韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 14집, 2002. 8. 251-272.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 14, Aug. 2002. 251-272.

변수의 교수-학습에서 학생들의 수학화 과정 연구

고 상 숙 (단국대학교)
강 태 근 (단국대 대학원)

학생들은 변수의 개념을 실제 우리 실생활에서 많이 사용하고 있으면서도 실제 수학 수업에서는 상당히 어려워 한다. 변수의 교수-학습에서 수학화의 개념을 적용한 수업으로 학생들의 수학화가 이루어지는 과정, 정의적 측면의 변화와 실생활의 적용 여부에 대하여 조사하였다. 그 결과 학생들은 변수개념을 보다 쉽게 이해하고, 정의적 측면의 긍정적 변화와 실생활에서의 적용도 가능하다는 것을 확인 할 수 있었다.

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

우리의 실생활에서 알게 모르게 사용되어지는 수학이라는 학문이 실제 쓰여지고 있으면서도 배우고 있는 학생들에게는 무엇보다도 힘들고, 어렵게 느껴지는 이유가 무엇인지 항상 물어보곤 하였다. 흔히 우리가 실제 사용하고 있는 어떠한 변수의 개념이 실제 사용되면서도 학생들은 상당히 어려워하는 것을 알 수 있다. 학생들이 문자기호를 처음으로 배울 때, 그들은 문자기호의 기본적인 기능을 벗어나 그 표현의 다음 단계로 넘어갈 때 문제가 발생한다(Wagner & Kieran, 1989). 예를 들면 사과의 수로 기억된 문자 a의 개념에서 더 깊은 이해를 할 수 없고 발전할 수 없다. 학생들은 또한 하나의 기호가 동시에 많이 표현될 수 있다는 그러한 개념을 이해하는데 어려움을 가지고 있다. 왜냐하면 그들은 미지수의 문자기호에 하나의 값만이 한번에 치환되는 그러한 표현의 값만 알고 있기 때문이다(예, $x+5=5$ 에서 x는 상수값). 그들은 변수들의 값이 변한다는 그러한 관계를 이해하는데 어려움이 있다. 다른 공통적인 잘못된 생각은 다른 문자는 다른 값을 갖는다는 생각이다(Wagner & Parker, 1993). 심지어 학생들은 미지수가 어떠한 문자로 사용될 수 있다는 것을 믿음에도 불구하고 그 미지수는 어떠한 다른 방정식의 해로 바뀔 수 있다는 것을 믿지 않는다(Wagner, 1981). 따라서, 변수의 개념을 실제 우리 현실 속에서 끄집어내는 쉬운 예로써 시작하여 다시 그 개념을 현실 속에서 사용할 수 있게 하는 Freudenthal의 수학화 이론을 사용하였을 때, 학생들은 수학화를 어떻게 이루어가는지, 그 과정에서 정의적 측면에 변화가 있는지, 그리고 배운 내용을 실생활에 적용할 수 있는지를 조사하였다.

B. 연구과제

1. 문자와 식에서 변수를 학습할 때 학생은 어떻게 수학화를 이루어 나가는가?
2. 문자와 식에서 변수를 학습할 때 수학화는 학생의 정의적 측면에서 어떤 역할을 하는가?
3. 학생들은 학습한 내용을 실생활에서 어느 정도 활용하는가?

C. 연구의 제한점

1. 연구도구로서의 제한점

연구자가 연구목적에 따라 Freudenthal의 수학화 이론을 바탕으로 연구도구를 구성하였으나, 이것은 단지 4차시에 걸친 단기간의 1차적인 수학화에 대한 연구이기 때문에, 계속적인 수학화가 이루어지지 못해 좀 더 높은 수준의 수학화에 도달하지 못한 제한이 있다.

2. 연구의 제한점

2명의 학생들을 대상으로 하는 질적 연구방법이므로, 연구결과의 일반화에는 제한점이 따른다. 연구목적이 학생이 수학화를 이루어나가고 있는 하나의 현상을 Freudenthal의 이론을 바탕으로 심층적으로 파악하는 것이므로 일반화하기보다는 개개의 학습과정을 이해하는 것에 초점을 둔다.

Ⅱ. 본 론

A. Freudenthal의 수학화 학습-지도론

Freudenthal에 따르면 수학은 실제적인 문제상황으로부터 그 정리수단으로 출발하여 점진적 수학화 과정을 거쳐 구성된 실제적 지식이어야 하므로 학교수학은 학생들에게 현실적인 문맥으로부터 출발하여야 하며, 그에 대한 학생들의 실제적인 정신활동인 비형식적인 상황적 지식으로 시작하여 재구성되어 가는 상식으로 경험되어야 하고, 학생들의 상호작용을 통한 반성적 사고를 거치면서 자율적인, 실제적인 정신활동이 되어야 한다고 한다.

Freudenthal의 이러한 입장은 기존의 수학교육을 '반교수학적 전도'라 규정하고 그에 대한 대안으로 현상의 정리수단으로서의 수학과 '실행하는 수학'의 경험, mental object의 구성과 그 점진적인 형식화, 수학 학습과정의 관찰과 수준의 비약을 통한 수학화 경험을 골격으로 하는 재발명 방법을 제시하고 있다. 그리고 그것을 실현하기 위한 기초연구로서 '수학적 구조의 교수학적 현상학'을 제시하고 있다. 이러한 Freudenthal의 수학화 학습-지도론의 해명은 그가 주장하고 있는 수학의 본질과 인식에 대한 철학적 입장 및 그를 바탕으로 한 활동주의 수학교육관과 수학 교수학적 현상학에 대한

분석적 고찰을 전제로 한다(우정호, 2000).

1. 수학관

수학관은 교육관과 더불어 수학교육의 방향을 결정한다. Freudenthal의 입장에서 수학은 절대적으로 확실한 객관적으로 존재하는 완전한 지식체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 된다는 전통적인 Platon적인 관념을 수용하지 않는 것으로 현실로부터 출발하여 현상을 정리하는 인지적 수단을 찾아 확실성을 추구하는 활동으로 보고, 수학을 상식으로부터 출발하여 내용과 형식의 교대작용을 거치면서 점진적으로 형식화되어 가는 인간의 활동으로 보는 입장이다.

Freudenthal의 수학을 기본적인 직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어 가는 것으로 보는 직관주의 수리철학적 입장은 Brouwer의 직관주의 수리철학의 영향을 받은 것으로 그의 수학화 학습-지도론의 기초가 되고 있다.

Freudenthal은 수학을 결과적 지식체계로서의 수학, 즉 기성 수학과 활동주의 수학, 곧 실행되는 수학으로 구분하였는데, 이는 일찍이 지식과 지식의 기록을 구분한 Dewey에게서 찾아볼 수 있고 Bruner에 의해서 강조되었다. 이는 체계적인 연역과 과학으로서의 수학과 발생상태의 수학을 구분한 Polya의 생각과 같으며, 이러한 Freudenthal의 생각은 그의 활동주의 수학교육론의 바탕이 된다.

Freudenthal은 실행되는 수학의 주요한 수학적 활동을 수학화 활동으로 보고 있는데, 여기서 수학화란 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며, 현실상황이든 수학적 상황이든 현상 가운데에서 그 정리수단인 본질을 찾는 활동, 즉 현상에 질서를 부여하는 활동을 말한다. 이러한 수학적 활동의 원동력은 사고수준의 비약을 위한 전제가 되는 반성적 사고태도이고, 그는 실행된 수학을 반성하는 것은 중요한 수학적 태도로 보고 있다.

Freudenthal은 수학적 활동을 수학화 활동과 그 의식성의 현재화 활동으로 보며, '현상 → 정리수단인 본질 → 현상 → 보다 높은 차원의 본질'과 같이 교대가 일어나면서 인식수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정으로 본다. 이러한 그의 생각은 근본적으로 van Hiele의 수학 학습수준 이론과 일치하는 것이지만, 조정된 행동으로부터의 반영적 추상화에 의한 수학적 조작의 발생이 내용과 형식의 교대를 통한 점진적인 형식화의 경향을 내포한다는 Piaget의 주장과 일치한다.

수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작하지만, 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화, 곧 수직적 수학화가 시작되며, 처음에는 국소적으로 점차적으로 공리적 이론체계의 구성으로 총체적인 수학화가 시도된다. 그리고 수학을 재조직하는 것도 주요한 수학적 활동으로 보고 있다.

Freudenthal은 사고는 단지 정신적으로 계속되는 행동일 뿐이며, 이론은 확장된 행동이라고 하여, Piaget가 주장하고 있는 수학적 사고의 조작적 특성과 그 발달의 매커니즘에 대해서는 같은 입장을 취하고 있으나 수학적 개념 발달에 대한 Piaget의 연구는 받아들이지 않고 있다.

Freudenthal은 수학을 감정이입이 중요한 역할을 하는 활동으로 간주하고 현대수학의 특징인 엄밀한 표현과 형식화는 일상언어로부터 점진적으로 이루어져 왔으며, 현대수학의 전형적인 개념구성 패

턴인 외연적 추상화, 공리적 추상화와 암묵적 정의 역시 일상적인 개념구성 방법이 형식화된 것으로 보고 있다.

Freudenthal에 의하면 수학이란 확실성을 추구해 가는 정신적 활동으로, 상식에 바탕을 두고 더 높은 차원으로 상식화되면서 발전해 나아가는 과정으로, 그러한 활동은 내용과 관계가 풍부한 구조에서 빈약한 구조로 발달해 나아가나 수학의 연역적 체계는 그와 반대로 일반적으로 추상적인 빈약한 구조에서 특수한 풍부한 구조로 위계적으로 전개된다. 이러한 그의 입장은 실행하는 수학, 학습자의 현실 속에서 수학화를 통한 수학의 재창조 경험만이 수학을 학습자의 인격으로 통합하는 길이요, 수학적 안목과 사고방법을 기르고 수학을 응용하는 힘과 태도를 길러줄 수 있다고 보는 것이다.

2. 수학교육 이념

Freudenthal은 자신의 수학교육에 대한 논의는 인간과 사회의 상에 바탕을 둔 교육철학이라고 보면서, 교육의 의미 가운데 도야적 의미를 강조한다. 학생들은 선택의 자유와 자신들의 책임 있는 활동을 통한, 그가 받은 교육을 통합한 방식의 교양인이 되는 것이며, 그러한 선택과 그에 대한 책임을 지는 국소적인 것으로부터 시작되어야 한다고 한다.

결국 Freudenthal은 여러 가지 수학의 방법이 처음에는 무의식적으로 실행된 다음 의식화되어 명확히 드러나도록 지도해야 하며, 세세하게 다듬어진 증명을 제시하기보다 대략적인 증명을 발명하여 개선해 가도록 지도하여야 한다고 하는데, Freudenthal에게 수학은 자기 자신 및 다른 사람의 실제적·정신적인 수학적 활동을 반성하는 것이므로, 그에게 수학교육의 그러한 목표는 결국 현상을 수학화하는 경험과 그 반성을 통해서 달성되는 것이다.

Freudenthal은 수학적 사고의 조작적 성격을 받아들이고 있으므로, 그에게 수학적 지식 자체는 조작이며 활동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 실행하는 것으로, 수학은 활동으로서 학습되지 않을 수 없는 것이기 때문에, 결국 수학을 재발명하게 하는 학습 지도방법이 요구되는 것이다. 도구적 지식으로서의 수학의 응용 가능성은 수학을 발견하고 응용하는 활동적 학습과정과 불가분의 관계에 있는 것이며, 그러한 능력과 태도의 육성은 그의 수학화 교육이 추구하는 주된 교육 목적이 된다.

Freudenthal의 수학교육 사상의 저변에는 다음과 같은 Dewey의 경험주의 교육사상이 흐르고 있다고 생각된다. 사고는 논리적으로 형식화된 기성의 지식을 흡수함으로써만 논리적이 된다고 본 전통적인 교육의 결과, 학생들은 교과의 형식적인 논리를 그대로 본떠 기억하게 됨으로써 그 자신의 생명력 있는 논리적 사고의 발달을 망쳐버리게 된다. 그 결과 공부에의 흥미의 상실, 지적인 적용의 혐오, 기억이나 약간의 이해를 동반하는 기계적인 처리과정에 의존하는 결과를 초래하게 된다. 그러나 기본적으로 인간은 반성적이고 진정으로 논리적인 활동에서의 경향과 추리를 하고 실험하고 검사하려는 욕구성향을 타고나며, 각 발달단계에서 그 자신의 논리를 가지고 사고한다. 생각을 품고, 대상이나 사건을 관찰하여 그것을 검증하여 결론을 이끌어 내고, 그것을 실행해 보아 확인하거나 수정의 필요성을 발견하거나 기각하게 된다. 이러한 면에서 아동의 사고는 지적인 특성을 가지며, 이는

교육적으로 매우 주요한 것이다. 문제는 논리적인 것을 교과의 기성 논리형식과 동일시하는 것이다. 지적인 교육의 진정한 문제점은 이러한 자연력을 전문가의 세련된 힘으로 갑작스럽게 변형하려는 데 있다. 심리적인 것과 논리적인 것은 서로 대립적인 것이 아니라, 같은 과정의 초기단계와 마지막 단계로서 연결되는 것이다. 학문적으로 조직된 교과의 관점에서 엄밀하게 논리적인 것은 전문가의 정신에 적합한 것이며, 그러한 능력에 도달하는 유일한 길은 학습자 자신의 현재의 수준에서 지적으로 주의 깊게 사고하도록 하는 것이다. 초보자가 숙련가가 멈춘 곳에서 출발할 수 있다고 생각하는 것은 불합리하다. 초보자는 자기 수준의 주의 깊은 검토와 그 나름의 일관성, 형식성을 갖는 추리를 할 수 있도록 해야 한다. 관찰, 착상, 검증이란 자연스럽고 자발적인 과정의 조정, 곧 진정으로 반성적인 사고과정은 논리적인 것이다.

Freudentahl은 수학교육의 근본 문제는 학습자에게 기성 수학체계를 그대로 가르치려는 데 있다고 보고, 수학적 활동의 본질을 분석하여 수학적 사고교육을 구현하는 방안에 대하여 논하고 있다. 실제로 발생되고 응용되는 상황의 수학을 학습과정에서 경험시키려고 하는 것이 Freudenthal의 일관된 생각이며, 결국 학교수학에서 현실과의 관계가 적재된 수학과 수학화 활동을 강조하게 된다. 이에 먼저 요청되는 것이 수학적 활동의 면밀한 분석이다. 그는 수학화 활동을 상대적 수준이 있는 불연속적인 과정으로 해석하고 수학의 학습 모델로 van Hieles의 학습 수준 이론을 들고 있는바, 이를 구현하기 위한 여러 가지 구체적인 수학적 사고수준의 분석은 그의 수학 교수학적 현상학의 주요한 목적이 된다. 따라서 Freudenthal에게 수학화의 전술과 전략이 교사가 체득해야 할 핵심적인 수학적인 사고습관이며, 그것을 발견하는 가장 강력한 방법은 자신이나 다른 사람의 학습과정을 관찰하고 분석하는 것이므로, 교사교육에서는 수학학습과정의 의식적 관찰과 분석을 강조해야 한다고 본다.

Freudenthal의 수학 교수학적 현상학을 다음과 같이 규정한다.

어떤 수학적 개념, 수학적 구조, 수학적 아이디어의 현상학이란, 그것이 그 조직수단이 되는 현상과 관련시켜 본질을 기술하는 것, 어떤 현상을 조직하기 위해서 그것이 창안되고 어디로 확장될 수 있는지, 그리고 그것이 이들 현상에 대하여 조직화의 한 수단으로 어떻게 작용하며, 그것은 이들 현상에 대하여 어떤 힘을 우리에게 부여하는가를 지적하는 것을 뜻한다. 만일 본질과 현상과의 이러한 관계에서 내가 교수학적 요소를 강조하면, 곧 그 관계가 학습-지도 과정에서 어떻게 획득되는가에 주목하면 나는 이러한 본질에 대한 교수학적 현상학에 대하여 말하고 있는 것이다(Freudenthal, H., 1983, pp. 28-29).

B. 연구대상

현재 서울의 모 학원에서 중학교 1학년 학생 2명을 대상으로 연구해 보았다.

1. 학생 A

이 학생은 학교성적이 중상위권으로 수학성적 또한 중상위권이다. 기초 실력은 있으나, 전체적으로

자신감이 부족한 학생이다. 수학의 가치를 잘 이해하지 못하고, 성취도가 높지는 않다.

2. 학생 B

이 학생은 학업성적과 수학성적이 모두 최하위인 학생이다. 전체적으로 공부를 하기 싫어하며, 공부 자체에 대해 상당한 거부감을 가지고 있어 자신감이라든가 성취감 또한 없다.

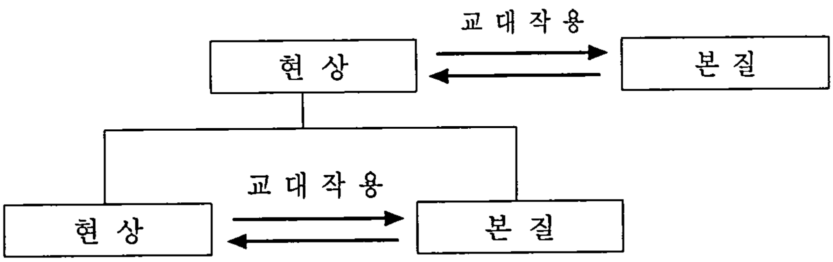
C. 연구절차

Freudenthal의 수학화의 개념을 도입해 그의 이론을 적용하여 변수에서 학생들의 수학화 과정을 연구하기 위해 연구도구를 작성하여 수업에 임한다. 이에 대수에서 변수의 개념을 설명함에 있어 '수학 7-가'의 'Ⅲ.문자와 식' 단원에서 연구도구를 만들어 실제 학생들에게 수업을 진행함으로써 나타나는 학생들의 수학화 과정을 연구하고, 학생들의 정의적 측면이 어떻게 바뀌며, 배운 내용을 실제 생활에서 얼마나 적용 할 수 있는지에 대해 알아본다. 자료수집은 2002년 5월 20일부터 23일까지 총 4차례에 걸친 연구수업으로 중학교 학생 2명을 대상으로 개별적인 면담으로 인한 면담자료와 수업중의 연구자의 관찰, 학생들의 기록 등을 통해서 이루어지고 Freudenthal의 수학화의 개념에 의해 이 연구결과를 분석하고 다시 학생들에게 배운 내용으로 하여금 문제 만들기에서 어떻게 적용하는지의 파악을 위하여 제공한 과제의 분석으로 이 연구의 결과를 분석한다.

D. 연구도구

1. 이론적 적용

수학화를 인간의 정신적 활동으로 보고, 수학적 사고 활동의 가장 본질적인 특성을 잇달은 재조직화로 파악하여 이것을 '수학화'라고 표현한다. 수학화란 '현상을 수학적 수단에 의해서 재조직하는 것'을 의미하며, 이 때 현상이라고 하는 것은 현실의 한 영역을 의미하기도 하고 수학 자체를 의미하기도 한다. 여기서 이 연구에 맞는 수학화에 대한 내용은 다음 그림과 같다.



<그림 1> 수학화의 구조과정

본 연구에서는 연구도구(총 4차시)를 통하여 학생들이 현상과 본질의 교대작용을 수시로 일으켜 결국 1차적인 수학화가 이루어지어 다시 현상으로 나아가는 1차적 수학화에 대해 알아보고자 하였으므로, 수학화의 적용은 우리의 현실 속에서 일어나는 어떠한 현상에 관심을 두고, 그 현상에서 일반적인 법칙을 찾아 그 법칙 속에서 변수 x의 개념을 도입하여 실제 사용되어지는 현실 속에서의 법칙에 변수 x의 개념을 사용하여 어떠한 식을 만들어 낼 수 있도록 한다. 이것은 처음으로 현상과 변수 x의 개념이 서로 교대작용을 일으키도록 하는 것이다. 현실 속에 변수 x의 개념을 사용하여 실제 식을 사용하는데 있어 곱셈기호와 나눗셈 기호의 생략으로 식을 보다 세련되고 간단하게 사용할 수 있는 방법을 익히게 하여 학생들이 변수 x를 사용한 식에 대해 좀 더 익숙해 질 수 있도록 하여 문자를 어떠한 변수로 사용할 수 있는 단계로 안내한다. 이러한 과정에서 현상과 본질인 변수 x가 서로 계속하여 교대작용을 일으키게 되고, 여기서 변수라는 개념을 완전히 파악한 후면, 그 변수에 우리가 구하고자 하는 수치를 대입하여 우리가 원하는 값을 구할 수 있도록 하여 학생들이 이러한 개념들을 완전히 파악 한 후에 실제 우리의 현실 속에서 변수 x의 개념을 도입하여 문제를 만들어 봄으로써 어떠한 현상을 재조직화 하여 그러한 수학화의 개념을 적용하는지의 여부를 확인해 볼 수 있다. 그리하여, 현실적 경험 혹은 수학적 경험을 통한 즉, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준상승이 이루어지는 그러한 수학화가 이루어지는 것을 확인 할 수 있었다.

2. 연구도구

연구도구는 '<부록 2> 연구도구'를 참고(강옥기 외 2명, 2002).

3. 면담지

면담지는 학생들의 정의적 측면에 대한 변화를 분석해 보고자 자아개념, 이해, 태도의 세 가지로 분류하여 연구수업 전·후에 연구자와의 개인면담에 의한 기록과 관찰로 분석하여 보았다. '<부록 1> 면담지'를 참고(손병석, 2000)

E. 연구결과

변수에서 수학화에 의한 학생들의 학습과정을 연구한다. 이에 우리가 연구하고자 하는 연구과제들을 수학화에 맞게 적용하여 실험을 하고자 했던 바, 학생들이 어떻게 수학화를 이루어 나가며, 학생들의 정의적 측면이 어떻게 변화하며, 과연 배운 내용을 어떻게 실생활에서 확인, 적용하는지에 대한 연구결과를 다음과 같이 분석해 보았다.

1. 문자와 식에서 변수를 학습할 때 학생은 어떻게 수학화를 이루어 나가는가?

이 과제에 대한 분석은 연구자의 관찰과 녹음테이프 등에 나타난 학생들의 반응으로 파악해 보았

다. 학생들이 수학화를 해 나가는 과정을 학생들이 수업을 하면서 보여준 질문과 대답을 연구자가 수업을 진행하면서 관찰한 내용과 녹음테이프의 녹음내용과 더불어 확인하여 공간제약 상 그 일부분을 발췌하여 학생들이 어떻게 수학화를 이루어 나가는지에 대한 설명을 해 보기로 한다.

- 생략 -

연구자 : 앞의 예에서 우리는 문자 x에 우리가 원하는 날짜를 집어넣어 계산하면 우리가 원하는 적립금을 구할 수 있다는 것을 알게 되었습니다. 그랬을 때, 이렇게 우리가 원하는 숫자를 대입할 수 있는 그러한 문자를 우리는 '변수'라고 하고 이처럼 우리가 알게 모르게 사용하고 있다는 것을 확인 할 수 있었습니다.

학생B : 선생님! 그런데요, 그 많은 숫자를 어떻게 다 대입해 봐서 답을 구할 수 있나요?

연구자 : 우리가 모든 숫자를 다 대입하는 것은 아니에요. 단지 변수 x에 우리가 원하는 날짜라든가 개수 등의 수치를 대입하여 그 원하는 값을 언제든지 구할 수 있다는 얘기죠. 앞의 예 에서 만일 30일 후에는 불우이웃돕기 성금이 얼마가 나올까요? 그렇다면 그 문자식이 $50\times x$(원)이었으니 문자에 우리는 30이라는 수치만 대입하면 30일 후에는 돈 1,500원이 모인다는 사실을 알 수 있겠죠.

학생A : 그래서 얼마를 모아야 한다면 사람 수, 날짜, 돈의 액수로 해서 계산할 수 있겠네요?

연구자 : 흠, 그럼 학생A는 어떻게 계산 할 수 있을까요?

학생A : 정확히는 잘 모르겠는데요, 그냥 사람수를 x, 날짜를 y, 돈 액수를 z 이런 식으로 해서 계산 하면 될 것 같아요.

연구자 : 그래요, 좋은 생각이에요. 그 내용에 관해 과제를 내줄테니 나중 잘 정리해서 제출해 보도록 하세요.

→ 여기서 우리는 학생B의 질문은 문자 x가 변수라는 것을 제대로 파악하지 못해서 나온 질문임을 알 수 있다. 하지만 수학화라는 것은 그렇게 학생들의 수학적 사고 활동이 학생이 배우고자 하는 '변수'라는 본질에 다가가기 위한 첫 단계로 시작된 것임을 알 수 있다. 이러한 첫 단계로서는 실생활에서의 예를 들어 시작하여 보다 쉽게 수학화의 첫 단계로 들어가게 하는 것이 좋다.
결국 적립금의 액수가 결국 몇 일인지에 따라 즉, 일수가 변수 x로 변화하는 것을 학생들은 깨달았다. 실생활에서의 현상을 수학적 수단인 변수라는 개념, 즉 '변수'가 본질이 되어 수학화가 이루어지기 위한 첫 단계로 들어섰다고 볼 수 있다.

- 중간생략 -

연구자 : 자 그럼 이제는 어느 상점에서 10,000원짜리 물건을 a%할인된 가격으로 팔 때 그 가격을 구해보도록 하죠. 그럼 %에 대한 것은 백분율이라는 것을 모두 알고 있으니 10,000

원의 a%는 $10,000 \times a \times \frac{1}{100}$이므로 이것을 계산하면 $100 \times a$가 된다는 것이죠.

학생B : 그렇구나, 전 %만 나오면 항상 헛갈렸었는데...

학생A : 선생님 그런데 곱셈기호를 생략해야 한다고 하지 않았나요?

연구자 : 네 맞아요. 곱셈기호를 생략하면 식이 좀 더 간단해 진다고 배웠죠? 그래서 어떻게 쓰면 좋을까요?

학생B : $100a$ 요.

학생A : 선생님 그거 할인된 가격 아니에요?

연구자 : 학생A가 지적을 잘 해 주었어요. 문제에서 원하는 것은 할인되어 판매하는 가격을 원하고 있죠? 어떻게 하면 될까요? 자, 식으로 완성해보죠?

학생A : ($(10,000-100a)$원이 되겠죠. 그게 원래 가격이에요.

학생B : 우리 엄마가 그런 것은 계산 잘하시는 것 같던데... 저도 인제는 대형할인매점이나 세일기간에 이것 저것 계산을 할 수 있을 것 같아요. 그런데 아직 계산하는게 헷갈려요 선생님!

학생A : 난 이제 계산할 수 있을 것 같은데?

연구자 : 그래요. 차근차근 잘 생각하면 계산을 잘 할 수 있을 것이에요. 상점 앞을 지나가다가 사고 싶은 물건의 세일된 가격을 직접 계산도 해 보고 용돈액수하고도 맞춰보고 하는 것도 재미있을 것 같네요!

- 생략 -

→ 현실 속의 어떤 현상에서 출발하여 시작한 변수 x의 개념이 이제는 실제 물건값의 할인된 가격과 실제 물건값까지 구할 수 있는 단계로 넘어 왔다. 이는 현상에서 출발하여 수학적 본질이 현상과 서로 교대작용을 일으켜 이제는 다시 본질을 재조직하여 다시 현상으로 넘어 왔다고 볼 수 있다. 이것은 바로 '수학화'가 이루어졌다고 볼 수 있는 근거가 된다. 학생들은 현실적 경험을 통하여 문자가 변수라는 개념을 파악하고 문자가 들어간 식에서 수학적인 경험으로 곱셈기호와 나눗셈 기호의 생략으로 식이 보다 간단해진다는 것을 이해하게 되었다. 그 이후 자유자재로 문자를 사용한 즉, 본질인 변수를 사용한 식을 사용하여 우리의 현상을 수학적으로 표현할 수 있다는 것을 배웠다. 그리고 이 단계에서 발전하여 현상 속에서 변수의 개념을 끄집어 낼 수 있는 그러한 능력은 '<부록 3> 문제 만들어보기' 에서 확인 할 수 있을 것이다.

2. 문자와 식에서 변수를 학습할 때 수학화는 학생의 정의적 측면에서 어떤 역할을 하는가?

(1) 학생 A

연구수업 전	연구수업 후
1)수학학습에 대한 자아개념	
4. 수학은 항상 더 어려워져서 잘하지 못한다.	4. 수학을 잘해야 칭찬을 받을 수 있는데 난 수학을 그리 잘 하지는 못한다.
5. 자신 있는 문제도 있고 자신 없는 문제도 있다. 쉬운 문제도 있고 어려운 문제도 있어 서 자신이 별로 없다.	5. 쉬운 문제를 풀 때는 자신 있다.
9. 초등학교 때는 그렇지만 지금은 별로다.	9. 별로 소질이 없는 것 같다.
12. 쉬운 것도 있고 어려운 것도 있다.	12. 수학이 쉽지는 않지만 못할 것만 같지는 않다.
14. 배운 것이 쉽다면 잘 받을 수 있다.	14. 문제가 쉽게 나온다면 수학성적을 잘 받을 수 있을 것 같다.

연구수업 전	연구수업 후
2) 수학 학습에 대한 가치 이해	
3. 일상 생활을 살아가면서 수학을 활용할 일이 많기 때문에 중요하다.	3. 생활 속에서 수학을 많이 사용하기 때문에 중요하다고 생각한다.
6. 수학과 관련 없는 직업을 하는 사람이라도 기초적인 것은 배워야 한다.	6. 살아간다면 수학을 사용하기 때문에 누구나 배워야 한다.
8. 그럴 때도 있긴 하지만 노는 것이 다르기 때문에 항상 그렇진 않다.	8. 항상 사용하지는 않는다.
10. 살아가면 수학에 관련된 일이 많기 벌어지기 때문에 도움이 된다.	10. 생활 속에서 수학을 사용하기 때문에 도움이 된다고 생각한다.
15. 여러 일에 조금이라도 수학에 관련된 것이 있기 때문에 많이 있다.	15. 많이 있다고 생각한다.

연구수업 전	연구수업 후
3) 수학에 대한 태도	
1. 수학은 문제를 찾아 해결하기 때문에 재미있다.	1. 수학문제를 해결하고 나면 먼가 했다는 기분에 재미있다.
2. 사용할 때도 있고 사용 안 할 때도 있다. 이유는 없다.	2. 문제에 따라 여러 방법을 생각해 볼 때가 있다.
7. 다음에 또 같은 문제가 나올 수 있으므로 스스로 풀려고 한다.	7. 되도록 혼자 힘으로 풀어 보려고 한다.
11. 약간 지루하기 때문에 기다려지지 않는다.	11. 지루하지만 않다면 기다려볼 것도 같다.
13. 풀리지 않는 문제만 자꾸 생각나면 다른 문제들은 못 풀기 때문에 많이 생각하지 않는다.	13. 문제 하나로 오래 끌다보면 화가 나기 때문에 많이 생각하지는 않는다.

1) 수학학습에 대한 자아개념

수학학습에 대한 자아개념이 초등학교 때보다 조금은 무디어진 학생으로 파악된다. 초등학교 때는

자신감을 가지고 수학을 대하고 있었으나, 점점 어려워지는 수학에 점점 자신감을 상실하고 있는 것으로 보인다. 하지만, 연구수업 전의 모습과는 달리 연구수업 후에는 어느 정도 해 볼 수 있다는 자신감이 베어있는 대답으로 수학학습에 대한 자아개념을 조금은 회복하는 연구수업의 효과를 어느 정도 확인해 볼 수 있었다.

2) 수학학습에 대한 가치 이해

수학학습에 대한 가치 이해는 이미 학생이 어느 정도 파악하고 있는 상태이다. 단지 돈 계산만이 아닌 실생활에서 나름대로 수학의 가치를 이해하고 있는 학생으로 파악된다. 이 부분은 연구수업 전이나 후나 크게 달라진 모습은 보이지 않으나 이미 수학 학습에 대한 영향력이 실생활에 적용되고 있다는 것을 알고 있기 때문인 것으로 보인다.

3) 수학에 대한 태도

수학에 대한 태도는 긍정적인 부분을 많이 보이고 있다. 수학에 대해 많은 부분을 자신의 힘으로, 자신이 어느 정도 즐거워하면서 수학을 하고 있는 것으로 보인다. 하지만, 부분적으로 수학에 대해 공식이 많다거나 그 공식의 적용에 난이도가 높은 것은 답을 구하려고 그리 오래 노력하는 모습은 보이지 않고 단지 자신이 편한 개념 이해나 쉬운 문제풀이에만 관심을 보이는 부정적인 부분도 보이고 있다. 하지만 연구수업이 끝난 후에는 나름대로 이러한 수업이라면 수학수업시간이 기다려질지도 모른다는 수업방법에 대해 많은 관심을 보이고 있는 연구효과의 결과를 파악 할 수 있었다.

(2) 학생 B

연구수업 전	연구수업 후
1) 수학학습에 대한 자아개념	
4. 노력을 별로 안해서 수학을 잘 할 수 있다고 생각하지 않는다.	4. 노력을 하면 수학도 잘 할 수 있을 것 같 다.
5. 공식에 맞춰 하나하나 풀 때 맞으면 자신이 있다.	5. 공식에 적용해 풀어 풀리면 자신이 생기나 너무 복잡한 문제가 나오면 자신이 없다.
9. 어려운 문제는 정말 풀지 못해서 소질이 없는 것 같다.	9. 특별히 수학에 소질이 있는 것 같지는 않다.
12. 어려운 문제는 정말 풀지 못해서 수학은 어렵다.	12. 수학을 제대로 공부 안해서 아직 수학이 어렵고 그래서 수학이 어려운 것 같다.
14. 난 수학을 잘 하지 않아서 성적을 잘 받을 수 없을 것 같다.	14. 열심히만 한다면 수학 성적도 오를 것 같다.

연구수업 전	연구수업 후
2) 수학 학습에 대한 가치 이해	
3. 수학은 중요하다고 생각한다. 왜냐하면 좋은 대학을 가기 위해서인 것 같다. 6. 더하기, 빼기라도 배워야 일상생활에 도움이 될 것 같기 때문에 누구나 배워야 할 것 같다. 8. 수학을 하려고 놀진 않는다. 10. 사칙연산만 하면 되지 수학을 한다고 도움이 될 것 같진 않다. 15. 수학보다는 다른 과목이 생활 속에 있는것 같다. 국어. 영어 같은 과목들...	3. 생활 속에 많이 사용하기 때문에 수학을 모르면 안 될 것 같다. 6. 누구나 수학을 배워야 생활 속에서 기본적인 수학적 지식을 사용 할 것 같다. 8. 가끔은 수학적인 걸 사용하기도 하는 것 같다. 10. 수학을 잘 하면 아무래도 생활에 도움이 될 것 같다. 15. 수학도 생각보다는 많이 있는 것 같다.

연구수업 전	연구수업 후
3) 수학에 대한 태도	
1. 수학은 재미없다. 너무 복잡하다. 2. 배운 공식으로 안 되면 생각하지 않는다. 7. 시험문제 풀 때는 제외하고 거의 혼자 풀지 않는다. 11. 공부하기 싫어하기 때문에 기다려지지 않는다. 13. 조금은 생각한다.	1. 수학이 어렵고 복잡해서 아직은 재미없다. 2. 공식으로 안 될 때 조금은 생각한다. 7. 혼자 풀다가 안 풀리면 친구들에게 물어본다. 11. 수학 시간이 기다려지진 않는다. 13. 풀 수 있을 것 같으면 조금은 생각하나 하다가 안 풀리면 그냥 내버려둔다.

1) 수학학습에 대한 자아개념

수학학습에 대한 자아개념이 상당히 부족한 학생이다. 아주 쉬운 예제나 문제는 풀 수 있으나 조금이라도 어려운 문제가 나오면 손을 놓는 그러한 학생이다. 거기에 자신은 공부하기 싫어한다는 그러한 생각과 그로 인한 성적의 저조로 자신은 모든 공부에 소질이 없고 하기 싫다는 상태의 학생이다. 하지만, 연구수업 후에는 노력을 하면 수학도 잘 할 수 있을 것 같고 그렇게 열심히 하면 성적도 올릴 수 있다는 강한 의지를 보여 수학학습에 대한 자아개념에 대해 연구수업의 효과가 가장 크게 나타났다.

2) 수학학습에 대한 가치 이해

수학 학습에 대한 가치 이해는 잘못된 생각을 가지고 있었다. 단지 대학에 가기 위한 수학공부의 중요성을 말한다던가, 사칙연산만 하면 되는 수학을 왜 이리 공부하는지에 대해 의문점을 갖기도 했다. 생활 속에서 필요하다고는 하지만 그 유용성의 용도가 다른 의미로 그 수학 학습에 대한 가치를 파악하고 있었으나, 연구수업 후에는 생활 속에서의 수학에 대해 그 가치를 이해하며 그 중요성을 인식하는 것으로 보였으며, 자신 또한 많은 반성을 하는 것으로 파악되었다.

3) 수학에 대한 태도

수학에 대한 태도는 상당히 부정적인 상태에서 연구수업 후에도 크게 바뀌지는 않았다. 수학이 복잡해서 재미없는 과목으로 인식된 것이 연구수업 후에도 별다른 변화는 보이지 않았다. 수학학습에

대한 자아개념과 가치 이해가 크게 바뀐 모습을 보였지만, 여전히 공부라는 자체에 대한 태도인지, 수학에 대한 태도인지를 불분명하게 말하며 여전히 수학에 대한 태도는 상당히 부정적인 면을 많이 보이고 있다.

3. 학생들은 학습한 내용을 실생활에서 어느 정도 활용하는가?

이 과제는 학생들에게 문제 만들기를 과제로 내어 실생활에서 변수의 개념을 도입하여 문자를 이용한 식을 만들어 그 결과를 분석하여 학생들이 과연 배운 내용을 생활 속에서 얼마나 활용할 수 있는지의 여부를 파악해 보고자 한 것이다. 비록 학생들이 과제에서 많은 실수를 했지만, 주된 연구목적이 과연 생활 속에서 학생들이 문자를 사용한 식을 만들어 내어 이를 실생활에서 어느 정도 활용할 수 있는지에 대한 것이 주된 목적이었기 때문에 어느 정도는 묵과하고 결과를 파악해 보았다. 과제에 대한 부담감에 어려운 내용을 취급하지 않았고, 또한 쉬운 내용이라도 그 해답에는 틀린 부분이 있었으나, 결과적으로 학생들은 실제 많이 쓰이는 돈 계산법만이 아닌 어떠한 놀이, 분배, 계산 등등 여러 가지 현상에서 문자를 사용한 식을 만들어 내어 그 답을 찾아내려고 노력한 모습을 발견할 수 있었다. 이것은 보다 넓은 시야로 학생들이 생활 속에서 변수의 개념을 확인하려고 했던 것을 확인 할 수 있는 근거가 되었고, 이는 학생들이 배운 내용을 적극적으로 생활에서 활용하는 모습이라는 것을 발견 할 수 있었다. 이 내용은 '<부록 3> 문제 만들어보기' 에서 확인 해 볼 수 있다.

Ⅲ. 결 론

본 논문에서는 변수의 교수-학습에서 학생들의 수학화 과정을 연구해 보았다. 연구의 목적과 필요성은 생활 속에서 수학이 존재하는 것을 파악하지 못하고 단지 수학자체 내에서만 존재하는 내용들이라 생각하고 있는 학생들이 많으므로 Freudenthal의 수학화의 개념을 도입하여 학생들이 생활 속에서 수학을 찾고, 다시 수학적 내용을 다시 생활 속에서 이용할 수 있도록 하기 위함이다. 수학화의 개념을 따라 학생들에게 변수의 개념을 설명하고 수업을 했을 때, 학생들이 점차적으로 수학화가 이루어지며 결국 생활 속에서 변수가 들어간 즉, 문자와 식을 사용하여 실생활에서의 많은 현상들에 대해 수학적인 내용을 적용한 식을 만들어 낼 수 있었다. 실제 학생들이 어렵게 생각하는 변수의 개념을 보다 학생들이 쉽게 받아들이고 또한 그것을 이용하는 수학화가 이루어진 것이라 할 수 있다.

학생들이 변수의 개념을 수학적 기호와 맞물려 생각할 때의 어려움보다는 실생활에서의 변수의 개념이 들어간 어떠한 현상으로서 설명이 되어질 때 보다 쉽게 그 개념에 즉, 본질에 근접하는 이해를 하는 것을 파악하면서, 이러한 보다 쉬운 이해로 학생들은 결국 수학적 수단에 의해 현상과 본질의 교대작용에서 현상을 재조직화 하는데 성공하여 다시 어떤 높은 수준으로의 수학화에 도달하는 1차적인 수학화를 이루는데 성공하였다. 학생들은 실제 우리 생활 속에서의 예를 들은 설명이기 때문에 수업에 대해 관심이 높았고, 그러한 상태에서 수학적 수단이 단계적으로 개입되어 처음 시작된

생활속의 현상과 맞물려 변수의 개념에 대한 본질을 생각했기 때문에 수학 수업이 끝난 후에도 그러한 현상과 본질의 교대작용은 계속되어졌다는데 수학화의 의의가 있다. 이러한 지속적인 교대작용에 의해 결국 수학화가 성공적으로 일어났고 그러한 내용은 실생활에서까지 적용 가능하다는데 그 수학화의 의의를 둘 수 있겠다.

그러나, 짧은 차시(총 4차시)에 의한 단지 1차적인 수학화이기 때문에 좀 더 차시가 많은 연구수업을 했더라면 보다 좋은 결과를 유도해 낼 수도 있을 것이다. 더구나, 1차적인 수학화였기 때문에 연구결과에서 학생들의 정의적 측면의 변화에서 학생들의 수학에 대한 자아개념과 수학학습에 대한 가치 이해에 대한 변화는 긍정적으로 바뀌는 것을 확인해 볼 수 있었으나, 이러한 마음의 변화와는 달리 수학에 대한 태도는 쉽게 바뀌지 않았는데, 이는 짧은 수학화로 인한 연구의 제한일 수 있으므로 후속 연구가 필요하다. 즉, 좀 더 많은 시간을 할애한 수업의 연장으로 변수의 개념만이 아닌 일차방정식으로까지 발전하면, 학생들의 정의적 측면에서 수학학습에 대한 자아개념과 가치 이해만이 아닌 수학에 대한 태도 또한 바뀔 수 있을 것이며, 학생들은 수학학습에 있어서 긍정적인 마음으로, 긍정적인 태도로 수학에 임하여 생활 속에서의 수학을 즐기는 학생들이 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강옥기 외 2명 (2002). 중학교 수학 7-가, 두산

손병석 (2000). 문제 만들기를 적용한 수업이 수학과 학습력 신장에 미치는 효과에 대한 연구, 대구교육대학교 석사학위논문

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, **12(2)**, 107-118

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In S. Wagner & Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of a lgebra* **4**, pp.220-237, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. IN P.S. Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom: Hign school mathematics*, pp.119-139, New York; Macmillan.

Freudenthal, H. (1983). "The Implicit Philosophy of Mathematics History and Education", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Warszawa.

<부록 1> 면담지

면 담 지	
목 표	변수의 교수학습에서 학생들의 학습과정 연구중 학생들의 정의적 측면의 변화에 대해 파악해 보고자 다음과 같은 항목으로 면담을 하여 연구수업 전, 후의 정의적 측면에 대한 변화를 파악해 보고자 한다.
시 기	1차 : 연구수업 전 2차 : 연구수업 후
장 소	강의실 내
내 용	다음 각 항목을 학생들과 문답형으로 면담해 본다. 1. 수학은 재미있다. 2. 문제를 풀 때 여러 가지 방법을 생각한다. 3. 수학은 중요하다고 생각한다. 4. 나는 수학을 잘 해서 칭찬을 받을 수 있다. 5. 나는 수학문제를 풀 때 항상 자신이 있다. 6. 누구나 수학은 배워야 한다. 7. 수학 문제는 스스로 풀려고 노력한다. 8. 놀면서 TV를 보면서 수학을 사용한다. 9. 나는 수학에 소질이 있는 것 같다. 10. 수학을 잘 하면 생활에 도움이 많이 된다고 생각한다. 11. 나는 수학시간이 기다려진다. 12. 나는 수학이 쉽다. 13. 나는 수학문제가 잘 풀리지 않을 때 많이 생각한다. 14. 나는 수학성적을 잘 받을 수 있다. 15. 수학은 생활 속에 많이 있다.

<부록 2> 연구도구

학습내용	학습활동		유의 및 보충
	교사	학생	
문자를 사용한 식을 쓸 수 있다.	*다음의 예로써 변수 x의 개념에 대한 설명을 자세히 한다. 예) 하루에 50원씩 모아서 불우이웃돕기 성금으로 낸다고 하자. 그렇다면 모아지는 돈의 액수와 날짜와의 관계를 문자를 사용한 식으로 표현해 보자. 풀이)1일 $50\times1=50$원 2일 $50\times2=100$원 3일 $50\times3=150$원 ⋮ x일 $50\times x=50\times x$원 ⋮ $\therefore 50\times x$로 나타낼 수 있다. 문제) 다음을 문자를 사용한 식으로 나타내어라. 1) 400원짜리 과자 x개와 500원짜리 음료수 y개의 가격 2) 1시간에 10m를 가는 거북이가 x시간 동안 간거리	학생들은 하루 하루가 더해지는 것이 결국 변수 x로 표현되는 것을 확인하며 변수 x의 의미를 파악한다. 풀이과정을 보고 문자와 식의 표현하는 방법을 익히고 변수 x의 개념을 익힌다. 직접 풀어보고 나중 칠판을 보며 다시 한번 풀이과정을 익히며 변수 x의 사용을 파악한다.	학생들은 우리의 현실 속에서의 하나의 현상을 예로 일정한 법칙에서 변수 x의 개념을 받아들이게 되어 이것으로써 변수 x의 개념을 이해하고 익히게 됨을 잊지 않도록 한다.

<table>
<tr><th rowspan="2">학습내용</th><th colspan="2">학습활동</th><th rowspan="2">유의 및 보충</th></tr>
<tr><th>교사</th><th>학생</th></tr>
<tr><td>문자를 사용한 식을 보다 간단히 나타낼 수 있다(곱셈기호를 생략한 방법).</td><td>*문자를 사용한 식에서 수와 문자, 문자와 문자 사이의 곱셈기호 ×를 생략하여 간단히 나타낼 때, 다음과 같은 약속을 한다.

곱셈기호 ×의 생략
1. 수와 문자 사이의 곱에서 수는 문자 앞에 쓴다.
2. 1, -1과 문자와의 곱에서 1은 생략한다.
3. 문자와 문자 사이의 곱에서 각 문자는 보통 알파벳순으로 쓴다.
4. 같은 문자의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.
예) $-3\times x=-3x$
$0.1\times x\times(-x) = -0.1x^2$
$2\times(x+y) = 2(x+y)$

문제) 다음 식을 곱셈 기호 ×를 생략하여 나타내어라.
1) $a\times(-5)$
2) $x\times3\times y\times2\times y$
3) $(x+y)\times(-4)$</td><td>문자를 사용하는 식을 이해한 상태에서 곱셈기호를 생략하여 식을 간단히 하는 기본적인 방법을 배운다.

실제 우리가 쓰는 식에서 곱셈기호를 생략한 방법으로 식을 간단히 하는 방법을 배운 후 예로써 그 방법을 이해한 후 직접 문제를 풀어보고 보다 간단한 식이 나오는 것을 이해한다.</td><td>변수의 개념을 받아들이고 이해한 상태에서 수학적 기호와 뒤섞인 문자가 바로 변수였다는 것을 잊지 않도록 하고 곱셈기호의 생략으로 보다 식이 간단해지는 수학적 경험을 시켜준다.</td></tr>
</table>

학습내용	학습활동		유의 및 보충
	교사	학생	
문자를 사용한 식을 보다 간단히 나타낼 수 있다(나눗셈 기호를 쓰지 않는 방법).	*문자를 사용한 식에서 나눗셈기호 ÷를 쓰지 않고 나타낼 때, 다음과 같은 약속을 한다. *나눗셈 식을 쓰는 방법* 나눗셈 기호는 쓰지 않고 보통 분수의 꼴로 나타낸다. 예) $a \div 2 = a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ $x \div \frac{2}{3} = x \times \frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$ 문제) 다음을 기호 ×, ÷를 쓰지말고 나타내시오. 1) 국어는 a점, 수학은 b점일 때, 두 과목의 평균 점수 2) 300원짜리 아이스크림을 x개 사고 5000원을 냈을 때의 거스름돈 3) 1000원의 a%	곱셈의 생략과 더불어 나눗셈 기호를 생략하여 식을 간단히 하는 방법을 배운다. 실제 우리가 쓰는 식에서 나눗셈 기호를 생략한 방법으로 식을 간단히 하는 방법을 배우고 예로써 그 방법을 이해한 후 직접 문제를 풀어본다.	곱셈기호의 생략을 재확인하고, 나눗셈기호가 사용되는 문자 사용에 나눗셈기호를 생략하여 식을 간단히 할 수 있도록 한 후 곱셈기호와 나눗셈기호의 생략과 더불어 문자를 사용한 식을 보다 세련되게 재조직할 수 있도록 한다.

학습내용	학습활동		유의 및 보충
	교사	학생	
주어진 식의 문자에 수를 넣어 그 식의 값을 구할 수 있다.	*문자가 있는 식에서, 문자에 수를 넣는 것을 문자에 수를 대입한다고 하며, 문자에 수를 대입하여 얻는 값을 식의 값이라고 한다. 예) $a=-2$일 때, $-4a=-4\times a$ $=-4\times(-2)=8$ 문제)다음 식의 값을 구하여라. 1) $b=3$일 때, $-3b$의 값 2) $y=-4$일 때, $-\frac{1}{2}y^2$의 값 예) $a=2,\ b=-3$일 때, $5a^2-3b=5\times 2^2-3\times(-3)$ $=5\times 4+9=29$ 문제) $x=-2$, $y=4$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. 1) $-x+2y$ 2) $\frac{x^2+y^2}{x}$	우리가 사용하는 문자가 들어간 식에서 문자가 변수임을 상기하고 변수에 수치를 대입하여 그 식의 값을 구하는 방법을 배운다. 예로써 직접 식에 있는 문자에 수치를 대입하는 것을 배운 후에 식이 주어졌을 때 그 식의 값을 구할 수 있는 문제를 풀어본다.	문자가 들어간 식에 문자가 변수임을 상기시켜서 우리가 원하는 어떠한 수치를 대입했을 때 그 값을 구할 수 있는 것은 처음의 예에서 우리가 구하고자 했던 것과 관련시켜 학생들이 현실과 무관하지 않다는 것을 인식시키도록 한다.

학습내용	학습활동		유의 및 보충
	교사	학생	
학습 평가 및 이해 적용.	*자기학습평가 1. 저금통에는 500원짜리 동전 x개와 100원짜리 y개가 있다. 저금통에 들어있는 전체 금액을 문자를 사용한 식으로 나타내어라. 2. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{3}$일 때, $6a^2b$ 의 값을 구하여라. * 보충 학습 1. 100원짜리 사탕 a개를 샀을 때 지불한 금액을 문자를 사용한 식으로 간단히 나타내어라. 2. $3\times x\times(-2)\times x$를 간단히 나타내어라. 3. $a=1, b=2$일 때, $3a+b$의 값을 구하여라. * 발전학습 1. 어느 상점에서 정가가 10,000원인 옷을 a% 할인된 가격으로 판다면 얼마에 파는 것인지 문자를 사용한 식으로 간단히 나타내어라.	지금까지 배운 내용을 잘 생각하여, 변수의 개념과 더불어 곱셈기호와 나눗셈기호의 생략하는 방법을 상기하며 실제 우리가 사용하는 문자가 들어간 식과 실생활에서 찾을 수 있는 변수가 들어간 개념의 문제를 직접 풀어보고 자신이 배운 내용을 확인해 본 후에 보다 어려운 문제를 풀어보고 적용학습의 단계로 들어간다.	다음의 적용학습으로 학생들이 실생활에서 변수의 개념을 얼마나 적용하는지 파악해 보도록 한다. * 적용학습 실생활에서 문자와 식을 이용하여 우리가 원하고자 하는 수치를 원하는 문제를 5문제씩 만들어 제출하여라.

<부록 3> 문제 만들어 보기

*문제 만들어보기

여태까지 공부한 내용으로 문자가 들어간 식을 실생활에서 찾아 만들어 보시오.

(우신)중학교 1학년 (3)반 이 름 (학생A)

1. 식: 1시간에 x km를 가는 차가 있다. 8시간 후에는
몇 km를 가는가. 답: $8x$ km

2. 식: 하루에 만화책은 x 줄, 소설책은 y 줄씩 읽었다.
일주일 후에는 총 몇 줄을 읽게 되는가? 답: $7x+7y$

3. 식: 하나에 x원 하는 사과와 y원 하는 사과가
있다. 이 사과를 각각 3개씩 산다면 얼마를 내야 하는가.
답: $3x+3y$

4. 어느 문구점에서 연필이 하나에 x원 지우개는 y원
자는 c원 한다. 각각 5개씩 사려면 얼마를 내야 하나?
답: $5x+5y+5c$

5. 학생과 아이가 싸웠다.
학생은 x대 아이는 y대 때렸다
학생과 아이는 총 몇대를 때렸나?
답: $x+y$

•문제 만들어보기

여태까지 공부한 내용으로 문자가 들어간 식을 실생활에서 찾아 만들어 보시오.

(우신)중학교 1학년 (7)반 이 름 (학생B)

① 어느 PC 방에 1시간에 1000원씩
하는 곳이 있다. 친구들 x명이서 1시
간 동안 하기로 하였다. 친구들 x명
들은 얼마나 돈을 내야 하나?
답. $1000x$(원)
②어느 x명 가족이 기차를 타려고 한다
그 x명 가족은 1명당 10000원 짜리 기차표를
사려고 한다 x명 가족이 내야하는 돈은 얼마
인가? 답. $10000x$(원)
③어느 과수원에서 복숭아를 시간당 1사람이
50개의 복숭아를 딸 수 있다. 2시간 동안
x명이 몇개의 복숭아를 딸수 있나?
답. $100x$(개)
④어느 옷가게에서 한 옷당 10000원에
판다고 한다 만약 x개의 옷을 판다면
얼마가 되나? 답. $10000x$(원)
⑤어느 장난감 공장에서 장난감을 시간당 100
개씩 만든다고 한다 그럼 x 시간 동안
몇개씩 만들수 있나? $100x$(개)