韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 33-56.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 33-56.

문제 중심 수학학습에 대한 연구
-초등학교 5학년을 중심으로-

신 인 선 (한국교원대학교)
권 점 례 (한국교원대학교 대학원)

Wheatley(1991)에 의해 알려진 문제 중심 학습은 기계적 암기식 수학 학습을 대신해서 의미형성을 강조하기 위해 채택된 학습 방법 중의 하나로, 개인의 의미 구성을 도울 뿐만 아니라 의미있는 의사소통을 조장한다. 문제 중심 수업은 일반적으로 과제, 협력학습, 공유의 세 가지 요인의 상호작용으로 보여진다. 본 연구에서는 먼저 초등학교 5학년에 적용할 수 있는 문제 중심 수학 학습 프로그램을 개발하였으며, 개발된 프로그램을 학생들에게 적용함으로써 나타나는 수학 학습 상의 변화 및 아동의 수학에 대한 태도를 분석하였다.

Ⅰ. 서 론

1. 필요성 및 목적

급변하는 사회에 대처하기 위해 수학 교육에서도 NCTM Standards와 같은 여러 가지 개혁의 움직임이 나타나고 있다. 이런 개혁의 움직임에서는 기계적으로 알고리즘 절차를 숙달하는 것 이상으로 아동의 문제해결력이나 창의성 계발에 초점을 두고 있다.

문제 중심 학습(problem-centered learning)은 기계적 암기식 수학학습을 대신해서 의미 형성(meaning making)을 강조하기 위해 채택된 학습 방법 중의 하나이다(Ridlon, 2000). Wheatley(1991)은 구성주의 학습관을 반영하는 학습 전략으로 문제 중심 학습을 들고 있다. 그에 따르면, 문제 중심 학습은 과제와 소집단 협력 학습, 공유하기의 상호작용이다. Cobb, Wood & Yackel(1991)에 의하면 이런 접근이 개인의 구성(construction)을 도울 뿐 아니라 의미있는 의사소통을 조장한다고 하였다. Stern(2000)은 수학적 지식과 능력 수준이 다양한 교실에서 한 교사가 모든 학생을 가르칠 수 있는가 하는 어려운 문제를 해결하는 한 방법으로 다양한 수준에서 탐구될 수 있는 문제를 제시하고 있다.

문제 중심 학습의 효과를 볼 수 있는 몇몇 연구들이 있는데(Bulgar & Tarlow, 1999 ; Ridlon, 2000 ; Stern, 2000), 여기서 문제는 단순 암기에 의존해 답을 기억해 내는 수준 이상으로, 여러 개의 답이 있을 수 있고 탐구활동과 사고과정을 요하며 다양한 방법으로 접근할 수 있는 탐구형 과제를 말한다. Bulgar & Tarlow(1999)의 연구는 수학 시간마다 정규 수학 교실에 참여하지 못하고 다른 학급으로 가서 보충지도를 받던 학생들을 정규 수학 교실에 참여시켜 수학 능력별 동질 집단 속에서

과제를 수행하게 함으로써 보다 큰 공동체 안에서 문제해결 경험을 얻고, 정규 교실의 일원으로 참여함으로써 자신감(self-esteem)을 갖게 하였다. Packets problem이라고 불리는 과제를 해결하는 과정에서 수학 학습 부진아들은 자신의 아이디어를 내어 문제해결 활동에 적극 참여했으며, 이런 활동을 통해서 자신감도 얻게 되었다. Stern(2000)의 연구에서는, 다양한 수학적 능력을 가진 아동들이 문제 중심의 학습에 활동적으로 참여하여 패턴을 인식하고, 패턴을 이용해서 표를 완성하거나 식을 만들어 내는 등 수학적 아이디어를 학습하였다. 또 Ridlon(2000)의 연구에서 크리스티(Christi)는 다른 교과 영역에 비해 수학에서 상당한 어려움을 보였던 아동으로, 9주 동안 문제 중심으로 구성된 실시한 특별 프로그램에 참여함으로써 수학적 능력 뿐 아니라 수학에 대한 태도에도 많은 변화를 보였다. 이상의 연구 결과에서 알 수 있듯 문제 중심 접근은 다양한 수학적 능력의 아동들이 수업에 흥미있게 참여하는 것을 가능하게 하며, 탐구활동을 통해 문제에 대한 다양한 접근과 다양한 반응을 가능하게 한다.

따라서 본 연구에서는 다양한 수학적 과제를 소집단에서 해결하는 문제 중심 수학 학습 프로그램을 통해서 아동의 수학 학습에서 나타나는 변화 과정을 살펴봄으로써 수학 교육 개혁 움직임을 반영하는 수학 교수-학습 상에 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다.

2. 연구 내용

본 연구의 목적을 실현하기 위해서 본 연구에서는 다양한 수학 과제로 구성되는 문제 중심 수학 학습을 통해 아동의 수학 학습에서 나타나는 변화를 알아본다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 구성주의와 문제 중심 학습

수학교육 개혁에 대한 최근 관점은 학교 교육의 정책이나 구조의 재조직보다 수학 교수·학습에 영향을 미치는 상황들에 초점을 두고 있다(Wood & Sellers, 1997, p.164). 이 관점은 학교에서 가르쳐지는 수학의 성질에 대한 변화뿐만 아니라 수학을 한다는 것이 무엇을 의미하는지에 대한 관점의 변화로, 수학에 대한 구성주의 관점을 나타내고 있다(Wood & Sellers, 1997, p. 165).

구성주의는 다음 두 가지 원리에 근거를 두고 있다(von Glasersfeld, 1989, p.182 : Ernest, 1996, 재인용). 첫째, 모든 지식은 수동적으로 받아들어지는 것이 아니라 인식 주체에 의해서 활동적으로 구성된다. 이 원리에 의하면 교사는 학생들의 머리 속에 지식이나 아이디어를 주입할 수 없으며, 학생 스스로 의미를 구성해야 한다. 둘째, 인지 기능(function of cognition)은 적응력을 가지고 있으며, 그런 인지 기능은 존재론적 실재(ontological reality)를 발견하는 것이 아니라 경험 세계를 조직하게 된

다. 이 원리에 따르면, 구성주의는 절대적 지식보다는 개인의 경험에 의해 얻어진 지식에 관심을 두며, 지식의 진리성 개념을 생존 가능성(viability) 개념으로 대치하고 있다. 이것에 대해 von Glasersfeld(1987 : Wheatley, 1991, 재인용)은 다음과 같이 진술한다 :

> 구성주의의 혁신적인 측면은, 지식이 존재론적 실재와 연결된다는 의미에서 참이 아니고 그럴 필요도 없으며, 인식 주체의 행위와 사고의 가능성을 제한하는 경험적 압력을 받는다는 점에서 생존 가능성을 가져야 한다는 점이다.

김연식·박영배(1994)는 전통적인 수학 교육을 비판하고, 그것을 개선할 수 있는 하나의 대안으로 구성주의 수학교육을 들고 있다. 이것은 구성주의 관점에서 수학 교실의 실제에 적용할 수 있는 교수·학습 이론은 도출하려는 시도로, 박영배(1996, p.63)는 이러한 시도를 '수학교육학적 구성주의'라 부른다. 또한 그는 구성주의적 수학 교수·학습을 구현하는 방법으로 Underhill의 갈등 교수 학습 방법(conflict teaching)과 Wheatley의 문제 중심 교수 학습 방법을 제안한다(p.99).

Wheatley에 의해서 알려진 문제 중심 학습(Problem Centered Learning)은 구성주의 학습관을 지지하는 학습 전략이며, 교수 자료의 상당한 개혁일 뿐만 아니라 교수 학습에서 다른 개념을 요구한다(고윤희, 1996). 교사의 설명에 의해 지식이 교사에서 학생으로 수동적으로 전달되는 전통적인 설명식 수업과는 달리 문제 중심 학습에서는 주어진 문제 상황에 대하여 아동이 동료들과 의사소통을 통하여 의미를 구성하고 해결 방법에 합의하며 그 결과를 공유함으로써 학습이 이루어진다. 백선수(1999)는 수학에서 문제 중심 수업이 다음과 같은 시사점을 제공해 준다고 하였다 :

> 첫째, 학생들이 의미를 구성하도록 하는 자연스러운 본능을 일깨워준다.
> 둘째, 문제 중심 수업은 학생들에게 외재적 동기가 아닌, 내재적인 동기를 부여한다.

즉, 문제 중심 학습에서는 아동에게 일상생활 경험과 관련된 흥미로운 과제가 제시되고, 소집단 학습을 통해 지식이나 의미를 구성하게 되기 때문에 그 자체로 아동들에게 동기부여가 되는 것처럼 하는 것으로 보인다. 고윤희(1996)는 문제 중심 교수와 전통적 교수의 특징을 비교하였는데, 그것을 <표 Ⅱ-1>에 나타내었다.

<표 Ⅱ-1> 문제 중심 구성주의 교수와 전통적 교수의 비교

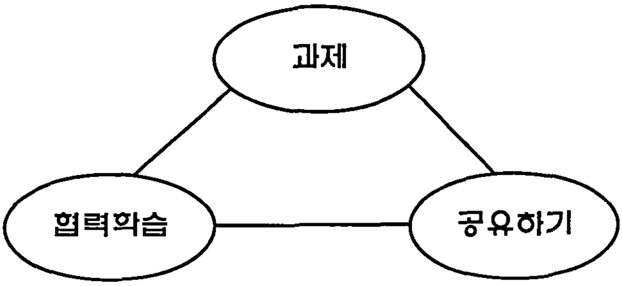
비교 관점	문제중심 구성주의 교수	전통적 교수
목표 진술	개념의 이해, 적용, 계통성을 강조하는 학습상황을 강조하기에 목표 역시 상황의 적절성을 고려한 통합적 목표 설정	상황을 통제한 행동적 목표 설정
학습 과제	사고를 유발하며 수업 이전의 사고를 활용할 수 있고 단일한 해답이 있는 것이 아니라 다양한 해결책이 있을 수 있는 과제 선택	교과서 위주의 과제 선택

비교 관점	문제중심 구성주의 교수	전통적 교수
동기 유발 전략	과제가 주어지는 상황 자체가 학습자의 학습 의욕, 문제 해결 의욕 등을 일으킴	학습 목표와는 직접적으로 관련이 없더라고 학습 자체에 주의를 집중하기 위해서 교사에 의한 동기 유발
교수 전개 전략	도입 → 과제 제시 → 소집단 학습 →전체 토의 → 정리	도입 → 학습 목표 제시 → 문제해결의 원리 설명 → 학습 과제의 시연 → 연습문제 제시 → 정리 및 차시 예고
평가	학습자 스스로 자신에 대한 평가 또는 학습자 상호간의 평가	교사가 학생 지식의 유일한 평가자
학습 방법의 특징	과제에 대한 자신의 의미를 만들고 소집단 학습 속에서 다양한 해결책을 보고 의미 협상의 과정을 거쳐 공유된 개념을 발달시키는 학습자 중심의 수업	원리를 설명하여 이해시키고 일련의 절차를 습득시켜서 과제에 알고리즘을 갖게 해 주는 교사 위주의 수업
학습 환경	학습 과제 중심적이며 집단 토의 속에서 역동적 학습의 강조	학습 목표 지향적이며 조용한 분위기 속에서 연습과 계산력 익히기가 강조

Schroeder & Lester(1989)는 수학 교수(teaching)에서 문제 해결을 다음 세 가지로 구분하고 있다 : 문제 해결에 **대한** 교수(teaching about problem solving), 문제 해결을 **위한** 교수(teaching for problem solving), 문제 해결을 **통한** 교수(teaching via problem solving). 다음에서는 세 가지 교수 방법을 간략하게 알아본다.

먼저 문제 해결에 대한 교수는 다른 수학적 아이디어와는 별개로 특정한 문제 해결 전략이나 기술(skills)을 가르치는 교수로, 이 교수 방법에서는 문제 해결이 수학 교수·학습의 대상이 된다. 또 문제 해결을 위한 교수는 학생들에게 중요한 수학적 아이디어를 가르치고 그것을 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 교수로, 이 교수 방법에 따르면 문제 해결은 수학 교수·학습의 목표가 된다. 마지막으로 문제 해결을 통한 교수는 문제 해결이 수학적 개념과 기능들을 가르치는 수단으로 작용하는 교수를 말한다. Schroeder & Lester의 구분에 따르면, 문제 중심 학습은 문제 해결을 통한 교수와 일맥상통한다. 문제 중심 학습 역시 학생들에게 도전적이고 흥미로운 과제(즉, 문제)를 제시하고, 학생들은 그 과제를 해결함으로써 다른 수학적 내용이나 수학적 사고 및 능력을 학습하게 된다. 여기서 문제를 해결한다는 것은 수학 교수·학습의 대상이나 목표보다는 수학으로서의 의미를 보다 많이 함의하게 된다.

Weatley(1991)은 문제 중심 수업의 구성 요소로 과제, 협력 학습, 공유하기를 들고 있으며, [그림 1]과 같은 문제 중심 학습의 모형을 제시하였다. 이 모형에 따르면 학습은 세 요소 간의 상호작용으로 일어나게 된다. 다음에서는 문제 중심 학습의 각 요소에 대해서 알아본다.



<그림 1> Wheatley의 문제 중심 학습 모형

1) 과제

Wheatley(1991)에 따르면, 문제 중심 학습의 핵심은 학생들에게 교과내용에 대한 효율적인 사고 방법을 구성하도록 지도하는 중요한 개념에 초점을 둔 일련의 문제거리가 되는 과제에 있다. 따라서 문제 중심 수업에서 사용되는 과제는 일반 설명식 수업에서 사용되는 과제와 구별되어야 한다. 전통적인 수학 교과서에서 제시되는, 단순히 규칙을 적용해서 답을 구하는 정형 문제(routine problem)보다는 학생들로 하여금 흥미를 유발하고, 탐구를 조장하는 비정형 문제(non-routine problem)가 보다 적합하다. Professional Standards for teaching mathematics(1991)에서는 좋은 과제를 다음과 같이 제시하고 있다 :

· 학생들의 지력을 사용하게 하는 과제
· 학생들의 수학적 이해와 기술을 발달시키는 과제
· 수학적인 연결을 지으며, 수학적인 아이디어에 적합한 체계를 개발하도록 학생들을 자극하는 과제
· 문제 설정(problem formulation)과 문제 해결, 수학적 추론을 요하는 과제
· 수학에 관한 의사소통을 증진시키는 과제
· 수학을 현재도 계속되는 인간 활동으로 보게 하는 과제
· 학생들의 지금까지의 다양한 경험과 성향들을 고려한 과제
· 수학을 행하는 학생들의 성향을 개발하도록 촉진하는 과제

문제 중심 수업에 사용되는 과제는 Professional Standards에서 제시되는 좋은 과제의 특성들을 가능한 한 많이 함유하고 있는 탐구형 과제이어야 한다. 따라서 다른 수학 교수·학습 방법에 비해 이 학습 모형에서는 적절한 과제의 선택이 보다 중요하게 된다.

2) 협력 학습

문제 중심 학습의 구성요소로서 협력학습은 문제 중심 학습의 핵심이라 해도 과언이 아니다. 소집단 학습을 통해서 아동은 자신의 아이디어를 집단의 다른 구성원들에게 제시하고, 그것을 정당화하며, 다른 아동의 아이디어를 주의깊게 들으면서 새로운 아이디어를 습득하거나 자신의 아이디어를 수정하게 된다. 이것은 개별적으로 주어진 문제를 해결하는 것이라고 여겨왔던 수학 학습에 대한 관

점의 변화를 요구한다(전평국 외, 2001, p. 605). Wheatley(1991)에 따르면, 아동은 소집단에서 과제를 수행할 때 자신의 아이디어에 도전을 받음으로써 자극을 받고, 따라서 아이디어를 재조직하거나 재구성해야 한다는 필요성을 인식하게 된다고 한다.

전평국 외(2001)는 우리 나라 수학 교실 문화에 비추어 볼 때 소집단 협력학습이 갖는 의의를 다음과 같이 제시하고 있다 :

첫째, 지나친 경쟁의 논리가 지배하고 있는 교실 문화의 변화를 추구한다.
둘째, 다양한 상호작용을 허용하는 수학 교실 문화를 추구한다.
셋째, 교육의 효과성 측면에서 소집단 협력 학습을 지지하는 연구 보고들이 있다.

이때 교사는 권위자나 판단자의 역할을 하는 것이 아니라 의사소통을 돕는 중재자 또는 문제 해결을 조장하는 조장자로서의 역할을 하게 된다. 즉 교사는 학생들이 이미 알고 있는 지식에 근거해서 적절한 과제를 선택하고, 학급을 소집단으로 구성하여 소집단 구성원들이 과제를 수행하는 것을 관찰하며, 학급 토의를 안내하는 역할을 한다.

3) 공유하기(sharing)

공유하기는 문제 중심 학습의 또 다른 구성요소이다. 공유하기는 일반적으로 소집단 학습 및 학급 전체 토의 상황에서 발생한다. 즉, 각 개인이 개별 학습한 결과를 소집단에서 발표하여 소집단 구성원들 내에서 합의된 하나의 아이디어를 도출해 낼 때, 또는 전체 학급 토의에서 각 소집단이 발표한 해결 방법 및 아이디어에 대해 토의를 할 때 구성원들 간에 공유가 이루어진다.

이런 활동을 통해서 학생들이 습득하게 되는 지식은 교사로부터 수동적으로 전달되는 지식이 아니라 아동 스스로 구성한 지식, 그리고 토의를 통해 공유된 지식이다. 따라서 이 학습 모형에서는 지식의 권위가 교사에서 아동들에게도 이동하게 된다.

3. 문제 중심 수업의 효과

1990년대 초 이래로 문제 중심 수업에 대한 본격적인 연구가 시작된 이래로 수학 교실에서도 문제 중심 수업의 효과에 대한 많은 연구들이 실시되었다. 그 대표적인 연구로 Purdue 대학의 Cobb, Wood, Yackel을 중심으로 장기간 이루어진 연구를 들 수 있다(Nicholls, Cobb, Wood, Yackel, & Patashnick, 1990 ; Wood, Cobb, & Yackel, 1991 ; Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti, & Perlwitz, 1991 ; Wood & Sellers, 1997). 이 프로젝트는 1986-87년에는 2학년을 대상으로 실시되었고, 1990-91년에는 확장되어 3학년을 대상으로 수행되었다. Nicholls, Cobb, Wood, Yackel, & Patashnick(1990)에서 1년 동안 문제 중심 수업을 받은 결과 학생들은 교사의 설명과 연습 문제 풀이로 일관되는 일반 수학에서 수업을 받는 학생들과 비교했을 때 주에서 실시한 표준화된 검사와 프로젝트 연구진이 만든 개념 및 응용 평가에서도 높은 점수를 얻었고, 수학에 대한 신념 검사에서

도 차이를 보였다.

Wood & Sellers(1997)에서는 2년 동안 문제 중심 학습에 참여한 학생 집단과 1년 동안 문제 중심 학습에 참여한 학생 집단(2학년에서는 문제 중심 학습을 받고 3학년에서는 교과서 중심 학습을 받은 학생 집단), 2년 동안 교과서 중심 수업을 받은 학생 집단의 수학 성취도와 수학 학습에 대한 신념이 비교되었다. 주에서 실시된 표준화 검사(ISTEL)에서 2년 동안 문제 중심 학습에 참여한 학생 집단이 연산 영역과 개념 및 응용 영역에서 다른 두 집단에 비해 유의미하게 높은 점수를 얻었다. 또 프로젝트 연구진에 의해 만들어진 연산 검사 중 계산 능력을 측정하는 검사에서는 세 집단 사이에 유의미한 차이가 나지 않았으나 개념적 이해를 측정하는 검사에서는 2년 동안 문제 중심 학습에 참여한 집단이 다른 두 집단에 비해 유의미하게 높은 점수를 얻었다. 신념 검사에서도 이 집단이 자체 동기 유발(ego mativation)에 있어 다른 두 집단과 유의미한 차이가 있음이 나타났다.

Bulgar & Tarlow(1999)의 연구에서는 공동체 안에서 문제를 해결하는 경험을 얻고, 정규 교실의 일원으로 문제 해결에 참여함으로써 자신감을 얻도록 하기 위해 수학 시간마다 특별 교실로 가서 보충 수업을 받던 수학 학습 부진아들을 정규 수학 교실의 수학 능력별 동질 집단에서 참여시켜 Packets problem이라 불리는 과제를 수행하도록 하였다. 이 연구의 수학 학습 부진아들은 소집단 내에서 자신의 아이디어를 내어 문제해결 활동에 적극 참여했으며, 그들이 제시한 문제 해결 전략도 다른 집단의 해결 전략과 비교했을 때 뒤떨어지지 않았다. 이 학급의 학생들은 몇 시간 동안 주어진 문제를 해결하려고 노력했으며 쉬는 시간이나 방과후에도 동료들과 이 문제에 대해서 토론을 했다. 이런 활동을 통해서 학생들은 자신감을 얻게 되었으며, 수업을 한지 1주일 후의 인터뷰에서 부진아 집단의 학생들은 다시 그런 수업을 받고 싶어했는데 이것은 학습자들이 문제에 의해 동기를 부여받는다는 것을 나타낸다.

Ridlon(2000)의 연구에서 기계적 암기식 수학 수업을 대신해서 의미 형성을 강조하는 대안적인 형태로 문제 중심 수업을 들고 있다. Ridlon은 다른 학습 영역에 비해 수학에서 상당한 어려움을 보였던 크리스티(Christi)라는 아동을 문제 중심 수업으로 구성된 9주 동안의 특별 프로그램에 참여하게 함으로써 그녀의 수학적 능력과 수학에 대한 태도에서의 변화를 관찰했다. 프로그램이 진행되는 동안 크리스티는 수학적 성취도에도 상당한 향상을 보였으며 자신의 수학적 이해에 대해서도 자신감을 가져 의미없는 절차를 암기하기보다는 생각하는 것이 재미있다고 하였다. 이 연구에서는 학생들이 소집단 학습에 참여해서 문제에 대해 이야기할 수 있는 기회를 가짐으로써 사고를 조직하고 무엇을 해야할지를 이해하게 된다고 하였다.

백선수(1999)는 문제 중심 수업과 설명식 수업에 따른 연산 문제와 응용문제를 해결하는 능력을 비교하였다. 초등학교 3학년을 대상으로 분수 단원에서 한 집단에서는 연구자가 개발한 문제 중심 수업을 진행하고, 다른 집단에서는 설명식 수업을 진행하였다. 그 결과 계산 능력에는 두 집단 사이에 유의미한 차이가 나타나지 않았으나, 응용문제를 해결하는 능력에는 문제 중심 수업을 받은 집단이 유의미하게 높은 성취도를 보였다. Purdue 대학의 프로젝트에서도 이와 같은 결과를 얻었다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 목적을 실현하기 위해 경기도 W시에 소재하는 5학년 1개 학급을 연구대상으로 선정하였다. 서울 근교의 아파트 밀집 지역에 위치한 이 학교는 현재 23학급 규모로, 5학년의 경우 4학급으로 구성되어 있다. 학급당 2~3명을 제외한 모든 학생들이 학교 주위의 아파트에 거주하고 있고, 학부모의 교육 관심도 높은 편이다.

이 학급은 37명의 아동으로 구성되며, 여학생이 17명, 남학생이 20명이다. 7월 초에 실시된 교내 성취도 검사 수학에서 5학년의 4학급 중 가장 높은 점수를 얻었으며, 경기도에서 특기 적성 교육의 일환으로 실시되는 수학 경시 대회에서도 이 학급의 학생들이 다른 학급에 비해 높은 점수를 얻었다.

이 학급의 담임 교사는 일반적으로 설명식 수업을 진행했다. 약 10~15분 동안 개념 및 계산 알고리즘을 설명하고, 나머지 시간 동안 학생들에게 교과서나 수학익힘책에 제시된 문제를 해결하게 했다. 따라서 이 학급의 경우 수학 시간에 소집단 협력학습은 거의 이루어지지 않았다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구의 연구내용을 수행하기 위해 다음과 같은 연구 방법을 사용하였다.

첫째, 제 7차 초등학교 수학과 교육과정 및 국내·외 논문을 참고하여 문제 중심 학습을 위한 과제를 선정하고, 선정한 과제를 중심으로 초등학교 5학년 수준에 맞게 5차시 문제중심 학습 프로그램을 구성하였다. 각 차시 수업 프로그램의 내용은 [표 1]과 같으며, 활동지 형식으로 구성하여 학생들이 수업 시간에 이용할 수 있도록 하였다.

<표 1> 각 차시의 문제 중심 학습 내용

차시	활동 주제	활동 목표
1	신발 가게에서 생긴 일	▶문제 상황의 다양한 측면에 근거해서 문제에 접근하며, 해결방법을 찾을 수 있다.
2	놀이 공원에 온 사람들	▶어림을 문제해결의 한 방법으로 생각하고 다양한 어림 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있다.
3	둘레의 길이가 16cm인 도형 만들기	▶둘레의 길이는 같으나 넓이가 다른 여러 가지 도형을 찾을 수 있다.
4	모자와 우산	▶주어진 문제를 다양한 방법(식, 그림, 표 등)으로 해결할 수 있다.
5	은행강도를 잡아라!	▶주어진 문제 상황을 근거해서 타당한 의사결정을 할 수 있다.

본 연구에 사용된 활동지는 두 부분으로 나뉜다. 첫 번째 부분은 아동 스스로 주어진 문제에 대해서 해결을 시도해 보는 개별 학습 단계로, 이후 소집단 학습에서 구성원간의 합의된 해결 전략을 채택하기 위한 준비과정에 해당한다. 두 번째 부분은 소집단에서 채택한 해결 전략을 사용해서 문제 해결한 결과를 기록하는 부분으로, 이것은 학급 전체 토의에서 발표를 하기 위한 근거가 된다.

<표 2> 문제 중심 프로그램의 진행과정

시 간	교 수 - 학 습 활 동	학습 형태
5 분	문제 제시 및 해결 방법에 대한 브레인스토밍	전체 학습
10 분	개별로 문제 해결	개별 학습
10 분	소집단에서 문제 해결	소집단 학습
15 분	각 소집단의 문제 해결 방법 발표 및 문제 해결 방법에 대한 학급 토론	전체 학습

둘째, 문제 중심 학습을 통해서 아동의 수학 학습에서의 변화를 알아보기 위해 개발된 문제 중심 학습 프로그램을 연구대상 학급에 적용하였다. 수업이 진행되는 동안 연구자는 수업을 관찰하고 수업 진행과정을 비디오와 녹음기를 이용해서 녹화 및 녹음을 하였다. 매 차시 수업은 40분으로 구성되며, 시간 구성은 [표 2]와 같다.

셋째, 녹화 및 녹음된 테이프를 전사(transcript)하고, 전사한 내용을 분석함으로써 아동의 수학 학습에서 나타나는 변화를 알아보았다.

Ⅳ. 결과 분석

본 장에서는 문제 중심 학습 프로그램을 연구 대상 학급에 적용하면서 매차시 나타나는 학생들의 반응을 분석하였다. 문제 중심 학습 프로그램은 5차시로, '신발가게에서 생긴 일', '놀이공원에 온 사람들', '둘레의 길이가 16cm인 도형 만들기', '모자와 우산', '은행 강조를 잡아라'의 소제로 구성되어 있다.

1. 신발가게에서 생긴 일 : 1차시

본 차시는 주어진 문제 상황에서 사건의 발생 순서나 돈의 흐름과 같은 다양한 측면에 근거해서 문제에 접근하고 해결방법을 찾도록 의도되었다. 연구 대상 학급에 처음으로 실시된 본 차시 학습 내용에 대해 학생들은 매우 흥미로워하는 반면에 문제를 해결하는 시도에서는 많은 어려움을 보였다.

한 사람이 신발 가게에 와서 3만원 하는 신발을 사고, 10만원 짜리 위조수표를 내었다. 그런데 신발가게 주인은 이 사실을 알아차리지 못했고, 거스름돈으로 내어줄 돈도 없었다. 그래서 슈퍼마켓으로 달려가서 이 수표를 만원 짜리 지폐 10장으로 바꾸어 와서 손님에게 거스름돈을 주었다.

잠시 후 슈퍼마켓 주인이 경찰과 함께 신발 가게로 와서 바꿔간 수표가 위조수표라는 사실을 알려주었고, 10만원을 돌려달라고 했다. 그래서 신발가게 주인은 슈퍼마켓 주인에게 10만원을 환불해 주었고, 그 위조수표는 경찰이 가지고 가 버렸다.

이 날 신발 가게 주인은 얼마를 손해 보았는가? 어떻게 그런 답을 구했는지 자세히 설명하시오.

<그림 2> 1차시 '신발 가게에서 생긴 일'의 과제

이 과제에서 신발 가게 주인이 손해 본 금액은 손님에게 거스름돈으로 내어준 7만원과 그 손님이 가져간 신발의 가격(3만원) 이다. 개별학습 단계에서 학생들은 7만원, 10만원, 13만원, 17만원, 20만원 다섯 가지 답과 그에 대한 해결 과정을 제시하였다. 다음은 학생들이 제시한 반응의 예이다.

· 10만원이라고 제시한 학생의 반응 예

신발 가게 주인은 어떤 사람에게 10만원 짜리 위조 수표를 받았다. 수퍼마켓 주인에게 10만원을 환불해 주었으므로 자신이 가지고 있던 7만원을 보태 환불하였으므로 신발 값 3만원과 가지고 있던 7만원을 더하면 결국 신발가게 주인은 이날 10만원을 손해본 것이다.

이 경우 신발 가게 주인이 처음에 슈퍼마켓 주인으로부터 받은 10만원을 위조수표를 받은 후 다시 돌려주었다는 사실을 인식하고 있는지는 분명하지 않으나 신발 가격 3만원과 거스름돈으로 내어준 7만원을 고려하여 10만원을 손해보았다고 하였다. 이 답을 제시한 학생은 5명에 불과하다.

· 7만원이라고 제시한 학생의 반응 예

신발 가게 주인이 위조수표를 진짜 돈으로 바꾸었기 때문에 3만원의 이익이 있었지만 10만원을 수퍼마켓 주인에게 환불해 주었으니 7만원의 손해를 보았다.

이 경우 신발 가게 주인이 처음에 슈퍼마켓 주인으로부터 10만원을 받아서 손님에게 7만원을 거슬러 주어 남은 돈 3만원의 이익을 보았으나 다시 수퍼마켓 주인에게 10만원을 환불해 주어서 7만원을 손해보았다고 했다. 그러나 이 반응에서는 신발의 가격이 고려되지 않았다. 이 답을 제시한 학생은 모두 12명으로 가장 높은 비율을 차지한다.

· 13만원이라고 제시한 학생의 반응 예

위조수표를 내고 3만원 짜리 구두를 가져갔으니까 3만원은 그냥 가져간 것과 다름없다. 그

> 내서 3만원을 손해 보았다. 나중에 이 수표가 위조 수표라는 것이 알려져서 수퍼마켓 주인에게 10만원을 주었으니까 3+10=13, 13만원이 된다.

이 경우 학생들은 두 가지 사실을 간과한 셈이다. 첫째, 신발 가게 주인이 처음에 슈퍼마켓 주인으로부터 10만원을 받았다. 둘째, 위조수표를 받고 거스름돈으로 7만원을 내어주었다. 이 답을 제시한 학생은 3명이다.

·17만원이라고 제시한 학생의 반응 예

> 한 사람이 위조수표를 내고 7만원을 받았기 때문에 7만원을 손해보았고, 수퍼마켓에서 바꾼 것이 위조수표이어서 진짜 10만원을 주었기 때문에 모두 17만원을 손해보았다.

이 경우 학생들은 처음에 슈퍼마켓 주인으로부터 10만원을 받았다는 사실과 손님이 가져간 신발의 가격을 고려하지 않은 것으로 보인다. 이 답을 제시한 학생은 9명이다.

·20만원이라고 제시한 학생의 반응 예

> 한 사람이 3만원 하는 신발을 10만원 짜리 수표를 내고 샀지만 위조수표였기 때문에 신발을 산 사람은 신발을 공짜로 가져간 것과 마찬가지이기 때문에 3만원을 손해 보았고, 신발 가게 주인은 아무 것도 모른 채 7만원을 거스름돈으로 주었기 때문에 합해서 10만원을 손해 보았다. 하지만 수퍼마켓 주인에게 위조지폐를 받으면서 다시 10만원을 주었기 때문에 합해서 20만원을 손해보았다.

이 경우 학생들은 신발 가게 주인이 처음에 슈퍼마켓 주인으로부터 10만원을 받았다는 사실을 고려하지 않았다. 이 답을 제시한 학생은 8명이다.

본 차시의 경우 소집단 학습 및 전체 토의에서 학생들의 활발한 참여가 이루어지지 않았다. 몇몇 우수한 아동이 자신의 의견을 제시하고, 다른 아동들은 그 해결방법을 아무런 논의없이 받아들임으로써 토의가 진행되었다. 비록 문제를 해결하는 다른 해결 방법을 발견했다 하더라도 자신의 의견을 포기하고, 우수한 아동이 제시한 의견을 채택하였다.

학생 1 : 10만원 아니냐?
학생 2 : 17만원이야.
학생 1 : 10만원 같은데...
교　사 : 왜 그런지 다른 애들한테 설명해봐.
학생 1 : 못해요.
학생 2 : 어떻게 할까?
아이들 : 17만원 하자.
학생 1 : 10만원 같은데...

다음 예는 교사의 의견에 의존하는 학생들의 경향을 나타낸다. 소집단 학습 단계에서 교사가 옆에 있자 토의를 진행하다 말고 한 학생이 교사에게 문제의 답과 해결 방법을 물었다. 이것은 토의를 통해서 합의된 해결 방법을 얻는 과정임에도 불구하고 교사가 해결 방법을 제시해 줄 것을 기대하는 경향을 보이는 예라 할 수 있다.

학생 1 : 선생님 이 문제의 답이 뭐예요?
교　사 : 너희 모둠(소집단)에서 의논해 봐라.
학생 1 : 그래도 잘 모르겠어요. 그러면 어떻게 해야 돼요?

본 차시의 경우 앞에서 제시한 여러 가지 반응 중에서 소집단 내에서 하나로 합의가 이루어지지 않았으며, 하나의 합의된 해에 도달했다 하더라도 잘못된 해를 구한 소집단이 많았다. 소집단 내에서 정확한 답을 구한 아동이 있었음에도 불구하고 자신의 의견을 소집단의 다른 구성원들에게 이해시키지 못해 그 의견이 채택되지 않은 경우도 있다. 결국 전체 토의를 한 후에도 학생들이 합의된 의견을 얻지 못하자 교사가 문제의 답과 해결 방법을 제시했다. 교사의 설명을 들은 후에야 비로소 학생들은 그 답을 받아들이는 것처럼 보였다.

2. 놀이공원에 온 사람들 : 2차시

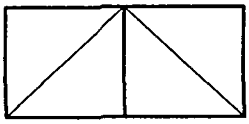
본 차시는 가로 12cm, 세로 6cm인 직사각형 안에 불규칙하게 분포하고 있는 점을 수를 어림하는 과제로, 어림(estimation)을 문제해결의 한 방법으로 생각하고 다양한 어림 전략을 사용하여 문제를 해결하는 것을 목표로 하였다.

> 다음 그림은 지난 어린이날 놀이 공원의 모습을 항공사진으로 찍은 것이다. 그림에서 점은 사람 한 명을 나타낸다고 한다. 이날 놀이 공원에 모인 사람은 약 몇 명인가? 답을 구한 과정을 설명하시오.

<그림 3> 2차시 '놀이공원에 놀러 온 사람들'의 과제

이 학급 학생들의 경우 수학 교실에서 어림하는 상황을 접해보지 못해서 이 과제에 대해 매우 생소해 했으나 개별 학습 단계에서 몇 가지 문제 해결 전략이 나타났다. 다음에서는 전체 토의에 발표되지 않은 두 가지 반응을 제시한다. 대부분의 해결 전략이 항공사진(큰 직사각형)을 크기가 같은 정사각형이나 직사각형으로 나누어 그 중 하나를 표본으로 삼는데 비해 $\boxed{1}$은 크기가 같은 네 개의 삼각형으로 나누고 그 삼각형 중의 하나를 표본으로 삼아 전체 점의 수를 어림했다. 또 $\boxed{2}$는 비록 두 수를 곱셈한 결과가 틀리긴 했지만 가로와 세로 한 줄에 놓인 점의 수를 세고 그 수들을 곱해서 어림값을 구하였다.

1 네모를 똑같은 삼각형 4개로 나누고, 삼각형 1개에 있는 사람의 수가 약 400명이니까 곱하기 4를 하면 약 1600명이 나온다. (그림 참고)



2 가로(가로 한 줄에 놓인 점의 수)가 64이고, 세로(세로 한 줄에 놓인 점의 수)가 32이었다. 이 수를 곱해서 2108명이라고 생각한다.

비록 학생들이 소집단에서 토의를 거쳐 해결 전략을 고안하고 문제를 해결했다고는 하나 어림값을 받아들이는데 능숙하지 않은 것으로 보였다. 다음 발췌에서 한 학생은 계산 결과인 1380을 어림값으로 하였고, 다른 학생은 1380을 다시 반올림해서 1400을 어림값으로 하였다. 교사는 1380을 어림값으로 선택한 학생에게 질문을 하였다 :

교사 : 너는 왜 1380으로 했고, 얘는 왜 1400으로 했지? 1380이 더 좋을 것 같아, 1400이 더 좋을 것 같아?
학생 : 1400.
교사 : 왜? 왜 그렇게 생각하지.
학생 : …

발췌에서 보여지듯 학생은 교사의 질문에 대답을 하지 못했다. 이 학생은 어림값으로 자신이 선택한 1380보다 1400을 선호하였다. 이 학생은 계산 결과가 이미 어림값이라는 것을 인식하지 못하고, 다시 반올림해야 한다고 생각하고 있다.

다음은 전체 토의에서 각 소집단이 발표한 내용을 발췌한 것이다. 학생 4를 제외한 모든 학생들이 처음에 주어진 직사각형을 크기가 같은, 작은 정사각형이나 직사각형으로 나누어 점의 수를 어림하였다.

학생 1 : 저희 모둠은 답이 1512명으로 나왔습니다. 구한 과정은 저희 조는 사람의 수를 더욱 정확하게 알 수 있도록 항공 사진을 36조각으로 나누었습니다. 36조각 중 한 조각 안에 들어있는 사람의 수를 세어 36을 곱하였더니 1512가 나왔습니다.

학생 2 : 약 1800명이 나왔습니다. 왜냐하면, 가로가 12cm, 세로가 6cm입니다. 그러니까 가로와 세로를 가장 큰 수로 나누면 가로는 6개, 세로는 3개로 나누어집니다. 그러니까 합해서 18칸이 나옵니다. 18칸 중 한 칸에 약 100명이 있으므로 100 곱하기 18을 하면 1800이 나옵니다.

학생 3 : 저의 조는 답이 1440명으로 나왔습니다. 구한 과정은 자에 있는 눈금의 한 칸에 5개씩 들어갑니다. 그렇기 때문에 그 칸의 수를 구하여 5를 곱하면 1440명이 됩

니다.

학생 4 : 저희 모둠은 답이 약 1800이 나왔습니다. 구한 과정은 점의 지름이 2mm입니다. 사진의 가로의 길이는 12cm, 즉 120mm입니다. 사진 가로 한 줄에는 점이 약 60개씩 들어갈 수 있습니다. 그리고 세로의 길이는 6cm, 즉 60cm 입니다. 사진 세로 한 줄에는 점이 약 30개씩 들어갈 수 있습니다. 그래서 60×30은 1800, 놀이공원에 모인 사람은 약 1800명입니다.

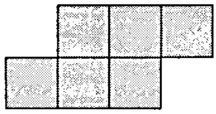
각 소집단의 발표가 있은 후 교사는 표본을 어떻게 정하는 것이 효율적인지에 대해서 학급 토의를 유도하였다. 다음 발췌는 전체 토의 상황이다.

교 사 : 지금 발표한 것 말고, 또 다른 방법 있는 사람? 없습니까? 그러면 어떻게 나누는 것이 가장 효과적일까요?
학생 1 : 작은 모양으로.
교 사 : 작게 나눌수록 더 정확할 것 같다. 또?
학생 2 : 같은 모양으로.
교 사 : 같은 모양, 정사각형으로 나누는 것이 정확할 것 같다. 그러면 얼마나 작게 나누면 좋을까요? 종하는 어떻게 나누는 것이 좋을 것 같아요?
종 하 : mm로.
교 사 : (손으로 작게 표시한다) mm로 요만하게…

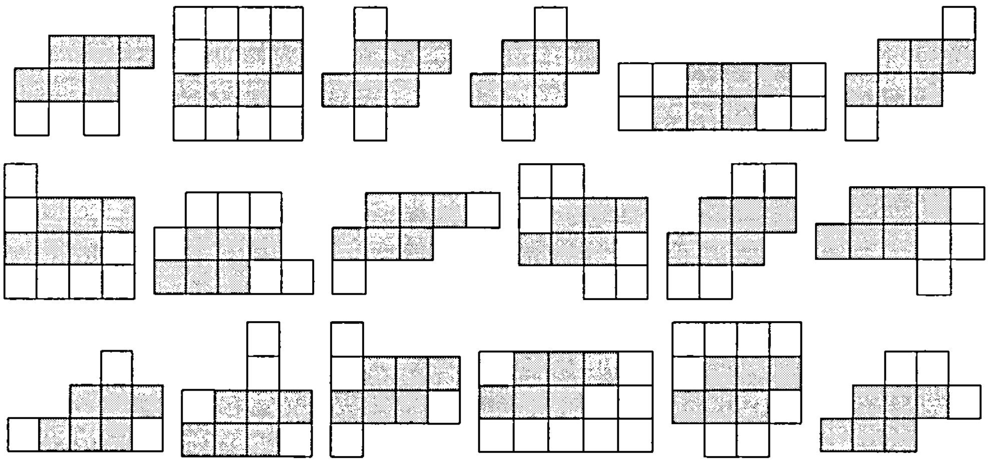
비록 교사가 학생들로부터 모양이 작은 같은 모양으로 나누어야 한다는 사실을 유도해냈다 할지라도 사각형의 크기(즉, 표본의 크기)를 어느 정도로 해야 할지에 대한 토의를 이끌지는 못했다.
본 차시 수업을 마친 후 몇몇 학생이 교사에게 점의 수가 정확하게 몇 개인지를 질문했다. 이것은 그 학생들이 어림값을 문제의 답으로 받아들이지 못하고 있음을 암시한다.

3. 둘레의 길이가 16cm인 도형 만들기 : 3차시

본 차시는 둘레의 길이는 같으나 넓이가 다른 여러 가지 도형을 찾는 것을 목표로 하는 활동이다. 이전 두 차시 수업 결과, 문제를 제대로 이해하지 못해서 문제에 접근하는데 어려움을 보인 학생들이 발견되어서 본 차시부터 수업 전개 과정 중 문제 이해 단계를 첨가시켜 학생들이 문제 이해를 도왔다.
본 차시 과제는 변의 길이가 1cm인 정사각형 모양의 타일 6개가 [그림 Ⅳ-3]과 같이 붙어 있는 도형에 변과 변이 맞닿게 여러 개의 타일을 붙여 둘레의 길이가 16cm인 도형을 만드는 활동이다. 복잡한 계산이나 이전에 학습한 수학 내용을 필요로 하지 않았기 때문에 많은 학생들이 이 과제에 적극적으로 도전했으며, 활발한 소집단 토의가 이루어졌다. [그림 Ⅳ-4]와 같이 학생들이 그린 둘레의 길이가 16cm인 도형은 매우 다양했다.



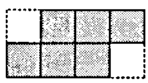
<그림 IV-4> 3차시 '둘레의 길이가 16cm인 도형 만들기'의 과제



<그림 IV-4>

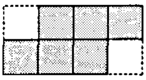
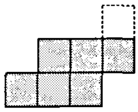
본 차시에서는 둘레의 길이가 16cm인 도형을 만드는 것과 더불어 그 활동을 통해서 발견한 사실들을 기록하게 하였다. 학생들은 다음과 같은 사실들을 발견하였다.

- 정사각형으로 만들면 넓이가 가장 크다.
- 타일을 2개 사용할 때가 가장 적게 사용한 것이고, 1개를 사용하면 16cm를 만들 수 없다.
- 사이에 끼어놓으면 둘레 길이는 변하지 않는다. (그림 참고)



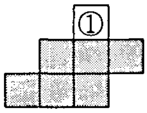
- 타일을 2개 사용해서 둘레의 길이가 16cm 타일 도형을 만들 수 있다.
- 똑같은 타일을 한 개씩 붙였는데도 둘레의 길이가 늘어나는 것도 있었고, 둘레의 길이가 늘어나지 않는 것도 있었다.
- 타일을 여러 개 직사각형으로도 정사각형으로도, 여러 가지 도형으로 만들 수 있다.
- 모양은 달라도 둘레가 똑같게 할 수 있다는 걸 알았다.

잘못된 사실을 발견한 학생도 있었다 :

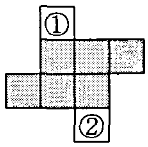
의 경우에는 1cm도 안늘어나지만 의 경우에는 1cm가 지워지고 3cm가 늘어난다는 것을 발견했다.

다음은 위에서 발견된 잘못된 사실에 대해 교사가 학생과 대화를 시도한 것이다. 소집단 토의를 하는 도중 교사가 개입을 하였다. 학생은 소집단 토의에서 주도권을 잡고 있었으며 위의 잘못된 사실을 다른 구성원들과 공유하려고 하였다.

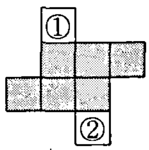
1. 교사 : (①을 가리키며) 여기에 타일을 하나 놓으면 둘레의 길이가 얼마나 늘어날 것 같아?



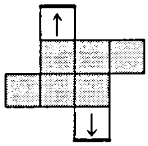
2. 학생 : 3cm
3. 교사 : 왜 3cm이라고 생각해?
4. 학생 : 한 변이 겹쳐지고, 세 개만 밖에 나오니까
5. 교사 : 정말? (①과 ②를 가리키며) 그러면 이렇게 두 개를 놓으면 얼마나 늘어나게 될까?



6. 학생 : 6cm
7. 교사 : 처음 주어진 도형(색칠된 도형)의 둘레의 길이가 얼마였지?
8. 학생 : 12cm
9. 교사 : 그러면 이 도형의 둘레의 길이는 얼마가 되어야 되지?
10. 학생 : 18
11. 교사 : 이 도형의 둘레의 길이를 한 번 구해봐. 얼마가 되는지.



12. 학생 : (둘레의 변의 수를 하나씩 센다) 16.
13. 교사 : 어? 18이 안되네. 왜 그럴까? 한 개를 붙일 때마다 3cm 씩 늘어난다고 했는데.
14. 학생 : 아! 알았다. 이것이 여기로 오고, 이것이 여기로 와요. (그림 참고)



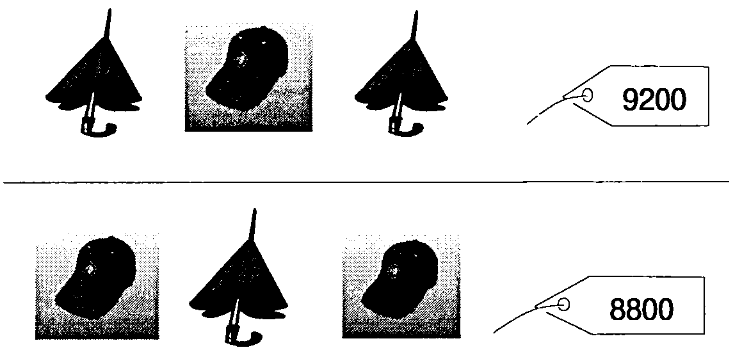
15. 교사 : 그러면 타일을 한 개 붙일 때마다 얼마씩 늘어나?

16. 학생 : 2cm.

5에서 교사가 제시한 도형은 둘레의 길이가 16cm라고 이미 소집단 내에서 합의가 이루어진 도형 중의 하나였다. 교사는 그 도형을 제시함으로써 학생에게 갈등을 유발하고자 했다. 학생은 둘레를 모두 센 값이 16cm임을 알고(12), 그 이유를 14의 그림과 같이 제시하였다.

4. 모자와 우산 : 4차시

본 차시는 주어진 문제를 다양한 방법으로 해결하도록 의도되었다. 전 차시와 마찬가지로 학생들의 문제 이해를 돕기 위해 교사의 질문과 학생의 답으로 이루어지는 문제 이해 단계를 첨가시켰다.



<그림 IV-5> 4차시 '모자와 우산'의 과제

과제는 주어진 상황에서 두 물건(우산과 모자) 가격을 각각 구하는 활동이다. 일반적인 접근 방법은 두 개의 방정식을 세우고 그 연립방정식을 해결함으로써 각각의 가격을 구하는 대수적 방법이다. 그러나 초등학교 5학년 수준에서는 아직 연립 방정식을 풀 수 없으므로 대수적 방법보다는 특정 수를 대입해서 확인하는 시행착오(trial-and-error) 방법이나 주어진 그림을 이용해서 해결하는 방법, 또는 표를 이용하는 방법 등을 사용할 것으로 예상하였다. 수학적 능력이 우수한 학생들은 대수적 접근을 선호하였고, 몇몇 아동은 실제로 대수적 방법을 시도해서 문제를 해결했으며, 다음 대화에서 나타난 것처럼 대수적 방법으로 문제 해결을 시도하였으나 답을 구하지 못한 경우도 있었다. 이 학생의 경우 대수 식은 세웠으나 알고리즘을 제대로 이해하지 못해서 문제를 해결하지 못하는 것으로 보인다.

$$x\text{우} + y\text{모} + x\text{우} = 9200$$
$$y\text{모} + x\text{우} + y\text{모} = 8800$$

$$\begin{array}{r} x\text{우} + y\text{모} + x\text{우} = 9200 \\ \underline{x\text{우} + y\text{모} + y\text{모} = 8800} \\ 400 \end{array}$$

교사 : 여기서 x와 y는 뭐야? 여기서 x는 우산을 나타낸 거야?

학생 : 예.

교사 : 그럼 y는?

학생 : 모자요.

교사 : 그래서 이런 방정식으로 나타낸 거야.

학생 : 예.

교사 : 그런데 밑에 있는 식은 어떻게 된거야? 위에 거랑 같은 거니?

학생 : 예. 같은 건데요. 이거랑 이거를 지워줄려고 우선 x를 맞춰줬어요.

교사 : 음!

학생 : (아래의 연립 방정식에서 뒤의 식과 아래 식의 x와 y를 각각 지운다.) 지워졌고, 지워졌고, 이거 남았어요.(x우 와 y모를 가리킨다.)

교사 : 이게 남았어? 거기서 400원이 뭘 나타내지.

학생 : x와 y의 합!

교사 : 합이야?

학생 : 두 개 하나씩 약분하면...

교사 : 그런데 여기서 이거는 왜 지웠지?

학생 : (말 없음)

교사 : 여기는 지우고, 여기도 지우고, 여기는 합하고…. 그런데 여기는 또 왜 400이 나왔지?

학생 : 빼가지고요.

교사 : 여기는 빼고, 여기는 왜 더했지.

학생 : 이것은 몇 개의 우산과 몇 개의 모자를 더해서 이렇게 나왔어요.

(위에서 나온 400을 250과 150으로 나누었다.)

교사 : 여기서 250원이 뭐지?

학생 : 250원이요? 우산의 값인데요, (250과 150을 가리키면서) 여기서 맞춰서 이거 두 개로...

교사 : 그런데 왜 250원하고, 150원이 되었지?

학생 : 그냥

교사 : 두 개 더해서 400원이 되도록 두 개를 나눈 거야?

학생 : 예

교사 : 그 다음은 어떻게 되었니?
학생 : (250원과 150원을 식에 대입해서) 구했는데요 9200원이 안돼요.

다음은 개별 학습 단계에서 아동이 사용한 문제 해결 전략을 제시한 것이다.

문제 해결 전략 1

처음에는 우산 가격을 3000원으로 했고, 모자 가격을 3200원으로 했다. 그러니까(첫 번째 그림에 대입을 하였더니) 가격이 넘어버렸다. 그래서 (첫 번째 그림에서) 모자의 가격을 400원 내리고, 반으로 나누어 200원씩 우산에게 올려주니까 모자는 2800원이 되었고, 우산은 3200원이 되었다. 그 답으로 문제를 풀었더니 맞았다.

문제 해결 전략 2

우산 3개와 모자 3개의 합은 18000원이므로 우산 1개와 모자 1 개의 값의 합은 전체의 $\frac{1}{3}$이므로 18000원을 3으로 나누면 6000원 나온다. 6000원에서 우산이 400원 비싸므로 400원을 빼면 5600원이다. 거기에서 2로 나누면 모자 하나의 값이 나온다. 그러므로 모자는 2800원, 모자보다 값이 400원 비싼 우산은 3200원이 되는 것이다.

문제 해결 전략 3

9200원과 8800원의 차는 400원이고, 우산이 모자보다 400원 비싸다.

$$\begin{array}{r} 8800 \\ -\ \ 400 \\ \hline 8400 \end{array}$$

$(8800-400)\div 3=2800$ … 모자의 값

$(8800-400)\div 3+400=3200$ … 우산의 값

문제 해결 전략 4

우산 두 개와 모자 한 개의 값이 모자 두 개와 우산 한 개의 값보다 400원이 비싸다. 그러므로 모자 하나와 우산 하나의 값 차이는 400원 이다. 이런 조건을 알았으므로 400원이 차이나는 두 수를 구하였다. 표를 그려서 차이가 400원 나면서 위의 그림 조건에도 맞은 두 개의 답을 구하였다.

문제 해결 전략 5

우산을 x이라 하고, 모자를 y라 놓으면

$$2x+1y=9200$$
$$1x+2y=8800$$

$$\begin{array}{rr} & 4x+2y=18400 \\ -) & 1x+2y=\ \ 8800 \\ \hline & 3x=9600 \end{array}$$

9600을 3으로 나누면 3200이 나오는데, 이것이 우산 하나의 값이고 우산 2개의 값 6400을 9200에서 빼면 모자 하나의 값이 나온다. 그래서 모자는 2800원이 된다.

아동이 사용한 문제 해결 전략은 매우 다양했으며, 다양한 해결 전략만큼 소집단에서도 활발한 토의가 이루어졌다. 다음은 한 소집단에서 발생한 시행 착오 방법과 대수적 방법에 대한 토의 상황을 발췌한 것이다.

1. *교 사 : 왜 찍으면 안 돼지?*
2. *학생 1 : 찍으면 만약에 다음에 우산 값이 더 비싸거나 가격이 달라지면 못하잖아요.*
3. *교 사 : 그래서 너는 어떻게 해야 할 것 같애?*
4. *학생 1 : 저요? 이거(9200원)와 이거(8800원)를 더한 값이 모자 3개와 우산 3개를 더한 값이잖아요. 그래서 계산을 하는데 답이 안나와요.*
5. *교 사 : 너는 뭔가 계산식으로 하려고 하는데, 그지? 아까 저기서(같은 소집단의 여학생과의 대화에서) 하면 안된다고 했는데, 왜 그 방법이 나쁘다고 했지?*
6. *학생 1 : 다음에 비슷한 문제가 나왔는데, 값이 달라지면 찍어서는 안되잖아요. 어느 세월에 다해요?*
7. *교 사 : 그러면 계산식으로 하면 빨리 할 수 있니?*
8. *학생 1 : 빠르지요.*
9. *교 사 : 샘(학생 2)이 한 방법은 찍어서 한 거야, 계산해서 한 거야?*
10. *학생 1 : 찍어서요.*

11. *교 사 : 지수(학생 1)는 아까 찍어서 계산하는 방법이 나쁘다고 했어. 그지. 네 생각은 어때?*
12. *학생 2 : 똑같아요.*
13. *교 사 : 같은 방법이라고 생각해?*
14. *학생 2 : 이거요? 찍은 거는 아닌데.*
15. *교 사 : 찍은 방법이 아니야?*
16. *학생 2 : 절대 아니에요. 그럼 식도 못쓰죠.*

학생 1은 이전의 소집단 토의에서 주도권을 잡고 있었으며, 다른 구성원들은 대부분의 경우 학생 1이 제시하는 방법을 그대로 수용하였다. 이 학생은 본 차시 과제를 방정식을 세워 해결하고자 시도하고 있으나 방정식을 제대로 세우지 못했을 뿐더러 그 방정식을 풀지도 못했다. 그와 반대로 이 소집단의 다른 여학생은 시행착오(trial-and -error) 방법을 사용해서 문제의 답을 구했고, 학생 2의 경우도 위의 문제 해결 전략 3을 사용해서 답을 구했다. 학생 1은 방정식을 세워서 풀지 않은 두 학생의 방법을 찍기(즉, 시행착오 방법)이라고 간주하고 받아들이려 하지 않았다. 학생 2의 경우 방정식을 세워 풀지는 않았지만 대수적 방법임에는 틀림없다. 학생 2는 계산식을 써서 문제를 풀었기 때문

에 자신의 방법이 시행착오 방법이 아니라고 주장하고 있다.

각 소집단의 문제 해결 전략의 발표가 끝나고 교사는 시행착오 방법과 대수적 방법 에 대한 토의를 유도하였다. 대수적 방법을 선호하는 학생과 시행착오 방법을 선호하는 학생이 거의 비슷한 비율로 나타났다.

5. 은행강도를 잡아라! : 5차시

본 차시는 주어진 문제 상황에 근거해서 타당한 의사결정을 내리는데 목표를 둔 활동이다. 이 활동은 이전의 다른 활동에 비해 많은 시간이 소요되므로 학생들이 각 소집단에서 문제를 해결하는 시간을 최대로 하였으며 학급 토론의 경우 각 조에서 작성한 방송 기사를 발표하는 것으로 제한하였다.

> 어느 은행에 오늘 아침 강도가 들었다. 강도는 한 명으로, 가방 하나에 돈을 넣어 달아났다고 한다. 이 은행에서는 강도가 훔쳐간 돈은 모두 만원 짜리 지폐로, 약 100억 원이라고 보고하였다. 그러나 방송국에서는 은행 강도가 훔쳐간 이 돈이 혼자서 운반하기에는 너무 큰 액수라고 의심을 하였지만, 그 의심을 증명할 증거가 없었다. 그래서 방송국에서는 지금 은행의 보고가 잘못되었다는 것을 증명할 수 있는 방송 기사를 보내는 사람을 찾고 있다.
>
> 은행의 보고가 사실인지를 조사해 보고, 이 사건에 대해 발견한 점을 방송국에 보낼 방송기사로 작성하시오.

<그림 6> 5차시 '은행 강도를 잡아라!'의 과제

본 차시 과제는 한 사람이 가방 하나로 만원 짜리 지폐 100억 원을 운반할 수 있는지를 결정하는 활동으로, 학생들은 신문지나 잡지로 만원 짜리 지폐와 같은 크기의 모형 지폐를 만들어서 문제를 해결할 수 있었다. 그러나 제시된 문제를 혼자서 해결해보는 개별 학습 단계에서 학생들은 문제에 접근하는 아이디어를 쉽게 만들어내지 못했다. 활동지에서 이 단계의 반응을 보면 문제 상황에 대해 적절한 증거를 제시하지 못한 것이 대부분이었다. 다음은 몇몇 학생들의 초기 반응을 기술한 것이다 :

- 여러 개의 지갑을 가져와서 지갑에도 돈을 넣을 수 있고, 주머니, 신발, 모자 옷에도 넣을 수 있을 것이다. 그러기 때문에 증명할 수 없다(한 사람이 이 돈을 운반할 수 있다).
- 커대한 큰 가방에 100만 원씩 기계로 모아 돌돌 말아 가방에 넣어 가지고 갔을 것이다.
- 백억 원을 누르면 가방에 충분히 들어가고, 무겁지도 않다.

이 학생들은 모두 한 사람이 그 돈을 움직일 수 있다고 했다. 학생들은 100억 원이라는 큰 수에 대한 수 감각(number sense)이 부족한 것으로 보인다. 100억 원은 만원 짜리 지폐로 100만 장이다. 학생들은 지폐 백만 장의 부피가 어느 정도 되는지, 그리고 무게가 얼마나 되는지를 고려하지 못했다.

개별 학습에서 이런 반응을 보인 학생들은 소집단 학습에서 자연스럽게 대화에 참여했다. 이때는

한 사람이 그 돈을 운반할 수 없다는 합의에 도달했고, 그것을 밝힐 증거를 찾는데 초점을 두었다. 각 소집단에서는 신문지나 잡지를 이용해서 모형 지폐를 만들기 시작했다. 다음 대화는 한 소집단이 문제 해결 전략을 교사에게 설명하는 상황이다.

교사 : 그래서(모형 지폐를 만들어서) 어떻게 할거니?
지수 : 300장을 만들어서요, 100만에서 나누어서 부피를 구할 거예요.

여전히 문제에 접근하는 방법을 찾지 못한 채 모형 지폐만 만드는 소집단도 있었으며, 교사는 그런 소집단 구성원들과 대화를 하면서 도움을 주었다. 다음은 한 소집단에서 작성한 방송 기사이다.

오늘 아침 어느 은행에 강도가 들었습니다. 그 은행에서는 약 100억 원이라는 돈을 모두 만원 짜리로 가방 하나에 넣어 달아났다고 합니다. 하지만 돈을 장지로 생각하고, 100장을 세어보니 길이(두께)를 재어보이 약 5mm가 나왔습니다. 그런데 그 돈(100억 원)이 (만원 짜리 지폐) 100만장이므로 그 100만장은 약 5km인 것 같습니다.
보통 사람의 키가 1m 70cm 정도 되므로 길이가 그렇게 긴 것을 한 가방에 모두 넣어 운반할 수 없을 거라고 생각합니다.

이 소집단의 경우 지폐를 한 줄로 쌓았다고 가정하고 길이를 사용해서 증거를 제시하였다. 비록 돈의 부피나 무게가 고려되지 않았다 할지라도 이 소집단의 해결 전략은 매우 정교하며, 기준척도(benchmark)로 보통 사람의 키를 사용하였다는 점도 주목할 만 하다.

V. 결 론

최근 수학 교육에서 일어나고 있는 많은 개혁 움직임에서 구성주의 학습관을 지지하는 학습 전략으로 나타난 것이 문제 중심 학습(Problem-Centered Learning) 이다. 문제 중심 학습에서 학습자는 주어진 문제 상황에 대해 소집단의 다른 구성원들과 토의를 통해서 해결 방법에 합의하고, 그것을 학급 토의 과정을 통해 학급의 다른 구성원들과 해결 방법을 공유하게 된다.

본 연구에서는 설명식 수업으로 일관되던 수학 교실에서 문제 중심 학습을 도입함으로써 학생들에게서 나타나는 수학 학습 상의 변화 과정을 분석하는데 초점을 두었다. 본 연구에서 발견한 점을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 문제 중심 학습에서는 학생들이 활동적으로 참여한다. 교사의 설명이 중심이 되었던 교과서 중심 수업과 비교했을 때 문제 중심 수업에서는 학생들의 활동이 많아졌다. 우수한 몇몇 학생들만이 자신의 해결 방법을 발표하는데서 점점 많은 학생들이 자신의 해결 방법을 소집단에서 발표를 했고, 활발한 소집단 토의가 이루어졌다.

둘째, 문제 중심 학습에서는 학생들의 문제 해결 전략이 다양하게 나타났다. 교사가 제시해 주는 문제 해결 전략을 암기해서 유사한 문제 상황에 응용하는 수준을 벗어나 문제 중심 학습에서는 학생

들이 저마다 자신의 수준에 맞는 문제 해결 전략을 고안하였고, 소집단 학습이나 학급 토의를 통해 다른 사람의 해결 전략을 배울 수 있는 기회를 가졌다.

셋째, 문제 중심 학습에서는 학생들이 흥미를 가지고 학습에 참여를 했다. 문제 중심 학습에서는 학생들에게 도전적이고 흥미로운 과제를 제시함으로써 학생들이 문제를 해결할 의욕을 느끼게 했고, 적극적으로 참여하게 하였다. 또한 본 연구가 진행되는 동안 연구 대상 학급에서 수업이 시작되기 전 몇몇 학생들은 "오늘은 뭘 해요?"라고 물으며 학습할 내용에 대해서 관심을 보였다.

넷째, 문제 중심 학습에서 교사는 수업 활동 중에 학생들을 평가할 수 있다. 소집단 학습이나 전체 토의가 진행되는 동안 교사는 학생들을 관찰하면서 어떤 부분에 어려움이 있는지를 알 수 있고, 학생과 대화를 통해서 그런 어려움을 해소할 수 있다. 그러나 이것이 학생들이 소집단인 학급 토의에서 발표한 내용에 대해서 '맞다', '틀렸다' 식으로 평가를 하는 것은 아님을 숙지해야 한다.

설명식 수업이 가지고 있는 문제점을 해결할 수 있는 하나의 대안적인 접근으로 제시되고 있는 문제 중심 학습이 수학 교실에서 널리 사용되기 위해서는 여전히 많은 노력이 요구된다. 수학 교수·학습에 대한 교사의 인식 변화가 필수적이다. 교사는 학생들이 활동할 수 있는 기회를 충분히 주어서 동료들과의 의사소통을 통해서 수학적 의미를 구성하고 그것을 공유할 수 있도록 해야 한다. 또한 지속적인 과제 개발이 필요하다. 문제 중심 학습이 진행되기 위해서는 아동들에게 도전적이고 흥미로운 과제가 계속해서 개발되어야 한다.

참 고 문 헌

고윤희 (1996). 문제중심 구성주의 수업과 전통적 수업이 학업 성취에 미치는 효과, 한국교원대학교 교육과정 석사학위 논문.

김연식·박영배 (1994). 급진적 구성주의의 수학교육학적 의미, 대한수학교육학회 논문집 **4(1)**. pp.27-40

박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 서울대학교 수학교육과 박사학위 논문.

백선수 (1999). 문제 중심 수업과 설명식 수업의 효과 분석, 한국교원대학교 수학교육과 석사학위 논문.

전평국·이재학·백석윤·박성선·김상미 (2001). 열린 교육에서 소집단 협력학습과 창의성 계발, 청람수학교육 **9**, pp.603-632.

Bulgar, S. A & Tarlow, L. D (1999). Homogeneous groups develop thoughtful mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School* **4(7)**, pp.478-483.

Cobb, P.; Wood, T. & Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In von Glasersfeld (ED.), *Radical Constructivism in mathematics Education*. Dordrecht : Kluwer. pp.157-176.

Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E.; Nicholls, J.; Wheatley, G.; Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991). Assessment of problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education* **22(1)**, pp.3-29

Ernest, P. (1996). Varieties of constructivism : A framework for comparison. In Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P. Goldin, G., & Greer, B. (EDs.), *Theories of Mathematical Learning.* New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc. pp.335-350

Nicholls, J.; Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E. & Patashnick, M. (1990). Assessing students' theories of success in mathematics : Individuals and classroom differences. *Journal for Research in Mathematics Education* **21(2)**, pp.109-122

Ridlon, C. (2000). Christi makes sense of six-grade mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School* **5(6)**, pp.367-373.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* Reston, Va. : NCTM. pp.31-42.

Stern, F. (2000). Choosing problems with entry points for all students. *Mathematics Teaching in the Middle School* **6(1)**, pp.8-11.

Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education* **75(1)**, pp.9-21.

Wood, T. & Sellers, P. (1997). Deeping the analysis : Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education,* **28(2)**, pp.163-186.