 만약, 사각형의 대각선을 포함하는 직선들이 직교하면, 이 사각형의 넓이는 대각선의 곱의 절반과 같다는 것을 증명하여라.

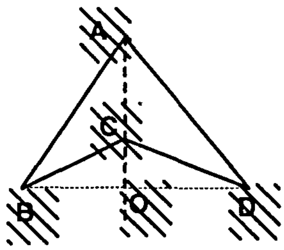
증명. ABCD를 주어진 사각형이고, 대각선 AC와 BD를 포함하는 직선들이 직교한다고 하자. 이때, 사각형 ABCD를 오목인 경우와 볼록인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

첫째, 사각형 ABCD가 볼록 사각형인 경우(그림 *a*). 사각형 ABCD는 대각선에 의해 네 개의 직각 삼각형으로 나뉘게 되며, 이들의 합이 구하는 사각형 ABCD의 넓이가 된다. 대각선들의 교점을 O라 하면,

$$\begin{aligned} S_{\square ABCD} &= S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD} \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{AO}\cdot\overline{BO} + \tfrac{1}{2}\overline{BO}\cdot\overline{CO} + \tfrac{1}{2}\overline{CO}\cdot\overline{DO} + \tfrac{1}{2}\overline{AO}\cdot\overline{DO} \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}. \end{aligned}$$



<그림 a>



<그림 b>

둘째, 사각형 ABCD가 오목 사각형인 경우(그림 *b*). 직선 AC와 대각선 BD의 교점을 O라 하면, 선분 BO와 DO는 각각 삼각형 ABC, ACD의 높이가 된다. 그러므로,

$$S_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BO},\quad S_{\triangle ACD} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DO}.$$

선분 AC는 사각형 ABCD를 두 삼각형 ABC, ACD로 나누므로,

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BO} + \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DO} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}. \end{aligned}$$

인도의 수학자 브라마굽타는 정리 11에서와 같은 직교하는 대각선을 가지는 사각형들에 대한 많은 연구를 하였다. 그는 정리 11의 결과와 헤론의 공식을 이용하여, 변의 길이를 이용하여 사각형의 넓이를 구하는 다음과 같은 브라마굽타 공식을 발견하였다고 전해진다[3]: a, b, c, d를 원에 내접하는 사각형의 변의 길이라 할 때, 사각형의 넓이 S = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$(단, p는 사각형 둘레의 절반).

5. 문제해결에서 넓이의 활용

다각형의 넓이는 합동, 닮음, 벡터, 삼각함수, 그리고 좌표계 등과 같이 여러 가지 도형 문제를 해결하는 유용한 도구로써 매우 유용하게 활용될 수 있다. 한인기·이상근(2000)은 넓이를 이용하여 삼각형의 다양한 성질들을 증명하였고, 부피를 이용하여 사면체의 많은 성질들을 증명함으로써, 넓이나

3) 브라마굽타의 공식 발견 과정에 대한 상세한 자료는 "한인기(2001). 인도수학과 브라마굽타의 공식. 수학사랑 제 25호. 서울: 수학사랑"을 참조하기 바람.

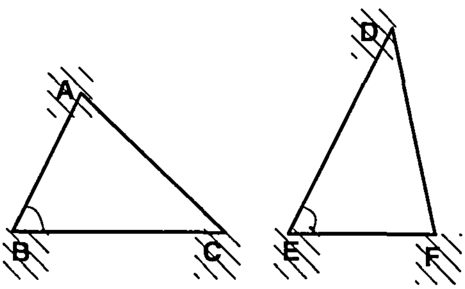
부피가 도형의 성질을 탐구하는데 매우 유용하다는 사실을 제시하였다. 본 연구에서는 삼각형의 넓이가 삼각형의 이등분선이나 닮음에 관한 정리들을 증명하는데 유용한 도구 될 수 있다는 것을 제시할 것이다.

(1) 삼각형에서 이등분선과 관련된 성질의 탐구

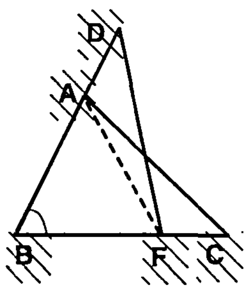
삼각형의 이등분선에 관한 성질들 중에서 문제해결 과정에서 매우 많이 사용되는 것이 **어떤 꼭지점에서 내린 이등분선이 대변을 그 각과 인접한 삼각형의 두 변에 비례한 선분으로 분할한다**는 것이다. 중학교 수학 교과서에서는 이 성질을 닮음을 이용하여 증명하고 있는데 본 연구에서는 넓이를 이용하여 손쉽게 증명할 것이다. 이를 위해, 우선 다음 정리를 살펴보자.

정리 12. 두 삼각형이 같은 각을 가지면, 이 두 삼각형의 넓이의 비는 같은 각을 둘러싸고 있는 변들의 곱의 비와 같다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC와 DEF의 각 B와 E가 같다고 하자(그림 *a*). 이때, 각 B와 E를 포개놓고, 점 A와 F를 연결하자(그림 *b*).



<그림 a>



<그림 b>

삼각형 ABF의 넓이를 S, 그리고 삼각형 ABC, DEF의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. 이때, 삼각형 ABF와 ABC에서 밑변을 각각 $\overline{BF}$, $\overline{BC}$로 생각하면, 그 높이가 같으므로,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \text{ --- ①}$$

한편, 삼각형 ABF와 DEF에서 밑변을 각각 $\overline{AB}$, $\overline{DE}$로 생각하면, 그 높이가 같으므로,

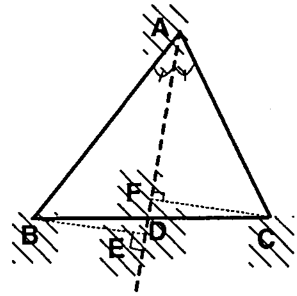
$$\frac{S}{S_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ --- ②}$$

①, ②로부터, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{DE}\cdot\overline{EF}}$.

정리 13. 선분 AD가 삼각형 ABC의 이등분선일 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$를 증명하여라.

우선, 중학교 교과서에 제시된 닮음을 이용한 증명 방법을 살펴보기로 하자.

증명 1. 꼭지점 B, C에서 ∠A의 이등분선에 내린 수선의 발을 각각 E, F로 한다.



△ABE와 △ACF에서, 가정에 의해 ∠BAE = ∠CAF --- ①

작도에서 ∠AEB = ∠AFC = 90° --- ②

①, ②에서 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같으므로, △ABE ∽ △ACF.

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} \text{ ---③}$$

또, △BDE와 △CDF에서, 맞꼭지각인 ∠BDE = ∠CDF --- ④

작도에서 ∠BED = ∠CFD = 90° --- ⑤

④, ⑤에서 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같으므로, △ADE ∽ △CDF.

$$\therefore \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ ---⑥}$$

③, ⑥에서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$.

살펴본 닮음을 이용한 증명 방법은 학생들에게 그리 쉬운 증명은 아니다. 왜냐 하면, 첫째 학생들은 꼭지점 B, C에서 ∠A의 이등분선에 내린 수선을 내리는 보조선을 작도해야 하고, 둘째 보조선의 작도 결과 얻어지는 삼각형은 모두 7개인데, 증명 과정에 필요한 삼각형을 선택하는 문제가 발생하며, 셋째 삼각형의 닮음을 두 번이나 사용해야 한다. 이제, 정리 13을 삼각형의 넓이를 이용하여 방금 전에 고찰했던 문제점들을 극소화 하는 접근을 살펴보자.

증명 2. 삼각형 ABD와 ACD의 넓이를 S_1, S_2라 하자. 그러면, 정리 12에 의해,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ --- ①}$$

한편, 삼각형 ABD와 ACD에서 변 BD, CD이 밑변일 때, 두 삼각형은 높이가 같으므로,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ --- ②}$$

①, ②에 의해, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$.

(2) 삼각형의 닮음 조건 증명

삼각형의 닮음 조건은 중학교 기하 과정에서는 그 증명이 다루어지고 있지 않다. 그 결과 학생들은 닮음 조건을 증명 없이 받아들이기 때문에, 닮음 조건을 닮음의 정의와 혼돈하는 경우가 발생하게 된다. 본 연구에서는 삼각형의 넓이를 이용하여 삼각형의 세 가지 닮음 조건을 중학교 학생들도 이해할 수 있는 수준에서 그 증명을 제시할 것이다.

정리 14(첫 번째 닮음 조건). 두 삼각형에서 대응하는 두 각의 크기가 같으면, 이 두 삼각형은 닮음이라는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC와 DEF에서 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$라 하자. 그러면, 삼각형의 세 내각의 합이 평각과 같으므로, $\angle C = \angle F$이다. 이제, 두 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비가 같다는 것을 증명하자. 삼각형 ABC, DEF의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면, $\angle A = \angle D$이므로, 정리 12에 의해

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}} \text{ --- ①}$$

그리고, $\angle B = \angle E$이므로, 정리 12에 의해

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{DE}\cdot\overline{EF}} \text{ --- ②}$$

①, ②로부터, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ --- ③

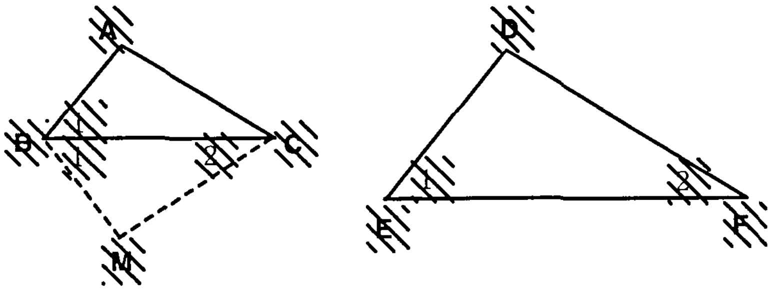
마찬가지 방법으로, $\angle B = \angle E$와 $\angle C = \angle F$인 것을 이용하면,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ --- ④}$$

③, ④로부터 $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$임을 알 수 있다.

정리 15(두 번째 닮음 조건). 두 삼각형에서 대응하는 두 변의 길이의 비와 그 끼인각이 같으면, 이 두 삼각형은 닮음이라는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC와 DEF에서 $\angle B = \angle E$이고, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$라 하자. $\angle B = \angle E$이므로 정리 14에 의해, 대응하는 한 각의 크기가 같다는 것을 증명하면 된다. 이를 위해, 삼각형 ABC의 변 BC를 변으로 하며 크기가 $\angle E$, $\angle F$와 같은 각을 각각 작도하자(그림 참조).



이때, 삼각형 MBC와 DEF는 정리 14에 의해 닮음이므로,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{MC}}.$$

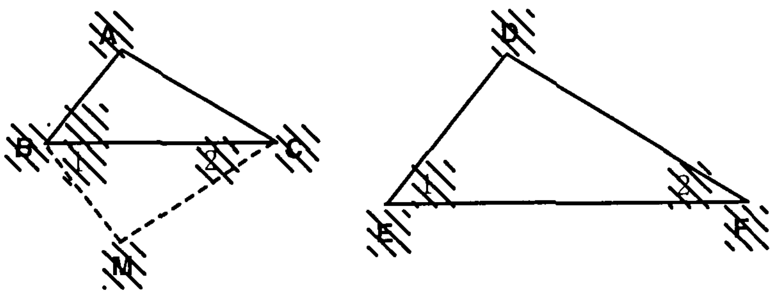
얻어진 등식과 주어진 조건 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$으로부터,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DE}}.$$

이로부터, $\overline{AB} = \overline{BM}$. 즉, 삼각형 ABC와 MBC는 SAS 합동 조건에 의해 합동이 된다. 그러므로, $\angle ACB = \angle MCB = \angle DFE$이고, 두 삼각형 ABC와 DEF는 닮음이 된다.

정리 16(세 번째 닮음 조건). 두 삼각형에서 대응하는 세 변의 길이의 비가 같으면, 이 두 삼각형은 닮음이라는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC와 DEF에서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$라 하자. 정리 16에 의해, 대응하는 한 각의 크기가 같다는 것을 증명하면 된다. 이를 위해, 삼각형 ABC의 변 BC를 변으로 하며 크기가 $\angle E$, $\angle F$와 같은 각을 각각 작도하자(그림 참조).



이때, 삼각형 MBC와 DEF는 정리 14에 의해 닮음이므로,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{MC}}.$$

얻어진 등식과 주어진 조건으로부터,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DE}}, \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{DF}}.$$

이로부터, $\overline{AB} = \overline{BM}$, $\overline{AC} = \overline{MC}$. 즉, 삼각형 ABC와 MBC는 SSS 합동 조건에 의해 합동이 된다. 그러므로, ∠ABC = ∠MBC = ∠DEF이고, 두 삼각형 ABC와 DEF는 닮음이 된다.

6. 결 론

본 연구에서는 다양한 다각형들의 넓이를 규정하는 공식들을 유도하고, 유도된 넓이의 공식들을 활용한 다양한 문제해결의 아이디어를 제시하고, 이를 통해, 효율적인 수학 교수-학습을 위한 접근을 모색하였다.

본 연구에서는 다각형의 넓이를 정의 구역이 다각형이고, 몇 가지 성질을 만족시키는 함수로 규정하고, 넓이의 성질에 근거하여 정사각형의 넓이와 직사각형의 넓이를 구하는 구체적인 증명 방법을 고찰하고, 기존의 증명 방법을 좀더 명료화하였다. 그리고, 한 변이 a인 정사각형의 넓이가 $S = a^2$인 것으로부터, 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 그리고 사다리꼴과 같은 중등학교 수학교육에서 다루는 몇몇 기본 도형들의 넓이 공식들을 체계적으로 유도함으로써, 다각형 넓이를 구하는 공식들 사이의 관련성을 제시하였으며, 다각형들의 넓이에 대한 체계적인 접근의 예를 제시하였다.

한편, 본 연구에서는 삼각형의 넓이를 활용하여, 삼각형의 이등분선의 성질, 그리고 삼각형의 세 가지 닮음 조건을 증명하였다. 특히, 본 연구에서 고찰한 이등분선의 성질에 대한 증명 아이디어는 수학 교과서에 제시된 닮음을 이용한 증명 방법보다 학생들이 훨씬 접근하기 쉬우며, 이 아이디어는 다른 문제들의 해결 과정에도 활용될 수 있다.

그리고, 본 연구에 제시된 닮음 조건의 증명은 넓이를 도구로써 활용했다는 것 이상의 의미를 가진다. 중학생들을 면접해 보면, 닮음과 닮음 조건을 명확하게 구분하지 못하는 경우가 많았다. 그 이유들 중의 하나는 현재 중학교 교과서에서 닮음 조건을 증명하지 않고, 마치 공리처럼 받아들인다는 것이다. 즉, 많은 학생들은 닮음 조건을 증명할 수 있다는 사실조차도 의아해 하는 경우가 많으며, 닮음 조건이 닮음의 정의로 생각하는 경우가 많다.

본 연구에서 제시된 닮음 조건의 증명은 그 아이디어에 있어 중학교 학생들에게 커다란 부담을 주지 않고, 친숙한 개념인 삼각형의 넓이를 이용하여 제시하고 있기 때문에, 교사가 심화학습으로 학생들에게 적절하게 소개해도 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강완 · 백석윤 (1998). 초등 수학교육론, 서울: 동명사.
나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 -중학교 기하 단원을 중심으로-, 서울대학교 박사

학위 논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색, 한국교원대학교 박사 학위 논문.

류성림 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국교원대학교 석사 학위 논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로, 서울대학교 박사 학위 논문.

신현성 (1999). 수학교육론, 서울: 경문사.

우정호 (1994). 증명 지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집, 4(1), 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (2001). 인도 수학과 브라마굽타의 공식, 수학사랑 25, 서울: 수학사랑.

한인기 (2000a). 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용, <수학교육 논문집>, 10, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2000b). 작도 문제를 활용한 심화 학습 교재 개발에 관한 연구. <수학교육 학술지>, 5, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 강인주 (2000a). 모어-마스케로니의 정리에 대한 고찰, 한국수학사학회지, 13(2), 서울: 한국수학사학회.

한인기 · 강인주 (2000b). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, <수학교육 논문집>, 10, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 이상근 (2000). 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발, <수학교육 학술지> 5, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1999a). 작도 문제 해결 방법, <수학교육 논문집> 9, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1999b). 평면 기하학의 기초, 충북: 협신사.

한인기 · 장병철 (1997). 기하 문제의 분석적 증명 방법과 그 본질, 수학교육 프로시딩, 5, 서울: 한국수학교육학회.

한태식 (1995). Van Hiele 이론에 근거한 대표적 연구의 비교, 대한수학교육학회 논문집, 5(1), 서울: 대한수학교육학회.

Lakatos (1976). *Proofs and Refutations.*, Cambridge: Cambridge University Press.

<러시아 참고 문헌>

끼쇼료프 A. P. & 릐프낀 N. A. (1996). *기초 기하학.* 모스크바: "교육" 출판사.

발띠얀스키 V. G. (1985). *기초 기하학: 교사를 위한 책.* 모스크바: "교육" 출판사.

빠가렐로프 A. V. (1990). *기하학: 7-11학년 교과서.* 모스크바: "교육" 출판사.

아따나시얀 L. S.; 부뚜조프 V. F.; 까돔쩨프 S. B.; 뽀즈냑 E. G. & 유디나 I. I. (1996). *기하학: 7-9학년 교과서.* 모스크바: "교육" 출판사.

아따나시얀 L. S., 데니소바 N. S., 실라예프 E. V. (1997). *기초 기하학 과정.* 모스크바: Santaks Press.