

초등수학교육에서 사고학습에 대한 소고

김 규 상 (한국교원대학교 대학원)

사회는 빠르게 변화하고 있으며, 그러한 변화는 새로운 적응을 요구하고 있다. 그래서 오늘날의 사회는 “사고력의 사회”라고 생각하는 지도 모르겠다. 이에 발맞추듯, 교육과정에서도 사고력 개발의 필요성을 역설하고 있지만, 실제 교육현장에서는 어떠한가?

어떻든 이런 저런 이유로 ‘주입식’수업, ‘암기식’수업은 안 된다고 오랜 세월 많은 연구자들이 합창을 해 왔다. 그러나 ‘예전대로’, ‘하던대로’의 전통은 별로 바뀌지 않고 계속되고 있는 것 같이 보인다.

따라서, 본 고는 아동들이 수학수업에서 사고학습을 어떻게 함으로써, 아동의 능력을 강화하고, 아동의 인지발달을 촉진하며, 개인의 지식 수준을 향상시킬 수 있는 특별한 방법을 찾고자 한다.

I. 서론

사회는 변화하고 있으며, 이에 따라 사려 깊은 판단과 창의적인 사고를 할 줄 아는 사람이 그 어느 때 보다는 강조되고 있다. 따라서, 사회의 변화에 발맞춰, 현 교육과정에서도 학습과정, 탐구 및 문제해결 과정 속에서 아동들의 사고력 향상을 위한 대안들이 제시되고 있다.

초등학교 아동들은 각 교육과정에서 추론을 배우고, 이해를 배우고, 무엇보다도 혼자서 생각하는 것을 배워야 한다. 특히, 중등학교에서 학습에 대한 전통적인 접근방법에 따른다면, 훌륭한 수학적 개념들은 교사들의 머리 속에 들어있다고 생각해 왔다. 그래서 학생들은 더 나은 지식정보를 얻기 위해서는 교사들의 시선에 잘 보일 필요가 있다고 생각했다. 따라서, 이런 가르침의 전달과정에서는 아동자신의 개념들은 별로 중요하게 생각하지 않았다. 몇몇의 초등교사들은 색다른 접근과 발견 모델을 사용하였는데, 여기에서 좋은 개념들은 실세계 어느 곳에서도 활용될 수 있는 것으로 간주된다. 만약 아동들이 좋은 개념들을 찾고자 한다면, 그것은 찾을 수 있다. 일단, 찾거나 발견된 개념들은 아동들이 의심하거나 의문을 가졌던 그런 개념들이 될 것이다. 교사들은 이런 것들을 가능하게 할 수 있는 자료나 연습을 제공하고, 그 다음 결과를 기다리는 것이 그들의 역할일 것이다. 그러나 이런 접근은 아동들이 개념의 가치를 무시할 수도 있는 학습상황을 초래할 수도 있다. 그러므로 사고를 위한 가르침은 가치 있는 아동 자신의 개념에서 시작된다.

어떻든 이런 저런 이유로 ‘주입식’수업, ‘암기식’수업은 안 된다고 오랜 세월 많은 연구자들이 합창을 해 왔다. 그러나 ‘예전대로’, ‘하던 대로’의 전통은 별로 바뀌지 않고 계속되고 있는 것 같이 보인다.

따라서, 본 고는 아동들이 수학수업에서 사고학습을 어떻게 함으로써, 아동의 능력을 강화하고, 아동의 인지발달을 촉진하며, 개인의 지식 수준을 향상시킬 수 있는 특별한 방법을 찾고자 한다.

II. 본 론

1. '사고'란 무엇인가?

김영채(1998)는 사고(thinking)란 '이해를 목적으로 하는 상징적 활동으로 사려깊고, 규제적이며, 창의적인 판단과 문제해결을 목적으로 하는 목표 지향적인 것이다'라고 한다. 그리고 사고는 두 가지 특징적인 속성을 가지고 있다. 즉 사고는

- (i) 표상(기호, 상징, 지식)을 다루고 그것을 조작(작동, operation, manipulation)하는 활동이며,
- (ii) 그러한 과정을 통하여 '의미를 만들어'가며(의미부여, 의미의 탐색) 그래서 판단을 내리고 문제 해결하는 행동이다.

2. '사고'과정의 분류

(1) 사고과정을 나열하거나 위계적으로 분류해 보려는 노력은 참으로 많다. 그러나 여기서는 Beyer(1988)을 참고하여 사고의 과정을 분류해 보면, 다음과 같다.

【 사고 과정의 분류 】

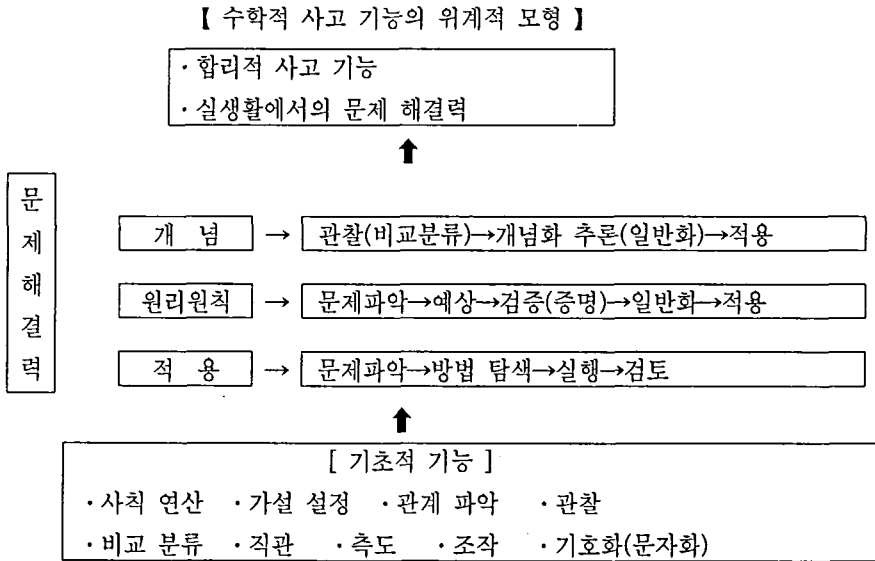
A. 초인지 조작(초인지 사고)

B. 인지 조작(사고 기능과 전략)

1. 복합적 사고 전략
 - (1) 문제 해결
 - (2) 의사 결정
 - (3) 비판적 사고
 - (4) 창의적 사고
2. 발달적 사고 기능
 - (1) 개념 형성
 - (2) 설명
 - (3) 예측
 - (4) 가설 형성
3. 기초적 사고 기능
 - (1) 관찰
 - (2) 추론
 - (3) 미시 사고적 기능

(2) 그러나 앞의 사고 과정의 분류에 있는 것과 사고 과정의 위계적인 분류는 일반적인 것이며, 따라서 어떤 구체적인 맥락 속에서의 사고는 아니다.

사고가 사용되는 맥락(context), 즉 사용되는 '경우'는 과제나 상황에 따라 매우 다양할 것이지만, 학교에서는 '교과목'이 중요한 맥락일 것이다. 아래에서는 대구시 교육청 산하 교사들이 연수과정 중에 만들어 본 수학적 사고 과정의 위계적 모형을 인용해 본다(대구 교육청, 1996).



그러나 이러한 위계적 모형은 수학적 사고력 교육을 이해하고 실천하는데 기초가 될 것이다.

3. 초등수학교육에서의 수학적 사고의 범주

학교에서 아동들을 사고하도록 가르치는 것은 교육과정을 통하여 얻을 수 있다. 최근 수학교육 연구에 따르면, 아동들이 문제해결 과정에서 해를 자신만의 독특한 방법으로 찾아내는데 초점을 맞추고 있다. 교사가 수학적 사고를 하도록 지원할 수 있는 가장 중요한 것 중에 하나는 자연스러운 성향과 그들 발전에 용기를 북돋아 주면서 교육을 시키는 것이다.

따라서, 다음과 같은 질문들은 수학적 담화를 증진시킬 수 있을 것이다.

- 너는 왜 그렇게 생각하니?
- 네가 의미하는 것을 보여줄 수 있겠니?
- 그것을 할 수 있는 다른 방법은 없니?
- 또 다른 방법으로 설명할 수 있겠니?
- 그것을 어떻게 설명할 수 있겠니?
- 그 개념을 어디에 사용할 수 있겠니?
- 또 다른 예제를 만들 수 있겠니?

그리고, 초등수학교육에서 수학적 사고의 다양한 영역은 수, 대수, 모양, 측도, 자료처리, 그리고 문제해결로써 범주화 할 수 있다.

(1) 수(Number)

수학적으로 생각하는 아동을 얻고자 한다면, 우리는 특별한 계산 방법보다 수에 관한 아동들의 개념에 관심을 기울여야 한다. 사실, 아동들에게 어떻게 계산하는지를 물어보면, 엄청나게 다양한 방법을 발견하게 된다. 아동들의 다양한 방법은 그들이 학교에서 항상 배웠던 표준 지필 방법과 비교해서 그들의 머리 속에서 실제로 사용된다. 한 아동은 뺄셈에 대한 알고리즘을

$$\begin{array}{r} 31 \\ - 16 \\ \hline \end{array}$$

15 와 같이 나타냈고,

8살 도입이는 다음과 같이 뺄셈을 하였다.

$$\begin{array}{r} 31 \\ - 16 \\ \hline 25 \end{array}$$

정휘는 $45 \div 3$ 를 모르지만, 45개의 과자를 세 사람에게 나눠주는데 거의 어려움을 느끼지 않았다. 전통적인 방법으로 문제를 해결해 온 아동들에게 용기를 북돋아 주면 그들은 자신의 수학적 전략을 발전시킬 수 있는 능력이 있다는 것을 알게된다. 그래서 수학적 사고는 그들 자신의 문제를 구성할 줄 아는 도전적인 아동들에게 발달될 수 있다.

- 답이 25가 될 수 있도록 문제를 만드시오.
- 15대의 트럭이 답이 되도록 문제를 생각해 보시오.
- 360개의 소세지가 답이 되도록 문제를 만드시오.

수 활동을 격려하려면, 예를 들어, '너의 전화번호와 +, -, \times , \div 를 이용하여 서로 다른 수를 어떻게 만들 수 있겠니?'라고 질문을 하는 것이다. 그리고 전자계산기는 수 활동(수 조작)과 수를 찾는 데 도움을 줄 것이다. 예를 들면, '수를 선택하라, 999라고 하자. 수 1부터 9까지와 +, -, \div , = 를 이용하여 999를 만들어 보시오'.

그리고, 수학적 사고의 중요한 부분은 '만약~이면, ~이다'. 이것은 실생활 사고와 연관이 있다. 예를 들어, '만약 내일 비가 내리면, 우리는 소풍을 갈 수 없다'를 생각해 보자. 그러나 '만약 내일 비가 내리면, 영희의 생일이다'는 생각할 수 없을 것이다. 이 경우에 문장의 마지막 부분은 비록 내일이 영희의 생일일지라도 앞부분과 연관될 수 없다! 비슷하게, '만약~이면, ~이다'라는 사고는 수에도 적용시킬 수 있다. 만약 $2 \times 16 = 32$ 라면, $16 \times 2 = 32$ 또 $32 \div 2 = 16$ 는 옳은 것이다. 나중에 아동들에게 '만약~이면, ~이다' 사고에서 수 대신에 문자를 적용시킬 수 있다. 예를 들어, 만약 $2 \times n = 12$ 라면, $4 \times n = ?$. 수의 패턴을 찾고 그들 자신의 알고리즘을 고안하는 과정 속에서, 아동들은 대수의 기초를 소개받게 될 것이다.

(2) 대수 (Algebra)

대수는 수의 패턴에 대한 연구에서 발전되었다. 이런 패턴에 대한 연구는 모든 경험의 형태에서 인간 마음의 기본적인 반응이다. 패턴과 순서에 대한 연구는 소위 '형태'라고 부르는 심리학자들이 별개의 성분 인식을 갖고 시작하였다. 만약 성분들을 종합적으로 배치 또는 순서로 채우고 싶다면, 그들 속에서 작업을 하거나 그들과 함께 다뤄야 한다. 음악에서, 멜로디의 길은 각각의 기호도 아니고, 각각의 음표를 그리는 것도 아니고, 오선줄에 음표를 그리는 것이 아니라, 그것의 세분화된 부분의 개념적인 순서에 있는 것이다. 사고의 또 다른 형태처럼, 수학적 사고는 패턴의 연구이다.

이제 연구는 교사가 아동들이 배운 수학에서 패턴과 구조를 부여하여 아동들 스스로 방법을 이용할 수 있는 효과적인 것을 제안한다.

아동들에게는 수를 패턴화하는 많은 경험이 필요하며, 그리고 이런 경험은 지능의 모든 형태라고 말할 수 있다. 어린 나이부터 수의 리듬과 게임을 소개할 수 있는데, 예를 들어, 수 집합에서 대상들의 묶음, 끝은 길을 따라 집들의 수, 수표 위에서 수의 패턴에 따라 색칠하기, 아동그룹에서 수를 빼기, 그리고 1, 3, 6, 10, 15 -와 같이 없는 숫자를 찾는 퍼즐등등..

수열에 대하여 우리는 다음과 같은 질문들을 할 수 있을 것이다.

- 다음에 무엇이 오겠는가?
- 무엇이 없는가?
- 어떤 패턴으로 볼 수 있는가?

합은 단지 특별한 방법에서 논리적인 수의 패턴이다. 고학년 아동들은 창안된 기호를 가지고 그들 자신의 수 패턴을 고안할 수 있을 것이다. 예를 들면, 기호를 ● 이라고 하자. 그러면 아동들은 기호의 양쪽에 있는 숫자가 무엇을 의미하는지를 알 수 있을 것이다. 만약 $3 \bullet 4 = 6$ 이 참인 명제라면, ● 는 무엇을 의미하는가? (두 수를 곱하고 그리고 두개의 수에 의해서 나눈다는 의미일 수 있다; $2 \bullet 5 \bullet 3 = 10$). 아동들은 기호가 어떤 의미라는 것을 설명할 수만 있다면, 그들이 좋아하는 어떤 기호를 사용할 수 있을 것이다. 아동들이 교사가 하는 것을 본다면, 그들은 문제를 공유할 것이다.



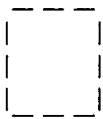
(3) 모양 (Shape)

기하학은 선, 면과 공간과 관련이 있다. 여기서 중요한 것은 종이 위에 나타내는 '표시'보다는 오히려 아동들의 머리 속에 형성되는 개념이다. 예를 들어, 원이란 무엇인가?라는 질문을 해 보면, 아동들은 '둥그랗게 그리기', '점 하나를 중심으로 직선을 등글게 하는 것'이라고 대답한다. 따라서 아동들에게는 그리는 기술과 모양에 대한 인식을 가르칠 필요가 있다. 아동들은 모양의 어휘와 수학적 담화의 관계를 알 필요가 있다. 고학년 아동들은 원의 원주를 어떻게 말할 수 있는지에 대해 많은 어려움을 갖는다. 모양을 탐구한다는 것은 모양을 어떻게 채울 수 있는지, 어떻게 분해할 수 있는지, 어떻게 조각들을 이어 맞출 수 있는지와 같은 실험을 통해서 많은 기회를 제공해야 한다.

학습에 따라, 기하학적인 모양을 포함하는 수업시간에 다음과 같은 질문들을 할 수 있다.

- 아동들은 경험을 통해서 어떤 지식과 개념을 향상시킬 수 있는가?
- 아동들은 경험을 통해서 어떤 지식과 개념을 지하시킬 수 있는가?

그리고 모양과 수 사이에는 밀접한 관련이 있는 데, 예를 들면,

	면의 길이 : 1	총 길이의 수 : 4
	면의 길이 : 2	총 길이의 수 : 8
	면의 길이 : 3	총 길이의 수 : ?

- 너는 여기서 어떤 패턴을 찾을 수 있겠니?
- 성냥 또는 그려서 이용하라. 너는 얼마나 많은 패턴을 만들 수 있겠니?

또한, 주사위를 사용하면,

- 하나의 주사위에서, 길이 ; 1, 면 : 6, 각 : 12
- 두 개의 주사위에서, 길이, 면, 각은 각각 얼마인가?
- 세 개의 주사위에서, 길이, 면, 각은 각각 얼마인가?
- 10개의 주사위에서, 길이, 면, 각은 각각 얼마인가? 등등...

주사위 면, 각의 수에서 어떤 패턴을 찾을 수 있는가? 벽의 블록이나 부엌의 타일 패턴을 조사해 보자. 장기판이나 바둑판을 생각해 보아라. 2×2 , 3×3 , 4×4 판에서는 얼마나 많은 사각형이 있는가? 모양과 측도에서 발견될 수 있는 것은 패턴이다. 패턴은 “진리뿐만 아니라 최상의 아름다움”에 있다고 Bertrand Russell은 말했다.

(4) 측도(Measure)

아동들은 수학뿐만 아니라, 수학 그 자체에도 관심이 없다. 따라서 아동들은 그들 자신과 관련있는 것에만 관심이 있다. 아동들은 손뼉으로 책상을 재 본다고나 여행하는 동안 자동차의 속도를 측정해 보는 것이 뜻이 있다고 생각하지 못한다. 그러나 아동들은 그들의 숨을 얼마나 오랫동안 참을 수 있을까?, 얼마나 빨리 걸을 수 있을까?, 종이 비행기를 얼마나 크게 만들 수 있을까?, 서장훈 선수는 얼마나 클까?, 책상이 출입문을 통과할 수 있을까?, 또는 보온병에 있는 마실 물이 얼마나 뜨거울까? 차가울까? 등과 같은 것에는 관심이 많다.

측정활동에서 사고를 향상시킬 수 있는 방법은 아동들에게 먼저, 어렵해 보게 하고, 두 번째로, 어려운 것을 시험해 보고, 그리고 끝으로 검사를 요구해보도록 하는 것이다. 그리고 예상과 측정의 정

확성을 개선하기 위한 전략을 얻는 것이다.

추측 → 시험 → 검사

어림 → 실험 → 검토

이러한 과정은 과학적인 탐구방법의 응용이며, 수학을 ‘과학의 여왕’이라고 부르는 이유일 것이다.

(5) 자료 처리(Data handling)

자료 처리는 통계와 확률을 다루는 것이다. 아동들은 통계와 관련된 풍부한 대중매체에서 성장하고 있다; 기술하는 통계(홍수나 지진으로 얼마나 많은 사람이 죽는가?), 통보하는 통계(실업자는 몇 명이나 될까?), 확신하는 통계(물가는 얼마나 오를까?). 아동들의 통계적인 견해는 참고서, 신문, 잡지, 그래프, 차트, 라디오나 TV에서 다양한 자료로부터 데이터를 수집하고 분석하는 실제적인 경험을 통해서 발전해 간다. 이러한 활동을 통하여 아동들은 편견과 왜곡된 것을 찾아 볼 수 있을 것이다. 그리고 이런 질문들을 생각해 볼 수 있다.

- 정보는 충분한가?
- 정보는 확실한가?
- 어떤 결론을 얻을 수 있는가?

우리는 불확실성의 세계에 살고있으며, 확률은 불확실성을 측정하는 수단을 제공했다. 그리고 확률은 많은 통계적인 일에 기초를 제공한다. 예를 들어, 8월에 비가 내릴 확률은?, 동전을 던져 앞면과 뒷면이 나올 확률은?, 주머니 속에서 노란 공을 꺼낼 확률은?

(6) 문제해결(Problem solving)

‘주머니에 동전이 9개가 있는데, 모두 1,200원이다. 각 동전은 얼마 짜리 인가?’

이런 종류의 문제는 전통적인 수학교과서에서 표현된다. 만약 아동들이 방법을 추측할 수 있거나 요령을 안다면, 정답을 찾아낼 수 있을 것이다. 진정한 수학적 문제해결은 이미 알고 있던 문제에서 표준화된 답을 기억하는 능력이상이다. 진정한 수학의 사용은 실생활 문제의 응용에서 볼 수 있다. 수학적 문제는 출발점과 결과가 있는 분명한 목표를 가지고 있다. 곰인형을 넣을 수 있는 박스를 만들 수 있겠는가?, 얼마나 카드가 필요할까?, 그 박스는 어떤 크기일까?, 수를 합하는 욱구는 아동들 위해 확실한 문제라고 볼 수는 없으나, 그들의 주머니 돈을 저축하고 예산 계획을 짜는 것은 그들의 수학적 사고에 진정한 목적을 제공하는 것이다.

수학자 가우스가 학생시절에, 교사는 1부터 20까지 합은 얼마인가라고 물었다. 가우스는 확실하게 계산하지 않고 즉시 답을 작성하였다. 교사는 정확한 답을 보고 놀라움을 금할 수 없었다. 그것은 거의 추측이 아니었다. 대부분의 아동들이 그 문제를 받았을 때, $1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20$ 을 더해가면서 풀고 있었다. 가우스는 $1 + 20 = 21$, $2 + 19 = 21$, $3 + 18 = 21$, 그래서 $21 \times 10 = 210$ 이라는 것을 알고 있었다.

예를 들면, 문제해결을 위한 다음과 질문들을 생각해 볼 수 있다.

- 다음 문장이 참이 되도록 덧셈과 뺄셈기호를 넣어라.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100
- 500원짜리 동전 5개를 10원, 50원, 100원짜리 동전으로 바꿔라.
(얼마나 많은 방법이 있는가?, 500원 동전의 수를 다양하게 해봐라)
- 5명이 서로 악수를 한다면, 몇 번을 해야 하는가?
(사람의 수를 다르게 하여 해봐라)
- 태환이네 집에는 암탉과 돼지를 기르고 있다. 태환이는 동물들의 다리를 모두 세었더니 34개였다. 암탉과 돼지는 각각 몇 마리인가? (문제를 서로 다른 동물, 다양한 다리의 수)
- 개구리가 10m 깊이의 우물에 빠졌다. 개구리는 한 시간에 1m 올라왔다가 0.5m씩 미끄러진다. 정상에 도달할 때까지 시간은 얼마나 걸리겠는가?

III. 결 론

빠르게 변화를 추구하는 사회 속에서, 새로운 교육과정은 그 사회 속에서 적응해 나갈 차세대 주자인 초등학교 아동들에게 수학적 힘, 수학적 사고력, 창의성의 향상을 부르짖고 있다. 하지만, 어떤 시도도 아동들의 수학적 개념 이해와 수학 시험결과에서는 명쾌한 대안이 되지 못하였다. 전통적으로 수학과목은 어렵다는 선입견으로 인해, 수학과목 그 자체에 많은 두려움과 실패의 원인을 제공받아 왔다. 이에 대한 해결책으로 위에서 언급한 바와 같이, 사고란, 이해를 목적으로 하는 상징적인 활동으로 사려깊고 규제적이며, 창의적인 판단과 문제 해결을 목적으로 하는 목표지향적인 것이라고 밝혔다.

따라서, 아동들의 수학수업에서 수학적 사고의 범주 하에, 담화를 통하여 아동의 능력을 강화하고, 아동의 인지발달을 촉진하며, 개인의 지식수준을 향상시킬 수 있을 것이다. 우리가 수학교실에서 학생들과 수업할 때, 교사들이 수학적 개념과 내용을 이루고 있는 지식 속으로 학생들 스스로 생각할 수 있는 힘을 키워주질 못한다면, 학생들은 아무런 지식도 얻지 못하고 수업을 마치게 될 것이다. 수학적 사고는 스스로 생각하는 과정과 그러한 과정 속에서 이뤄지는 토론에 의해서 향상될 수 있다.

우리는 수학이라는 높은 산을 이해하기까지 자신이 혼자서 올라가야 한다. 다른 사람으로부터 도움을 받을 수도 있지만, 자기 자신의 타고난 능력에 의존해야 한다. 그리고 주어진 길을 따라 가면서 얻는 것보다는 자기 스스로 길을 개척해 가면서 얻는 것이 훨씬 더 많을 것이고, 또한 오래 기억될 것이다.

참 고 문 헌

- 강완 외 (1999). 초등수학 학습지도의 이해, 서울: 양서원.
김영채 (1995). 사고와 문제해결 심리학, 서울: 박영사.

- _____ (1998). 사고력: 이론, 개발과 수업, 서울: 교육과학사.
- 대구광역시 교육청 (1996). 교과내용과 사고기능을 통합하는 수업, 교사연수자료집.
- 성일제 외 (1989). 사고교육의 이론과 실제, 서울: 배영사.
- 이진경 (2000). 수학의 몽상, 서울: 푸른숲.
- 이재규 역 (2001). 프로페셔널의 조건, 서울: 청림출판. [Drucker, P. F. (2000). *The Essential Drucker*(vols. 1)]
- Beyer, B. K. (1988). *Developing a thinking skills problem*. Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Fisher, R. (1990). *Teaching Children to Think*, Oxford University Press.