韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 14집, 2002. 8. 297-326.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 14, Aug. 2002. 297-326.

다양한 보조선을 이용한 문제 풀이[1)]

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)
이 경 언 (한국교원대학교 대학원)

중학교 수학교과서에는 보조선을 이용하여 해결하는 문제가 많이 제시되고 있다. 그러나 학생들에게는 앞서 배운 성질을 직접적으로 적용한 보조선만이 제시되고 있어서 스스로 보조선을 생각해보거나 이를 통해 추론해보는 경험을 하지 못하고 있다. 그러므로, 본 연구에서는 교과서에서 제시되는 보조선 이외에 다양한 보조선을 이용한 풀이를 제시하고자 한다.

1. 서 론

수학 문제 해결을 위해 고심하는 학생들을 보면, 주어진 문제 상황과 조건을 이용하여 탐구하고 논리적으로 생각하기보다는 이전의 학습에서 얻은 풀이법을 생각하기 위해 애쓰는 모습을 쉽게 볼 수 있다. 이러한 현상은 특히 보조선과 관련된 도형 단원의 문제에서 쉽게 발견할 수 있다. 학생들은 교과서에서 제시한 정형적인 보조선만을 생각하고 이를 기억하려고 애쓴다. 이러한 노력이 실패할 때 학생들은 문제를 해결할 수 없게 된다. 결국 스스로 문제를 파악하고 문제해결을 위한 아이디어를 고려해보는 과정을 경험하지 못하게 되는 것이다.

보조선과 관련하여 Polya는 "How to solve it"에서 풀이를 진전시키리라는 희망을 갖고 도입하는 요소를「보조 요소」라고 하고, 여러 가지 종류의 보조 요소 중에서 기하 문제를 풀 때에는 그림에「보조선」이라는 새로운 직선을 도입할 수 있다고 말하고 있다(우정호 역, 어떻게 문제를 풀 것인가, 재인용).

또한 Polya는 보조 요소를 도입하는 이유를 크게 두 가지로 제시하고 있다. 첫째, 알고 있는 결과를 이용하기 위해 보조 요소를 도입한다. 둘째, 정의로 되돌아감으로써 보조 요소를 도입할 기회를 얻는다. 그러나 알고 있는 결과를 이용하려고 하며 정의로 되돌아가 보는 것은, 보조 요소를 도입하기 위한 최상의 이유이지만 그것이 유일한 것은 아님을 지적하고 있다. 분명한 것은 보조 요소를 도입하는 어떤 분명한 이유가 있어야 하며, 보조 요소를 제멋대로 도입해서는 안 된다고 강조하고 있다. 그러나, 보조 요소를 첨가하여 문제를 해결하는 것이 "번적이는 생각"이라는 느낌도 들 것이며, 만약 교묘한 보조선이 아무런 동기 없이 그림에 돌연 나타나서 문제를 놀랍게 해결한다면 학생들은 실망하게 되며 그들은 속임수를 당했다고 느낄 것이다. 보조선과 관련하여 적절한 논평을 하던가, 주

1) "이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음"(KRF-2001-030-D0020)

의 깊게 선택된 발문과 권고에 의하여든, 보조선을 긋고 문제를 해결하는 것을 이해할 수 있게 해야 한다. 이러한 과정은 많은 시간과 노력이 필요하지만 그만한 가치가 있다고 밝히고 있다.

중학교 수학 교과서를 보면 보조선을 그려서 해결하는 문제가 매우 많이 제시되고 있으나, 보조선을 그리는 것에 대한 이유 설명 없이 보조선을 도입하고 있으며, 바로 앞서 배운 성질을 기계적으로 이용하여 그리는 정형화된 하나의 보조선만을 제시하고 있다. 이러한 풀이는 학생들에게 다양한 탐구의 기회를 제공하지 못하고 있다. 즉, Polya의 지적처럼 수학은 우리의 추론력과 창조력을 사용하고 있는 한에서만 흥미로운 것이다. 그러므로 다양한 보조선을 그려보고 이를 통해 문제를 파악하고 추론하는 다양한 예를 제시해 줄 필요가 있다.

그러나 지금까지 도형문제의 보조선과 관련된 연구는 극히 미비한 실정이다. 임재훈과 박경미(2000)는 "보조선이 나온 이유나 맥락을 가르치자"라는 논문에서 보조선에 대하여 다음과 같은 두 가지 일반적 논의점을 제시하고 있다.

1. 유클리드 기하에서 비형식적 활동과 수학적 증명 사이에는 연결성이 있다.
2. 공리와 같은 기본적인 사실을 이용할 수 있는 형태가 생기도록 긋는다.

위 논문에서는 첫 번째 논의점에 대하여 비형식적 활동 경험이 나중의 형식적 증명에서 유용하게 사용될 아이디어와 수학적 표현의 발견에 도움을 준다는 것을 강조하고 그러한 비형식적 활동의 수학적 표현을 찾는데 집중하고 있다. 두 번째 논의점에 대하여는 중학교 논증기하에서 정리를 증명할 때, 주로 사용되는 것으로 삼각형의 성질, 평행선의 성질을 제시하고 보조선을 긋는 일반적인 원칙 중 하나로 삼각형이나 평행선이 만들어지도록 긋는다고 말하고 있다. 그러나 이 논문에서도 다양한 예의 제시가 부족하며, 특히 제시된 보조선도 교과서에서 제시되는 정형화된 보조선만을 다루고 있다.

학생들 스스로 보조선을 그리고 주어진 조건들을 이용하여 문제를 탐구하고 해결하는 경험을 제공하기 위해서는 같은 문제에 대하여 다양한 보조선을 그려서 추론하고 증명하며, 문제를 해결하는 경험을 제공하여야 한다.

이를 위하여 본 연구자는 중학교 1학년 도형단원에서 제시되는 세 가지 문제에 대하여 다양한 보조선을 이용한 풀이방법을 정리해보고자 한다.

2. 다양한 보조선

예제 1. 다음 그림에서 $l//m$일 때, $\angle APB$의 크기를 구하여라.

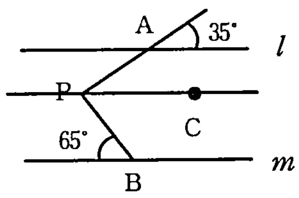
풀이)

점 P를 지나 직선 l에 평행한 직선 n을 그으면 $l//n$, $m//n$ 이므로

$\angle APC = \angle QAP = 35^\circ$ (동위각)

$\angle CPB = \angle PBR = 65^\circ$ (엇각)

따라서, $\angle APB = \angle APC + \angle CPB = 35^\circ + 65^\circ = 100^\circ$

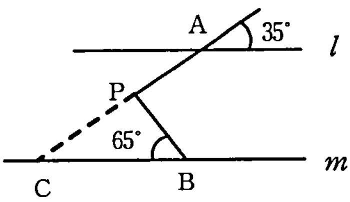


<그림 1>

이 문제는 중학교 1학년 평행선의 성질을 학습한 후 나오는 전형적인 예제문제이다. 교과서에서 제시되는 보조선은 점 P를 지나고 직선 l (또는 m)과 평행인 직선이다. 이는 앞서 배운 평행선의 성질을 적용하기 위해서 그리는 것이다.

그러나 학생들이 도형의 여러 가지 성질들을 학습한 후에는 보다 많은 보조선을 작도할 수 있지만 이에 대한 언급은 없다. 가능한 보조선들을 생각해보자.

보조선1-1. $\overline{AP}$의 연장선



<그림 2>

풀이1)

$\overline{AP}$의 연장선을 긋고, 직선 m과 만나는 점을 C라 하자. 그러면 $l // m$ 이므로

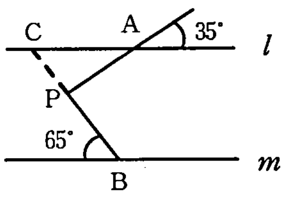
$\angle PCB = 35^{\circ}$

$\angle PBC = 65^{\circ}$

$\triangle PBC$에서 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같고, $\triangle PBC$에서 $\angle APB$는 한 외각이므로,

$\angle APB = \angle PCB + \angle PBC = 35^{\circ} + 65^{\circ} = 100^{\circ}$

보조선1-1의 풀이1은 평행선의 성질과 삼각형의 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하여 각을 구하였다.



<그림 3>

풀이2)

$\overline{AP}$의 연장선을 긋고, 직선 m과 만나는 점을 C라 하자. 그러면 $l // m$ 이므로, $\angle PCB = 35^{\circ}$ (동위각), $\angle PBC = 65^{\circ}$

삼각형의 세 내각의 합은 180° 이므로,

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^{\circ}$

그러므로, $\angle BPC = 180^{\circ} - (\angle PBC + \angle PCB)$

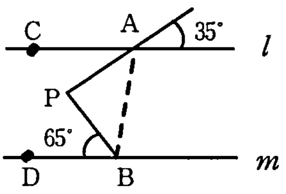
$= 180^{\circ} - (65^{\circ} + 35^{\circ}) = 80^{\circ}$

그런데, $\angle APB = 180^{\circ} - \angle BPC = 180^{\circ} - 80^{\circ} = 100^{\circ}$

보조선1-1의 풀이2는 삼각형의 내각의 합은 180° 이다라는 성질과 평각은 180° 라는 성질을 이용한 풀이이다.

보조선1-1은 그림3과 같이 $\overline{BP}$를 연장하여 직선 l과 만나게 그릴수도 있다. 이 경우에는 맞꼭지각의 크기는 같다는 성질도 이용한다.

보조선1-2. 점 A와 점 B를 연결하는 보조선



<그림 4>

풀이)

점 A와 점 B를 연결하자.

그러면 직선 l과 직선 m은 평행이므로

$\angle CAB + \angle DBA = 180^\circ$ (동측내각의 합)

그런데, $\angle CAB = \angle CAP + \angle PAB$ 이고,

$\angle DBA = \angle DBP + \angle PBA$ 이므로,

$\angle CAB + \angle DBA = (\angle CAP + \angle PAB) + (\angle DBP + \angle PBA)$

$= 180^\circ$

또한, $\angle CAP = 35^\circ$, $\angle DBP = 65^\circ$ 이므로,

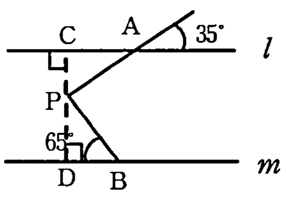
$\angle PAB + \angle PBA = 180^\circ - 35^\circ - 65^\circ = 80^\circ$

$\triangle PAB$에서 $\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180^\circ$ 이므로,

그러므로, $\angle APB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

보조선1-2는 점 A와 점 B를 연결하는 보조선을 그은 것이다. 여기서는 평행선에서 동측내각의 합이 180° 라는 성질과 맞꼭지각의 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이용하여 구하고자 하는 각의 크기를 구하였다.

보조선1-3. 점 P를 지나며 두 직선 l과 m에 수직인 보조선



<그림 5>

풀이)

점 P를 지나며 두 직선 l과 m에 수직인 직선 CD를 그리자.

그러면 $\triangle APC$에서 $\angle PAC = 35^\circ$, $\angle ACP = 90^\circ$

그러므로, $\angle APC = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ = 55^\circ$

마찬가지로 $\triangle BPD$에서 $\angle BPD = 180^\circ - 65^\circ - 90^\circ = 25^\circ$

$\angle APB + \angle APC + \angle BPD = 180^\circ$ 이므로

$\angle APB = 180^\circ - 55^\circ - 25^\circ = 100^\circ$

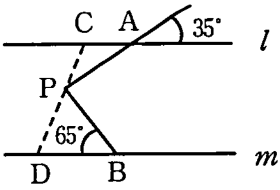
보조선1-3은 점 P를 지나고 두 직선 l 과 m에 수직인 보조선을 그은 것이다.

이 경우에는 삼각형의 내각의 합과 맞꼭지각의 성질을 이용하여 구하고자 하는 각의 크기를 구할

수 있다.

보조선 1-3에서는 점 P를 지나며 두 직선 l과 m에 수직인 직선을 그렸다. 이제 점 P를 지나며 l과 m만나는 직선(일반적으로 수직이 아님)을 그려보자.

보조선1-4. 점 P를 지나며 두 직선 l, m과 만나는 보조선



<그림 6>

풀이)

점 P를 지나며 두 직선 l, m과 만나는 직선 CD를 그리자.

그러면 $\angle ACP + \angle BDP = 180°$ (동측내각의 합)

또한 $\triangle APC$에서 $\angle CAP = 35°$ 이므로,

$\angle APC = 180° - 35° - \angle ACP = 145° - \angle ACP$

마찬가지로 $\triangle BPD$에서 $\angle PBD = 65°$ 이므로,

$\angle BPD = 180° - 65° - \angle BDP = 115° - \angle BDP$

그러므로 $\angle APB = 180° - (\angle APC + \angle BPD)$

$= 180° - (145° - \angle ACP + 115° - \angle BDP)$

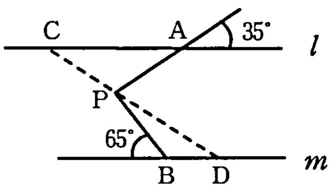
$= 180° - 260° + \angle ACP + \angle BDP$

$= 180° - 260° + 180° = 100°$

보조선1-4에서는 평행선에서 동측내각의 합이 180° 라는 사실, 맞꼭지각의 성질과 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 사실을 적용하여 구하고자 하는 각의 크기를 구했다.

그러면 이번에는 점 P를 지나며 두 직선 l, m과 만나며, $\angle APB$를 두 부분으로 나누는 보조선을 그려보자.

보조선1-5. 점 P를 지나며, $\angle APB$를 두 부분으로 나누는 보조선



<그림 7>

풀이)

그림7과 같이 점 P를 지나며 두 직선 l, m과 만나는 직선 CD를 그리자.

그러면, $\angle APB = \angle APD + \angle BPD$이다.

$\triangle APC$에서 $\angle APD = \angle ACP + \angle CAP = \angle ACP + 35°$

$\triangle BPD$에서 $65° = \angle BPD + \angle PDB$ 이므로

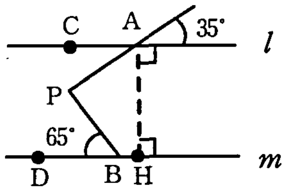
$\angle BPD = 65° - \angle PDB$

그러므로, $\angle APB = \angle APD + \angle BPD = \angle ACP + 35° + 65° - \angle PDB$

그런데, $\angle ACP = \angle PDB$ (엇각)이므로, $\angle APB = 100^\circ$

보조선1-5에서는 맞꼭지각의 성질, 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질과 평행선에서의 엇각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

보조선1-6. 점 A에서 직선 m에 수직으로 그린 보조선



<그림 8>

풀이)

점 A에서 직선 m에 수선을 긋고 수선의 발을 H라 하자. 그러면, $\overline{AH}$는 또한 직선 l에 수직이 된다.

또한 $\angle PAC + \angle PAH + 90^\circ = 180^\circ$ 이고, $\angle PAC = 35^\circ$ 이므로 $\angle PAH = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ 이다.

또한 $\angle PBH = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ 이다.

$\square APBH$에서 내각의 합은 360° 이므로,

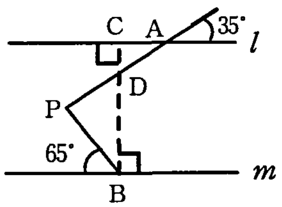
$\angle APB + \angle PAH + \angle AHB + \angle PBH = 360^\circ$

그러므로, $\angle APB = 360^\circ - 55^\circ - 90^\circ - 115^\circ = 100^\circ$

보조선1-6에서는 맞꼭지각의 성질, 평행사변형과 수선의 관계, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 사실을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

보조선1-6과 마찬가지로, 이번에는 점 B에서 직선 l에 수선을 그려서 각을 구해보자.

보조선1-7. 점 B에서 직선 l에 수직으로 그린 보조선



<그림 9>

풀이)

점 B에서 직선 l에 수선을 긋자. 그러면, $\overline{BC}$는 또한 직선 m에 수직이 된다. $\overline{BC}$와 $\overline{AP}$의 교점을 D라 하자.

그러면 $\triangle ACD$에서, $\angle CAD = 35^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ 이므로 $\angle ADC = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ = 55^\circ$ 이다.

마찬가지로, $\angle PBD = 180^\circ - 65^\circ - 90^\circ = 25^\circ$ 이다.

또한 $\angle ADC = \angle PDB$ (맞꼭지각), $\angle APB = \angle DPB$ 이므로,

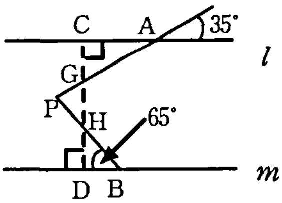
$\triangle PBD$에서, $\angle DPB + \angle PDB + \angle PBD = 180^\circ$

그러므로, $\angle APB = 180^\circ - \angle PDB + \angle PBD = 180^\circ - 55^\circ - 25^\circ = 100^\circ$

보조선1-7에서는 삼각형의 세 내각의 합은 180° 라는 성질, 맞꼭지각의 성질을 이용하여 각을 구하였다.

보조선1-6과 보조선1-7에서는 점 A나 B에서 직선 m, l에 수직인 보조선을 그렸다. 그렇다면 보조선이 $\overline{AP}$와 $\overline{PB}$를 동시에 지나는 경우와 지나지 않는 경우는 어떻겠는가?

보조선1-8. $\overline{AP}$와 $\overline{PB}$를 동시에 지나면서, 직선 l, m에 수직인 보조선



<그림 10>

풀이)

$\overline{AP}$와 $\overline{PB}$를 동시에 지나면서, 직선 l, m에 수직인 $\overline{CD}$를 그린다.

$\triangle ACG$에서, $\angle AGC + \angle ACG + \angle CAG = 180^\circ$ 이고,

$\angle CAG = 35^\circ$ 이므로, $\angle AGC = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ 이다.

그러므로, $\angle PGH = \angle AGC = 55^\circ$ (맞꼭지각)

마찬가지로 $\triangle BDH$에서, $\angle BHD + \angle BDH + \angle DBH = 180^\circ$ 이므로, $\angle BHD = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ 이다.

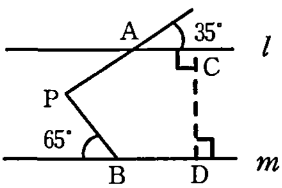
그러므로, $\angle PHG = \angle BHD = 25^\circ$ (맞꼭지각)

$\triangle PGH$에서, $\angle GPH = \angle APB$ 이고, $\angle GPH + \angle PGH + \angle PHG = 180^\circ$ 이므로,

$\angle APB = 180^\circ - 55^\circ - 25^\circ = 100^\circ$ 이다.

보조선1-8에서는 맞꼭지각의 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질과 맞꼭지각의 성질을 이용하여 각을 구하였다.

보조선1-9. 두 직선 l과 m에 수직인 보조선(1)



<그림 11>

풀이)

그림11과 같이 보조선 CD를 긋자.

$\angle PAC = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$, $\angle PBD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

또한 오각형의 내각의 합은 540° 이므로,

$\angle APB + \angle PAC + \angle PBD + \angle ACD + \angle BDC = 540^\circ$

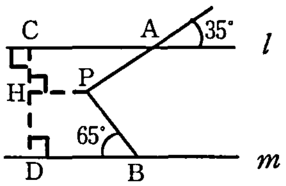
그러므로 $\angle APB = 540^\circ - 145^\circ - 115^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 100^\circ$

보조선1-9에서는 보각의 성질, 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 이용하여 각을 구하였다.

보조선1-10. 두 직선 l 과 m에 수직인 보조선(2)

풀이)

그림12와 같이 보조선 CD를 긋고, 다시 점 P에서 $\overline{CD}$에 수선을 내려 수선의 발을 H라 하자.



<그림 12>

그러면 □$ACHP$에서, $\angle PAC = 35°$ 이고,

$\angle APH + \angle PAC + \angle ACH + \angle PHC = 360°$ 이므로,

$\angle APH = 360° - 35° - 90° - 90° = 145°$

마찬가지로 □$BDHP$에서,

$\angle BPH + \angle PBD + \angle BDH + \angle PHD = 360°$ 이므로,

$\angle BPH = 360° - 65° - 90° - 90° = 115°$ 이다.

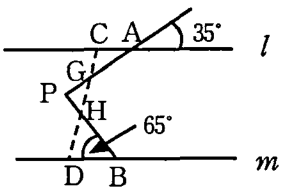
$\angle APB + \angle APH + \angle BPH = 360°$ 이므로,

$$\angle APB = 360° - 145° - 115° = 100°$$

보조선1-10에서는 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질, 맞꼭지각의 성질을 이용하여 각을 구하였다.

보조선1-8에서는 평행인 두 직선 l, m과 수직이 되도록 $\overline{CD}$를 그렸다. 보조선 $\overline{CD}$가 두 직선 l, m과 수직이 아닌 경우를 생각해보자. 보조선4와도 비교하여보자.

보조선1-11. $\overline{AP}$와 $\overline{PB}$를 동시에 지나는 보조선



<그림 13>

풀이)

그림과 같이 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$와 만나도록 보조선 CD를 긋고, 각각의 교점을 G, H라 하자.

그러면, $\angle ACG + \angle BDH = 180°$ (동측내각의 합)

또한 $\triangle ACG$에서, $\angle CAG = 35°$ 이므로

$\angle AGC = 180° - 35° - \angle ACG = 145° - \angle ACG$이다.

마찬가지로 $\triangle BHD$에서,

$\angle BHD = 180° - 65° - \angle BDH = 115° - \angle BDH$이다.

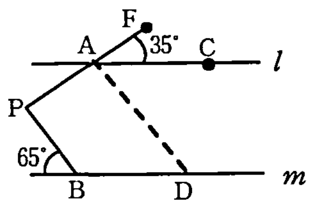
$\triangle PGH$에서 $\angle PGH = \angle AGC$, $\angle PHG = \angle BHD$이고, $\angle GPH = \angle APB$이므로,

$$\begin{aligned} \angle APB &= 180° - (\angle PGH + \angle PHG) \\ &= 180° - (145° - \angle ACG + 115° - \angle BDH) \\ &= 180° - 260° + \angle ACG + \angle BDH \\ &= 180° - 260° + 180° = 100° \end{aligned}$$

보조선1-11에서는 평행선에서 동측내각의 합이 180° 라는 사실, 맞꼭지각의 성질과 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 사실을 적용하여 구하고자 하는 각의 크기를 구했다.

보조선1-6에서는 점 A에서 직선 m에 수직인 보조선을 그렸다. 점 A에서 그은 보조선이 직선 m과 수직이 아니면 어떻겠는가? 점 A에서 그은 보조선이 $\overline{PB}$와 평행인 경우와 평행이 아닌 경우로 나누어 생각해보자.

보조선1-12. 점 A를 지나며 $\overline{PB}$와 평행인 보조선



<그림 14>

풀이1)

점 A에서 $\overline{PB}$에 평행이 되도록 보조선을 긋고 직선 m과의 교점을 D라 하자.

그러면, $\angle CAD = \angle BDA = 65°$ (동위각, 엇각)이므로,

$\angle FAD = 35° + 65° = 100°$ 이다.

$\overline{AD} // \overline{PB}$이므로, $\angle APB = \angle FAD = 100°$ (동위각)

보조선1-12의 풀이1에서는 동위각의 성질, 엇각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

풀이2)

$\angle PAD = 180° - 35° - 65° = 80°$ 이다.

평행선에서 동측내각의 합은 180° 이므로, $\angle APB + \angle PAD = 180°$

그러므로, $\angle APB = 180° - 80° = 100°$

보조선1-12의 풀이2에서는 평행선에서 동측내각의 합이 180° 라는 성질, 동위각의 성질, 엇각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

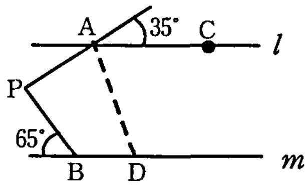
풀이3)

$\angle PAD = 80°$, $\angle ADB = 65°$, $\angle PBD = 115°$ 이고, 사각형의 내각의 합은 360° 이므로 $\angle APB + \angle PAD + \angle ADB + \angle PBD = 360°$ 이다.

그러므로, $\angle APB = 360° - 80° - 65° - 115° = 100°$

보조선1-12의 풀이3에서는 동위각의 성질, 엇각의 성질, 사각형의 내각의 합은 360° 임을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

보조선1-13. 점 A를 지나며 $\overline{PB}$와 평행이 아닌 보조선



<그림 15>

풀이)

그림15와 같이 점 A에서 직선 m에 $\overline{AD}$를 긋자.

그러면, $\angle CAD = \angle BDA$ (엇각) 이므로,

$\angle PAD = 180° - 35° - \angle CAD = 145° - \angle BDA$ 이고,

$\angle PBD = 180° - 65° = 115°$ 이다.

□$APBD$에서, $\angle APB + \angle PBD + \angle BDA + \angle PAD = 360°$

그러므로,

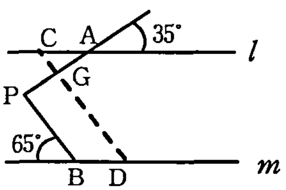
$$\angle APB = 360° - 115° - \angle BDA - (145° - \angle BDA)$$
$$= 360° - 115° - \angle BDA - 145° + \angle BDA = 100°$$

보조선1-13에서는 엇각의 성질, 보각의 성질, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

보조선1-13에서는 점 A에서 보조선을 작도하였다. 마찬가지 방법으로 점 B에서 보조선을 그려서도 각의 크기를 구할 수 있다.

또한 보조선1-9에서 보조선 CD는 직선 l, m과 수직이다. 점 A가 아닌 l위의 점 C에서 l, m과 수직이 아닌 보조선의 경우에도 각을 구할 수 있다. 보조선 $\overline{CD}$가 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$와 만나는 경우는 보조선1-11에서 다루었으므로, 여기에서는 $\overline{CD}$가 $\overline{PA}$와 만나는 경우만을 생각해보자. $\overline{CD}$가 $\overline{PB}$와 평행인 경우와 평행이 아닌 경우로 나누어보자.

보조선1-14. $\overline{AP}$를 지나며 $\overline{PB}$와 평행인 보조선



<그림 16>

풀이)

$\overline{PB}$에 평행이고, $\overline{AP}$와 만나도록 $\overline{CD}$를 그리고, $\overline{CD}$와 $\overline{PA}$와의 교점을 G라 하자.

그러면, $\angle CAG = 35°$ (맞꼭지각), $\angle ACG = \angle GDB = 65°$ 이다.

또한, △AGC에서,

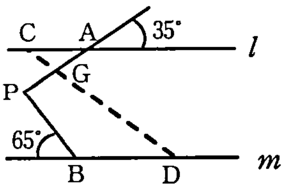
$\angle AGD = 35° + \angle ACG = 35° + 65° = 100°$ 이고,

$\overline{CD} // \overline{PB}$ 이므로, $\angle APB = 100°$ 이다.

보조선1-14에서는 맞꼭지각의 성질, 엇각의 성질을 이용하고 각의 크기를 구하였다.

$\overline{CD}$가 $\overline{PB}$와 평행하지 않는 경우를 살펴보자.

보조선1-15. $\overline{AP}$를 지나며 $\overline{PB}$와 평행하지 않는 경우



<그림 17>

풀이)

그림과 같이 $\overline{AP}$를 지나며 직선 l, m과 만나는 $\overline{CD}$를 그리고, $\overline{CD}$와 $\overline{PA}$와의 교점을 G라 하자.

그러면, $\angle CAG = 35°$ (맞꼭지각), $\angle PBD = 180° - 65° = 115°$ (보각), $\angle ACG = \angle GDB$(엇각)이다.

또한, $\triangle AGC$에서, $\angle AGD = 35° + \angle ACG$이므로,

$\angle PGD = 180° - \angle AGD = 180° - (35° + \angle ACG)$

$= 145° - \angle ACG = 145° - \angle GDB$

$\square PGDB$에서, $\angle APB + \angle PGD + \angle GDB + \angle PBD = 360°$ 이므로,

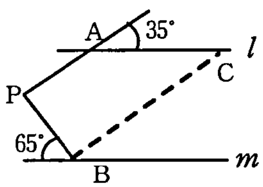
$\angle APB = 360° - (145° - \angle GDB) - \angle GDB - 115°$

$= 360° - 145° + \angle GDB - \angle GDB - 115°$

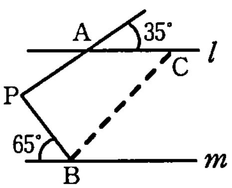
$= 360° - 145° - 115° = 100°$

보조선1-15에서는 맞꼭지각의 성질, 보각의 성질, 엇각의 성질, 삼각형에서 한 외각의 크기는 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질을 이용하여 각의 크기를 구하였다.

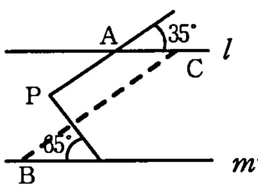
보조선1-12에서 1-15까지에서 제시한 보조선은 각각 점 B를 지나는 보조선, $\overline{PB}$를 지나는 보조선을 그려서 해결할 수도 있다. 자세한 증명은 제외하고 그림을 제시하면 다음과 같다.



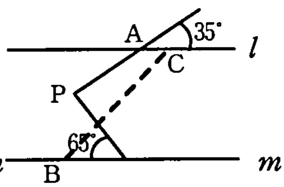
<그림 18>



<그림 19>



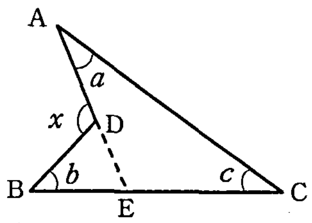
<그림 20>



<그림 21>

예제 2. 다음 <그림 22>에서 $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$임을 증명하여라.

풀이)

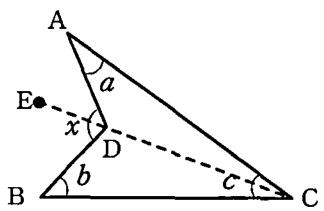


<그림 22>

$\overline{AD}$의 연장선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 E라 하자.
그러면 $\triangle ACE$에서, $\angle AEB = \angle a + \angle c$ 이다.
또한 $\triangle DBE$에서 $\angle x$는 한 외각의 크기이므로,
$\angle x = \angle b + \angle DEB = \angle b + \angle a + \angle c$
그러므로, $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

예제2는 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다는 성질을 학습한 후 나오는 전형적인 문제이다. 교과서에서 제시되는 보조선은 $\overline{AD}$를 연장한 보조선을 그리는 것이다. 이는 앞서 배운 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 적용하기 위해서 그리는 것이다. 그러나 이 문제 역시 다양한 보조선을 작도하여 해결할 수도 있다. 가능한 보조선들을 생각해보자.

보조선2-1. 점 C와 점 D를 지나는 보조선



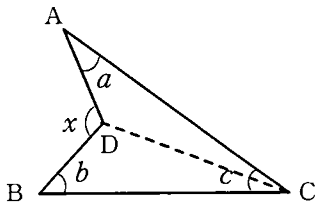
<그림 23>

풀이)
점 C에서 점 D를 지나는 $\overline{CE}$를 긋자.
그러면 $\triangle ACD$에서, $\angle ADE = \angle a + \angle ACD$ 이다.
마찬가지로 $\triangle BCD$에서, $\angle BDE = \angle b + \angle BCD$이다.
그런데, $\angle ACD + \angle BCD = \angle c$이고,
$\angle ADE + \angle BDE = \angle x$ 이므로,
$\angle x = \angle ADE + \angle BDE = \angle a + \angle b + \angle ACD + \angle BCD$
$= \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-1에서도 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하였다.

보조선2-1과 비슷하게 점 C와 점 D를 연결한 선분을 그려서 문제를 해결해보자.

보조선2-2. 점 C와 점 D를 연결한 보조선
풀이)
그림24와 같이 점 C와 점 D를 연결한 보조선을 그리자. 그러면 주어진 도형은 두 개의 삼각형으로 분할된다.



<그림 24>

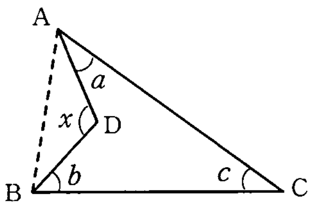
$\triangle ACD$에서, $\angle a+\angle ACD+\angle ADC=180°$
$\triangle BCD$에서, $\angle b+\angle BCD+\angle BDC=180°$
또한, $\angle ACD+\angle BCD=\angle c$ 이다.
그리고, $\angle x+\angle ADC+\angle BDC=360°$

그러므로,

$\angle x+\angle ADC+\angle BDC=(\angle a+\angle ACD+\angle ADC)+(\angle b+\angle BCD+\angle BDC)$
$\angle x=\angle a+\angle b+(\angle ACD+\angle BCD)=\angle a+\angle b+\angle c$

보조선2-2에서는 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이용하였다.

보조선2-2. 점 A와 점 B를 연결한 보조선



<그림 25>

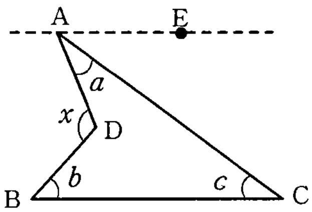
풀이)
점 A와 점 B를 연결하는 $\overline{AB}$를 긋자.
그러면 $\triangle CAB$에서, $\angle ABC+\angle BAC+\angle c=180°$ 이다.
여기서, $\angle ABC=\angle ABD+\angle b$, $\angle BAC=\angle BAD+\angle a$이다.
마찬가지로 $\triangle DAB$에서, $\angle ABD+\angle BAD+\angle x=180°$
그러므로,

$\angle x=180°-(\angle ABD+BAD)$
$=180°-(\angle ABC-\angle b+\angle BAC-\angle a)$
$=180°-\angle ABC-\angle BAC+\angle b+\angle a=\angle c+\angle b+\angle a$
즉, $\angle x=\angle a+\angle b+\angle c$

보조선2-3에서는 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 사실을 이용하였다.

다른 보조선을 생각해보자.
예제 2에서 주어진 그림을 잘 보면, 예제 1에서와 비슷한 부분이 있음을 알 수 있다. 즉, 점 A를 지나며 $\overline{BC}$에 평행인 보조선을 그리면 예제 1의 결과를 이용할 수 있다.

보조선2-4. 점 A를 지나고 $\overline{BC}$에 평행인 보조선



<그림 26>

풀이)

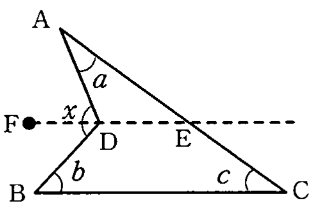
점 A를 지나고 $\overline{BC}$에 평행인 직선을 그리자.

그러면, $\angle EAC = \angle c$

예제 1에 의하여, $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-4에서는 엇각의 성질과 예제 1의 결과를 이용하여 증명하였다.

보조선2-5. 점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 평행인 보조선



<그림 27>

풀이)

점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 평행인 직선을 그리자.

그러면, $\angle AED = \angle c$ (동위각), $\angle FDB = \angle b$ (엇각)

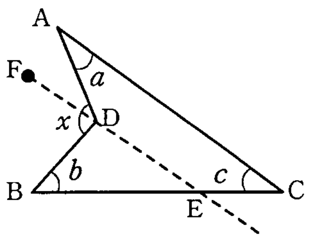
$\triangle AED$에서, $\angle ADF = \angle a + \angle AED = \angle a + \angle c$

그러므로, $\angle x = \angle ADF + \angle FDB = \angle a + \angle c + \angle b$

보조선2-5에서는 동위각의 성질, 엇각의 성질, 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하였다.

마찬가지 방법으로 점 D를 지나며 $\overline{AC}$에 평행인 보조선을 생각할 수 있다.

보조선2-6. 점 D를 지나 $\overline{AC}$에 평행인 보조선



<그림 28>

풀이)

점 D를 지나 $\overline{AC}$에 평행인 직선을 그리자.

그러면, $\angle ADF = \angle a$ (엇각), $\angle BED = \angle c$ (동위각)

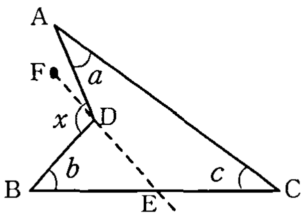
$\triangle DBE$에서, $\angle FDB = \angle b + \angle BED = \angle b + \angle c$

그러므로, $\angle x = \angle ADF + \angle FDB = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-6에서는 엇각의 성질, 동위각의 성질, 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하였다.

보조선 2-5와 2-6에서는 점D를 지나면서 barBC 또는 barAC에 평행한 특수한 보조선을 그려서 문제를 해결하였다. 그러면 점D를 지나면서 두 선분과 평행하지 않는 일반적인 직선을 그려서 문제를 해결하여 보자.

보조선2-7. 점 D를 지나는 일반적인 직선



<그림 29>

풀이)

점 D를 지나 $\overline{BC}$와 만나는 직선을 그리고 교점을 E라 하자.

그러면, $\angle x+\angle BDE+\angle ADE=360^\circ$

$\triangle BDE$에서, $\angle b+\angle BDE+\angle BED=180^\circ$

$\square ADEC$에서, $\angle a+\angle ADE+\angle DEC+\angle c=360^\circ$

그러므로, $\angle x=360^\circ-(\angle BDE+\angle ADE)$

그런데,

$\angle BDE+\angle ADE=\{180^\circ-(\angle b+\angle BED)\}+\{360^\circ-\angle a+\angle DEC+\angle c\}$

$=180^\circ+360^\circ-(\angle a+\angle b+\angle c)-(\angle BED+\angle DEC)$

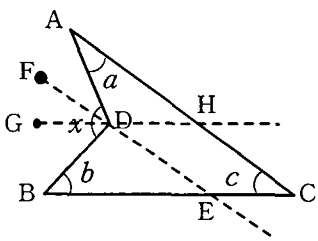
$=360^\circ-(\angle a+\angle b+\angle c)$

그러므로, $\angle x=360^\circ-360^\circ+(\angle a+\angle b+\angle c)=\angle a+\angle b+\angle c$

보조선2-7에서는 삼각형의 내각의 합은 180°, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질을 사용하였다.

보조선2-5와 2-6를 동시에 그려서 다음과 같이 문제를 해결할 수도 있다.

보조선2-8. 보조선2-5와 2-6를 동시에 이용하는 보조선



<그림 30>

풀이)

점 D에서 $\overline{AC}$와 평행인 직선과 $\overline{BC}$와 평행인 직선을 그리고 주어진 도형의 변과의 교점을 각각 E, H라고 하자.

그러면, $\angle ADF=\angle a$(엇각), $\angle CBD=\angle b$(엇각),

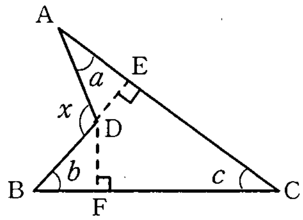
$\angle FDB=\angle EDH$(맞꼭지각), $\angle EDH=\angle c$(평행사변형의 성질). 즉, $\angle FDB=\angle c$

그러므로,

$\angle x=\angle ADF+\angle BDG+\angle FDG=\angle a+\angle b+\angle c$

보조선2-8에서는 엇각의 성질, 맞꼭지각의 성질, 평행사변형에서 대각의 크기는 같다는 성질을 이용하였다.

보조선2-9. 점 D에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$에 수직으로 내린 보조선



<그림 31>

풀이)

점 D에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$에 수선을 내려, 수선의 발을 각각 E, F 라 하자.

그러면, $\triangle ADE$에서, $\angle ADE = 90^\circ - \angle a$

$\triangle BDF$에서, $\angle BDF = 90^\circ - \angle b$

$\square DECF$에서,

$\angle EDF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle c = 180^\circ - \angle c$

그런데, $\angle x + \angle ADE + \angle BDF + \angle EDF = 360^\circ$ 이므로,

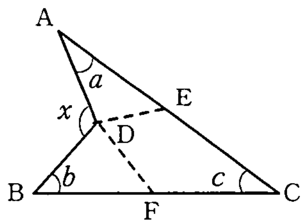
$\angle x = 360^\circ - (90^\circ - \angle a) - (90^\circ - \angle b) - (180^\circ - \angle c)$

그러므로 $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-9에서는 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질을 이용하였다.

보조선2-9에서는 점 D에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$에 각각 수직인 보조선을 그렸다. 일반적으로 수직이 아닌 보조선을 그리는 경우를 생각해보자. 보조선2-7과도 비교하여 보자.

보조선2-10. 점 D에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$에 그린 보조선(일반적으로 수직이 아닌 경우)



<그림 32>

풀이)

점 D에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$에 선분을 그리고, 각각의 교점을 E, F 라 하자.

그러면, $\angle x + \angle ADE + \angle EDF + \angle BDF = 360^\circ$

그런데, $\triangle ADE$에서, $\angle DEC = \angle a + \angle ADE$

$\triangle BDF$에서, $\angle DFC = \angle b + \angle BDF$이다.

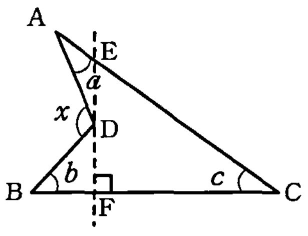
$\square DECF$에서, $\angle DEC + \angle c + \angle CFD + \angle EDF = 360$이므로

$$\begin{aligned}\angle x + \angle ADE + \angle EDF + \angle BDF &= \angle DEC + \angle c + \angle CFD + \angle EDF \\ &= \angle a + \angle ADE + \angle c + \angle b + \angle BDF + \angle EDF\end{aligned}$$

그러므로, $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선 2-10에서는 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질과 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질을 이용하였다.

보조선2-11. 점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 수직인 보조선



<그림 33>

풀이)

점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 그리자.

$\triangle ADE$에서, $\angle a + \angle ADE = \angle CED$

그런데 $\angle CED = 90° - \angle c$ 이므로,

$\angle ADE = 90° - \angle a - \angle c$

$\triangle BDF$에서, $\angle BDF = 90° - \angle b$

그런데, $\angle x + \angle ADE + \angle BDF = 180°$ 이므로,

$\angle x = 180° - \angle ADE - \angle BDF$

그러므로, $\angle x = 180° - (90° - \angle a - \angle c) - (90° - \angle b) = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-11에서는 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이용하였다.

보조선2-11에서는 점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 수직인 보조선을 그렸다. 마찬가지로, 점 D를 지나며 $\overline{AC}$에 수직인 보조선을 그려서 문제를 해결할 수도 있다.

점 D를 지나며 $\overline{BC}$에 수직이 아닌 보조선을 생각해보자. 예제 1에서도 비슷한 보조선을 이용한 풀이가 있다. 예제1의 보조선1-4, 보조선2-9, 2-10와 비교해보아라.

보조선2-12. 점 D를 지나고, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$와 만나는 보조선

풀이)

점 D를 지나고, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$와 만나며, 이때 $\overline{BC}$에 수직이 아닌 직선을 그리자.

$\triangle ADE$에서, $\angle a + \angle ADE = \angle CED$

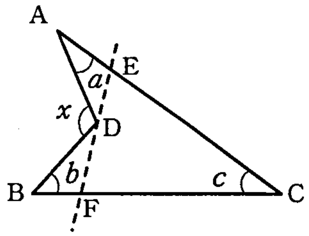
$\triangle BDF$에서, $\angle b + \angle BDF = \angle CFD$

그러므로, $\angle ADE = \angle CED - \angle a$, $\angle BDF = \angle CFD - \angle b$이다.

그런데, $\angle x + \angle ADE + \angle BDF = 180°$ 이므로,

$\angle x = 180° - \angle ADE - \angle BDF$

그러므로, $\angle x = 180° - (\angle CED - \angle a) - (\angle CFD - \angle b)$



<그림 34>

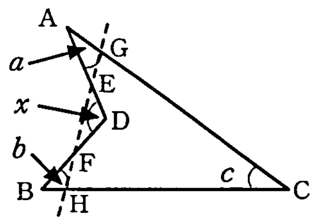
$= \angle a + \angle b + (180^\circ - \angle CED - \angle CFD)$

그런데, $\triangle CDF$에서 $180^\circ - \angle CED - \angle CFD = \angle c$ 이므로

$\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-12에서는 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이용하였다.

보조선2-13. $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BC}$와 만나는 보조선



<그림 35>

풀이)

그림35와 같이 $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BC}$와 각각 G, E, F, H에서 만나는 직선을 그리자.

$\triangle AGE$에서, $\angle CGE = \angle a + \angle AEG$

$\triangle BHF$에서, $\angle CHF = \angle b + \angle BFH$

또한 $\angle AEG = \angle DEF$, $\angle BFH = \angle EFD$

$\triangle DEF$에서 $\angle x + \angle DEF + \angle EFD = 180^\circ$

그러므로, $\angle x = 180^\circ - \angle DEF - \angle EFD = 180^\circ - \angle AEG - \angle BFH$

$\angle AEG = \angle CGE - \angle a$, $\angle BFH = \angle CHF - \angle b$이므로,

$\angle x = 180^\circ - (\angle CGE - \angle a) - (\angle CHF - \angle b)$

$= \angle a + \angle b + (180^\circ - \angle CGE - \angle CHF)$

그런데, $180^\circ - \angle CGE - \angle CHF = \angle c$이므로

$\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-13에서는 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질, 맞꼭지각의 성질을 이용하였다.

보조선2-14. 점 A를 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선

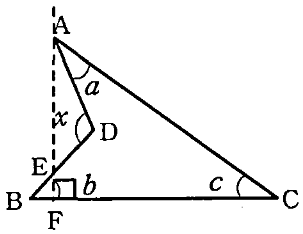
풀이)

점 A에서 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 그리고 $\overline{BD}, \overline{BC}$ 와의 교점을 각각 E, F라 하자.

$\angle AED = 90^\circ - \angle b$, $\angle EAD = 90^\circ - \angle a - \angle c$,

그러므로, $\triangle AED$ 에서

$\angle x = 180^\circ - \angle AED - \angle EAD$



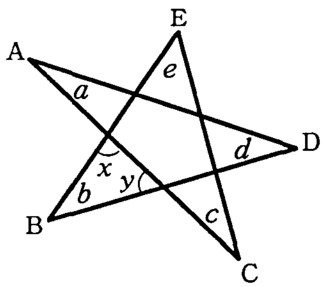
<그림 36>

그러므로, $\angle x = 180^\circ - (90^\circ - \angle b) - (90^\circ - \angle a - \angle c)$
$= \angle a + \angle b + \angle c$

보조선2-14에서는 삼각형의 내각의 합은 180˚ 라는 성질, 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하였다.

마찬가지로, 점 A에서 그은 보조선이 $\overline{BC}$의 연장선과 만나는 경우도 구할 수 있으며, 점 B에서 그은 보조선을 이용할 수도 있다.

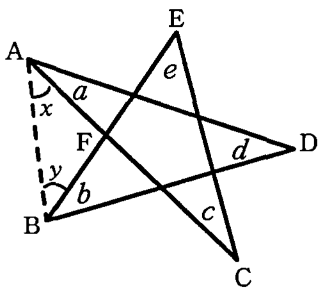
예제 3. 다음 그림에서 $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$ 의 값을 구하여라.



<그림 37>

풀이)
그림37에서,
$\angle x = \angle e + \angle c,\ \angle y = \angle a + \angle d$
따라서
$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$
$= \angle x + \angle y + \angle b = 180^\circ$

예제 3은 중학교 1학년 평면도형 단원에서 나오는 문제이다. 이 문제는 삼각형에서 한 외각의 크기는 이 외각과 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다는 성질을 이용하여 해결하였다. 이 문제 역시 다양한 보조선을 이용하여 해결할 수 있다. 특히 주어진 그림을 분해하면 앞서 다룬 예제 2의 도형과 삼각형으로 분해할 수 있다. 가능한 다양한 보조선을 생각해보자.

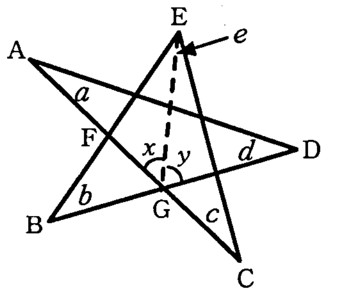


<그림 38>

보조선3-1. 점 A와 점 B를 연결한 보조선
풀이)
그림38과 같이 점 A와 점 B를 연결한 보조선을 그리자.
$\triangle AFB$와 $\triangle CFE$에서
$\angle AFB = \angle CFE$ (맞꼭지각)이므로
$\angle x + \angle y = \angle c + \angle e$
그러므로, $\triangle ABD$ 에서
$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$
$= \angle x + \angle y + \angle a + \angle b + \angle d = 180^\circ$

보조선3-1에서는 맞꼭지각의 크기가 같다는 성질과 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 사실을 이용하였다.

보조선3-2. 점 E와 점 F를 연결한 보조선



<그림 39>

풀이)

점 E와 점 F를 연결한 보조선을 그리자.

$\triangle BEG$에서

$\angle y = \angle b + \angle BEG$

$\triangle CEG$에서

$\angle x = \angle c + \angle CEG$

그런데, $\angle BEG + \angle CEG = \angle e$ 이므로

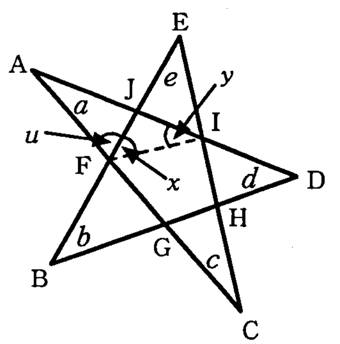
$\angle x + \angle y = \angle b + \angle c + \angle e$

그러므로, $\triangle AGD$에서

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = \angle x + \angle y + \angle a + \angle d = 180^\circ$

보조선3-2에서는 삼각형에서 한 외각의 크기는 이 외각과 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다는 성질과 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 사실을 이용하였다.

보조선3-3. 점 E와 점 F를 연결한 보조선



<그림 40>

풀이)

점 E와 점 F를 연결한 보조선을 그리자.

$\triangle JFI$와 $\triangle JBD$에서

$\angle x + \angle y = \angle b + \angle d$

$\triangle EFC$ 에서

$\angle e + \angle c = \angle u$

그러므로, $\triangle AFI$에서

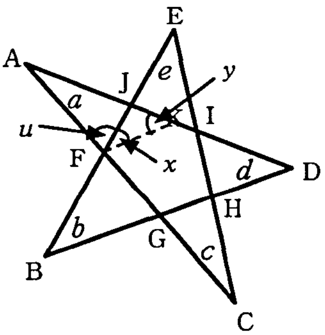
$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$

$= \angle a + \angle u + \angle x + \angle y + \angle e$

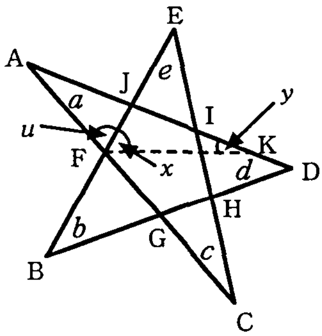
$= 180^\circ$

보조선3-3에서는 삼각형에서 한 외각의 크기는 이 외각과 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다는 성질과 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 사실을 이용하였다.

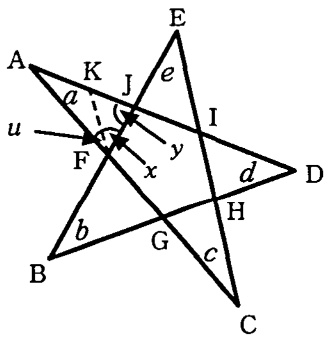
보조선3-3과 비슷한 보조선을 생각하면 다음과 같다. 풀이 방법은 3-3에서와 같다.



<그림 41>



<그림 42>



<그림 43>

<그림 41>과 <그림 42>의 보조선은 점 F에서 $\overline{AD}$에 그은 보조선이다. 일반적으로 보조선3-3과 같은 방법으로 풀 수 있고, 특히 $\overline{FK}$가 $\overline{BD}$와 평행인 경우에는 동위각의 성질을 이용할 수 있다.

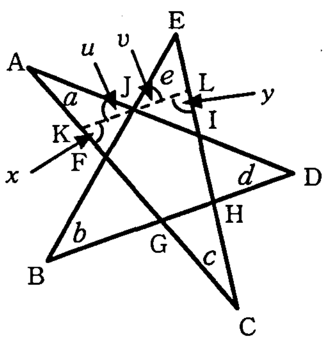
<그림 43>의 보조선은 점 F에서 $\overline{EC}$에 평행이 되도록 그렸다.

그러면 $\angle u = \angle c$ (동위각) , $\angle x = \angle e$ (엇각) , $\angle y = \angle b + \angle d$

그러므로, , $\triangle AFJ$에서

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = \angle a + \angle u + \angle x + \angle y = 180^\circ$

<그림 43>의 보조선에서는 동위각의 성질, 엇각의 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이용하였다.



<그림 44>

보조선 3-4. 점 J에서 $\overline{BD}$에 평행인 보조선

풀이)

그림44와 같이 점 J에서 $\overline{BD}$에 평행인 보조선을 그리자.

$\angle u = \angle d$ (동위각), $\angle v = \angle b$ (동위각)

$\triangle AKJ$에서 $\angle a + \angle u = \angle x$

즉, $\angle x = \angle a + \angle d$

$\triangle ELJ$에서 $\angle e + \angle v = \angle y$

즉, $\angle y = \angle e + \angle b$

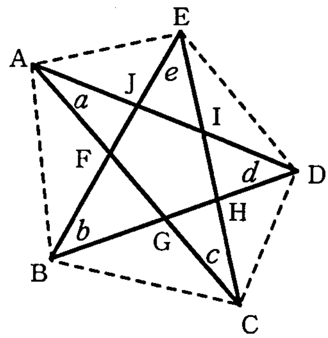
그러므로, $\triangle CKL$에서

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$

$= \angle a + \angle u + \angle x + \angle y = 180^\circ$

보조선3-4에서는 동위각의 성질과 삼각형의 한 외각의 크기는 이 외각과 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다는 성질과 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 사실을 이용하였다.

보조선 3-5. 5개의 꼭지점을 연결하는 보조선



<그림 45>

풀이)

<그림 45>와 같이 각 꼭지점을 연결하는 보조선을 그리자.

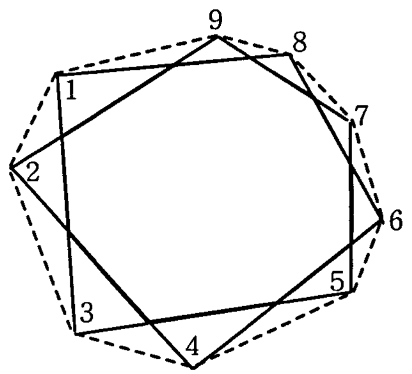
그러면 오각형 $ABCDE$가 생기고, 오각형의 내각의 합은 540° 이다.

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$ 를 구하기 위하여, 540° 에서 $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$, $\triangle DEI$, $\triangle EAJ$의 내각의 합을 빼자. 그런데, $\angle AFB$, $\angle BGC$, $\angle CHD$, $\angle DIE$, $\angle EJA$는 불필요하게 빼졌으므로 다시 더해주어야 한다. 맞꼭지각의 성질을 이용하면 이들 다섯 개의 각은 오각형 $FGHIJ$의 내각과 같고 그 합은 540° 이다.

그러므로,

$$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e = 540^\circ - (5\times 180^\circ) + 540^\circ = 180^\circ$$

보조선3-5에서는 삼각형 내각의 합은 180° 라는 성질과 오각형의 내각의 합은 540° 라는 사실을 이용하였다.



<그림 46>

보조선3-5를 이용하면, 임의의 볼록다각형에서 각 변들의 연장선들이 만나서 생기는 별모양의 도형으로 문제를 확장할 수 있다. 예를 들어 볼록 9각형에서 생각해보자.

풀이)

보조선3-5의 방법을 적용하면,

$$\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle 9$$
$$= 1260^\circ - (9\times 180^\circ) + 1260^\circ$$
$$= 2520^\circ - 1620^\circ = 900^\circ$$

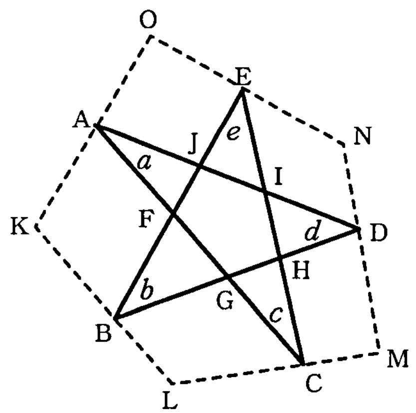
일반적으로, 임의의 볼록 n 각형에서 톱니모양의 n개의 각의 합을 구하면,

$$(n-2)\times 180^\circ - n\times 180^\circ + (n-2)\times 180^\circ$$
$$= (n-4)\times 180^\circ$$

임을 알 수 있다.

보조선3-5와 비슷한 다음과 같은 방법도 생각해보자.

보조선 3-6. 각 꼭지점을 지나는 직선



<그림 47>

풀이)

그림47과 같이 각 꼭지점을 지나는 직선들을 그리고 그 교점을 K, L, M, N, O라 하자.

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$ 를 구하기 위하여, $180^\circ \times 5$에서 불필요하게 더해진 부분을 빼자.

빼야 할 각들은 각각 $\square AKBF$, $\square BLCG$, $\square CMDH$, $\square DNEI$, $\square EOAJ$ 의 내각들이다.

그런데, $\angle AFB, \angle BGC, \angle CHD, \angle DIE, \angle EJA$는 불필요하게 빼졌으므로 다시 더해주어야 한다. 맞꼭지각의 성질을 이용하면 이들 다섯 개의 각은 오각형 $FGHIJ$의 내각과 같고 그 합은 540° 이다.

마찬가지로 $\angle AKB, \angle ALC, \angle CMD, \angle DNE, \angle COA$ 도 불필요하게 빼졌으므로 더해주어야 한다. 이 각들은 오각형 $KLMNO$의 내각이고 오각형의 내각의 합은 540° 이다.

그러므로,

$$\begin{aligned}\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e &= (5\times180^\circ)-(5\times360^\circ)+540^\circ+540^\circ\\ &= 900^\circ-1800^\circ+540^\circ+540^\circ=180^\circ\end{aligned}$$

보조선3-6에서는 평각의 크기, 사각형의 내각의 합은 360° 라는 성질, 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 이용하였다.

보조선3-6까지에서는 새로운 보조선을 그려서 각의 크기를 구하였다. 이제부터는 새로운 보조선을 추가하지 않고 주어진 그림을 새롭게 구성하거나 분할하는 과정을 통해 각의 크기를 구해보자.

보조선3-7. 외각의 크기를 이용

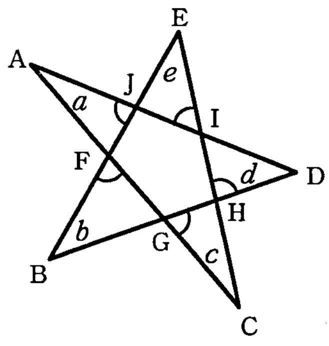
풀이)

오각형 $FGHIJ$의 외각을 생각해보자. 다각형의 외각의 크기의 합은 항상 360° 이다.

$\triangle JBD$에서, $\angle AJF=\angle b+\angle d$

$\triangle FCE$에서, $\angle BFG=\angle c+\angle e$

$\triangle GDA$에서, $\angle CGH=\angle a+\angle d$



<그림 48>

$\triangle HEB$에서, $\angle DHI = \angle b + \angle e$

$\triangle IAC$에서, $\angle EIJ = \angle a + \angle c$

각각을 모두 더하면,

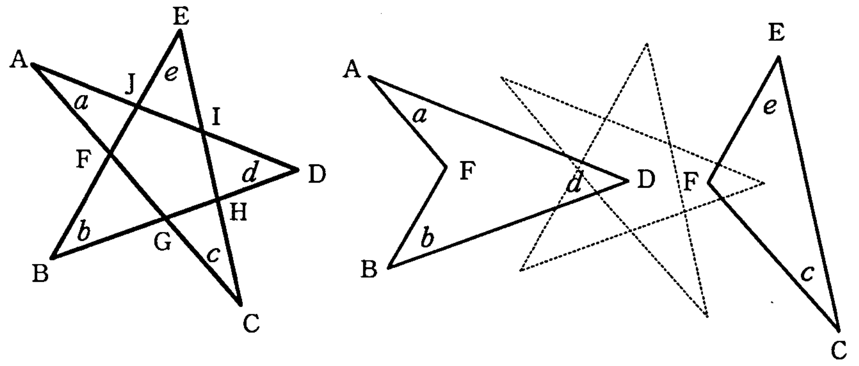
$360^\circ = 2 \times (\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e)$

그러므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$

보조선3-7에서는 다각형의 외각의 크기의 합은 360° 라는 성질과 삼각형에서 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 성질을 이용하였다.

보조선을 그리지 않고 주어진 도형을 적절히 분해 또는 분할하여 구하고자하는 각의 크기를 구해보자. 특히 앞서 해결한 예제2의 결과를 이용해보자.

보조선3-8. 주어진 도형을 분할하기1



<그림 49>

풀이)

그림49와 같이 주어진 별모양의 도형을 하나의 삼각형과 예제2에서 제시한 도형과 같은 모양이 되도록 분할하자.

그러면 예제 2의 결과에 의하여 $\angle AFB = \angle a + \angle b + \angle d$ 이다.

$\triangle EFC$에서, $\angle c + \angle e + \angle EFC = 180^\circ$ 이다.

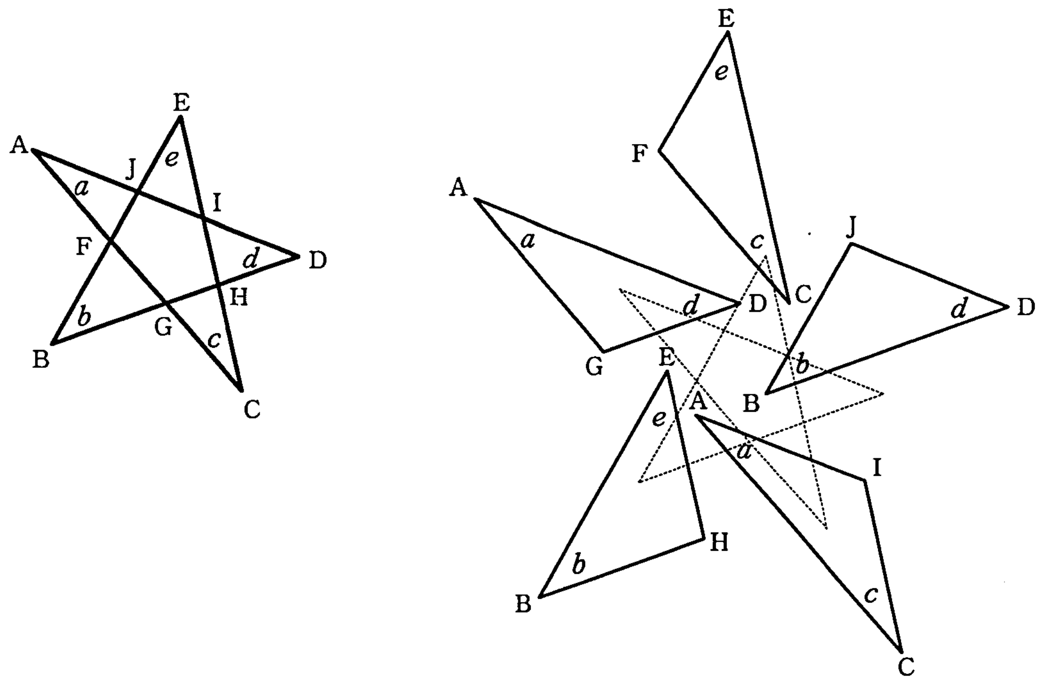
그런데, $\angle AFB = \angle EFC$ (맞꼭지각)이므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$

보조선3-8에서는 예제 2의 결과와 맞꼭지각의 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 성질을 이

용하였다.

또 다른 분할을 생각해보자. 보조선3-7에서는 오각형의 외각의 합은 360° 라는 성질을 이용하였다. 이번에는 오각형의 내각의 합을 생각하며, 문제를 해결하는 경우이다.

보조선3-9. 주어진 도형을 분할하기2



<그림 50>

풀이)

주어진 별모양의 도형을 그림 49와 같이 다섯 개의 삼각형으로 분할하자.

그러면, 구하고자 하는 $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$의 크기는, 다섯 개의 삼각형의 내각의 합에서 불필요하게 더해진 부분을 빼면 된다.

먼저, $\triangle AGD$에서, $\angle a + \angle d + \angle G = 180°$

$\triangle BHE$에서, $\angle b + \angle e + \angle H = 180°$

$\triangle CIA$에서, $\angle c + \angle a + \angle I = 180°$

$\triangle DJB$에서, $\angle d + \angle b + \angle J = 180°$

$\triangle EFC$에서, $\angle e + \angle c + \angle F = 180°$

좌변과 우변을 각각 더하면,

$2\times(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e)+\angle G+\angle H+\angle I+\angle J+\angle F=5\times180^\circ$ 이고,

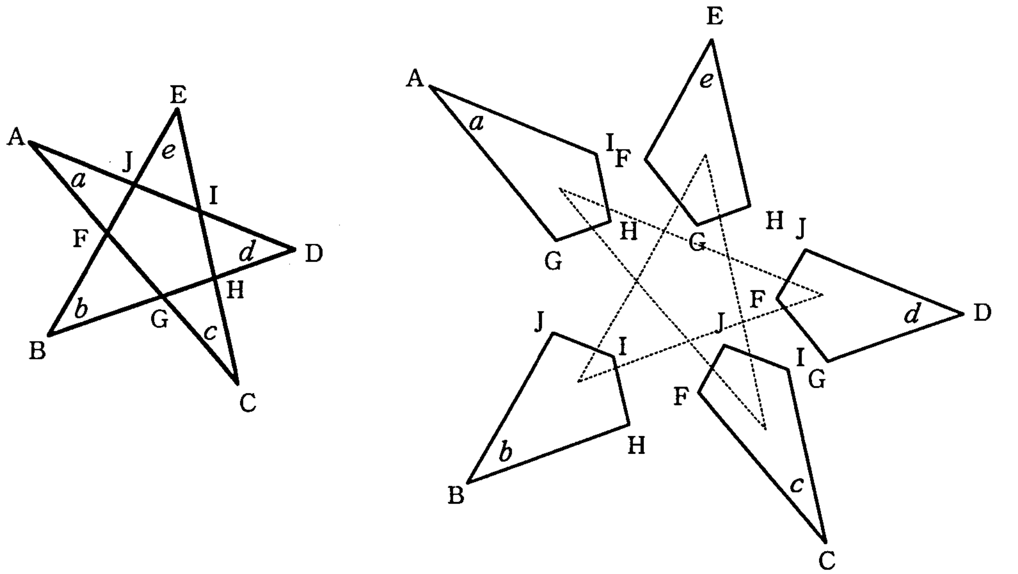
$\angle G+\angle H+\angle I+\angle J+\angle F=540^\circ$ 이므로,

$2\times(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e)=5\times180^\circ-540^\circ=360^\circ$

그러므로, $\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=180^\circ$

보조선3-9에서는 주어진 도형을 5개의 삼각형으로 분할하였으며, 삼각형의 내각의 합은 180°, 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 사용하였다. 비슷한 방법으로 주어진 도형을 다섯 개의 사각형으로 분할하는 방법을 생각해보자.

보조선3-10. 주어진 도형을 분할하기3



<그림 51>

풀이)

주어진 별모양의 도형을 그림 51과 같이 다섯 개의 사각형으로 분할하여 보자.

그러면, 구하고자 하는 $\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$의 크기는, 다섯 개의 사각형의 내각의 합에서 다섯 개의 사각형에서 불필요하게 더해진 부분을 빼면 된다.

먼저, $\square AGHI$를 생각해보자.

$\angle a+\angle AGH+\angle GHI+\angle HIA=360^\circ$

마찬가지로, $\square BHIJ$에서, $\angle b+\angle BHI+\angle HIJ+\angle IJB=360^\circ$

$\square CIJF$에서, $\angle c + \angle CIJ + \angle IJF + \angle JFC = 360^\circ$

$\square DJFG$에서, $\angle d + \angle DJF + \angle JFG + \angle FGD = 360^\circ$

$\square EFGH$에서, $\angle e + \angle EFG + \angle FGH + \angle GHE = 360^\circ$

그 런 데 , $\angle AGH = \angle FGH = \angle FGD$, $\angle BHI = \angle GHI = \angle GHE$, $\angle CIJ = \angle HIJ = \angle HIA$, $\angle DJF = \angle IJF = \angle IJB$, $\angle EFG = \angle JFG = \angle JFC$ 이고, 이를 각각 오각형 $FGHIJ$의 한 내각인 $\angle G$, $\angle H$, $\angle I$, $\angle J$, $\angle F$로 나타내자.

좌변과 우변을 각각 더하면,

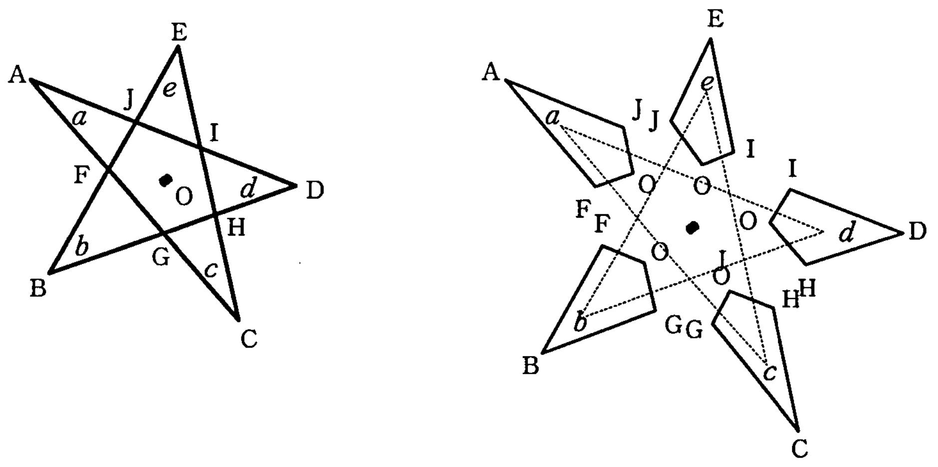
$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + 3\times(\angle G + \angle H + \angle I + \angle J + \angle F) = 5\times 360^\circ$

그러므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 5\times 360^\circ - 3\times 540^\circ = 180^\circ$

보조선3-10에서는 주어진 도형을 새로운 5개의 사각형으로 분할하였으며, 사각형의 내각의 합은 360° , 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 사용하였다.

보조선3-10의 분할은 그림51과 같이 오각형 내부에 한 점을 잡고 각각의 꼭지점과 연결한 선분으로 분할할 수도 있다.

보조선3-11. 주어진 도형을 분할하기4



<그림 52>

풀이)

오각형 내부에 임의의 점 O를 잡고 오각형의 꼭지점들과 연결한 선분을 그리고, 주어진 도형을 다섯개의 사각형으로 분할하자.

그러면, $\square AFOJ$에서, $\angle a + \angle AFO + \angle FOJ + \angle AJO = 360^\circ$

$\square BGOF$에서, $\angle b + \angle BGO + \angle GOF + \angle BFO = 360^\circ$

$\square CHOG$에서, $\angle c + \angle CHO + \angle HOG + \angle CGO = 360^\circ$

$\square DIOH$에서, $\angle d + \angle DIO + \angle IOH + \angle DHO = 360^\circ$

$\square EJOI$에서, $\angle e + \angle EJO + \angle JOI + \angle EIO = 360^\circ$

그런데, $\angle FOJ + \angle GOF + \angle HOG + \angle IOH + \angle JOI = 360^\circ$ 이고, 오각형의 내각을 각각 $\angle F, \angle G, \angle H, \angle I, \angle J$라고 하면,

$\angle AFO + \angle BFO = 360^\circ - \angle F$

$\angle BGO + \angle CGO = 360^\circ - \angle G$

$\angle CHO + \angle DHO = 360^\circ - \angle H$

$\angle DIO + \angle EIO = 360^\circ - \angle I$

$\angle EJO + \angle AJO = 360^\circ - \angle J$

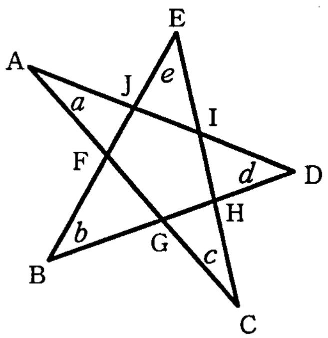
그러므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$

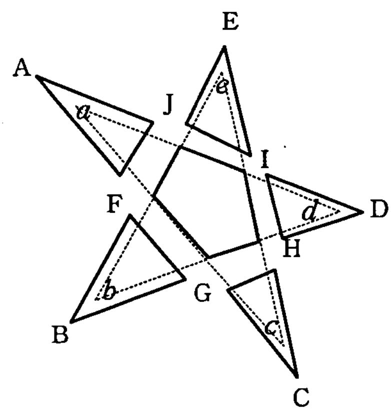
$= 5\times 360^\circ - (5\times 360^\circ - (\angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle J) - 360^\circ$

$= 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$

보조선3-11에서는 사각형의 내각의 합은 360°, 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 이용하였다.

보조선3-12. 주어진 도형을 분할하기5





<그림 53>

풀이)

그림53과 같이 주어진 도형을 다섯 개의 삼각형과 하나의 오각형으로 분할하자.

그러면 $\triangle AFJ$에서, $\angle a + \angle F + \angle J = 180^\circ$

$\triangle BGF$에서, $\angle b + \angle G + \angle F = 180^\circ$
(여기서, $\triangle AFJ$와 $\triangle BGF$의 $\angle F$는 맞꼭지각으로 같다.)
$\triangle CHG$에서, $\angle c + \angle H + \angle G = 180^\circ$
$\triangle DIH$에서, $\angle d + \angle I + \angle H = 180^\circ$
$\triangle EJI$에서, $\angle e + \angle J + \angle I = 180^\circ$
그러므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + 2(\angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle J) = 5 \times 180^\circ$
또한, 오각형 $FGHIJ$에서, 내각을 각각 $\angle f, \angle g, \angle h, \angle i, \angle j$ 라고 하면,
$\angle f + \angle g + \angle h + \angle i + \angle j = 540^\circ$ 이다.
그런데, $2(\angle F + \angle f) = 360^\circ$, $2(\angle G + \angle g) = 360^\circ$, $2(\angle H + \angle h) = 360^\circ$,
$2(\angle I + \angle i) = 360^\circ$, $2(\angle J + \angle j) = 360^\circ$ 이므로,

$$2(\angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle J) = 5 \times 360^\circ - 2(\angle f + \angle g + \angle h + \angle i + \angle j)$$
$$= 5 \times 360^\circ - 2 \times 540^\circ = 4 \times 180^\circ$$

그러므로, $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 5 \times 180^\circ - 4 \times 180^\circ = 180^\circ$

보조선3-12에서는 주어진 도형을 다섯 개의 삼각형과 하나의 오각형으로 분할하였으며, 맞꼭지각의 성질, 삼각형의 내각의 합은 180° , 오각형의 내각의 합은 540° 라는 성질을 이용하였다.

3. 결 론

본 연구에서는 중학교 교과서에서 제시되고 있는 세 가지 문제에 대하여 다양한 보조선을 이용한 풀이방법을 제시하였다. 기하문제, 특히 적절한 보조선을 그려서 해결하는 문제는 학생들의 추론력과 창조력을 자극할 수 있는 좋은 소재이다. 그러나 교과서에서는 아무런 설명없이 일방적으로 제시되는 보조선과 이를 이용한 풀이만이 제시되고 있는 실정이다. 몇 가지 기본적인 사실을 학습한 후에는 본고에서 제시한 것과 같은 다양한 보조선을 도입하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있을 것이다.

본 연구에서 다룬 세 가지 문제는 학생들이 쉽게 보조선을 그려서 해결할 수 있는 문제이다. 이처럼 쉬운 문제, 보조선에 대한 부담이 없는 문제에 대하여 다양한 보조선을 제시할 때, 보다 많은 학생들이 보조선에 대한 부담감을 해소할 수 있을 것이다. 그리고 무엇보다도 중요한 것은 한 가지 보조선에 집중하여 그 보조선을 기억하려 애쓰는 것이 아니라 스스로 다양한 보조선을 직접 그려보고, 주어진 조건을 이용하여 증명하는 경험이다. 한 가지 보조선만을 아무런 설명없이 그린 후에, 이를 이용하여 문제를 해결하는 것은 학생들이 보조선을 "번쩍이는 생각"이라고 느끼게 하는 이유 중에는 하나이다. 본 연구에서 제시하는 것처럼 한 문제에 대하여 다양한 보조선을 그릴 수 있고, 또 이를

이용하여 문제를 해결할 수 있다는 것을 학생들에게 제시할 필요가 있다.

본 연구에서는 한 문제를 해결하는 다양한 보조선을 제시하였지만, 보조선을 그리는 이유나 문제의 유형에 따라 특정한 보조선이 사용될 수 있음을 설명하지는 않았다. 후속 연구에서는 좀더 다양한 문제에 대하여 보조선을 그려보고, 보조선의 유형을 분류해보는 연구가 필요하다고 생각된다. 또한 다양한 보조선을 그리는 것뿐만 아니라 그러한 보조선을 그리게 된 이유를 체계적으로 정리할 필요가 있다고 생각된다.

문제해결을 위해 스스로 가능한 보조선을 생각해보는 활동과 보조선을 그리고 구하고자 하는 결과를 추론해보는 활동은 Polya의 표현처럼 많은 노력과 시간이 들지만 그만한 가치가 있는 것이다.

참 고 문 헌

임재훈 · 박경미 (2000). 보조선이 나온 이유나 맥락을 가르치자, 수학교육학연구발표대회논문집 2000년도 추계, 서울: 대한수학교육학회.

우정호 역, G.폴리아 (1997). 어떻게 문제를 풀 것인가?, 서울: 천재교육.