韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 14집, 2002. 8. 103-134.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 14, Aug. 2002. 103-134.

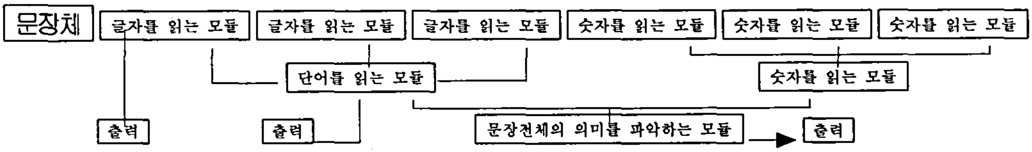
왜 그렇게 수학공부를 오래 하십니까?

변 요 한 (4차원 연구소)

1. 연구의 필요성과 목적

수학교육의 중요한 목표는 수학을 만인에게 평등하다는 것이다. 그런데 대부분의 사람들은 수학을 싫어하고 수학을 싫어하는 사람을 거의가 "나는 수학 실력이 없어서 노력해도 되지 않는다. 그래서 싫다." 라고 자신을 닫아 버리는 사람들이 많다. 그러한 사람 대다수가 수학 시간이 시작되면 가슴이 답답해지고 머리가 멍해진다고 한다. 이 이유는 '수학이 어렵다'는 말을 부모, 형제, 친구들로부터 자주 들어온 사람들이 많다. 심지어 수학자들까지도 우리 수학자는 약간 미친겁니다. (폴 호프만지음, 신현용 옮김) 라고 하니 수학을 잘하는 사람(즉, 수학 문제를 잘 푸는 사람)이 조금은 이상해 보인다고 합니다. 저는 이 의견에 찬동하면서도 다른 의견을 제시합니다.

첫째 ; 현장에서 수학을 가르치다 보면 원만한 학생들은 계산문제는 잘 푸는데 문장체가 되면 아주 간단한 문제라도 전혀 손을 못대며, 심지어 이것이 무엇을 묻는 문제인지 질문하는 학생과 그때부터 찍기 시작하는 학생들을 자주 봅니다. 이유를 알아보면 문장체를 싫어하는 것은 한마디로 생각하는 일이 귀찮기 때문입니다. 가끔 초등학교때는 수학을 잘했다고 하고, IQ가 좋아 보이는 학생들에게 머리로만 계산하지 말고 생각을 해보라고 하면 습관이 들어서인지 잘하지 않는 것을 볼 수 있었습니다. 그런 학생들 대다수가 고학년이 올라가면 수학과 친해지지 못하는 것을 발견했습니다. 이 이유를 살펴보니 대뇌 생리학에 의하면 대뇌속에는 신피질(新皮質)이라고 부르는 6층의 신경세포가 작은 원기둥 모양을 이루어 하나의 기능을 하는데, 이들 기능단위(모듈)들은



와 같이 상하관계를 이룬다. 그리하여, 모든 감각기관으로부터 받아들인 정보는 맨 아래단계 (단위)로 부터 정보가 분석되고 점차 위쪽으로 정보가 전달되어 맨 위단계에서 마지막으로 최종 판단을 내린다는 것이다. 두뇌훈련이 잘 된 사람은 문장 전체의 의미를 파악하는 최상위 단계의 기능까지 형성되어 있으나, 미숙한 학생은 문장 전체를 파악하는 기능이 잘 형성되어 있지 않기에 계산식을 세우지 못한 것이다.

요컨데 전체를 파악하는힘, 즉, 신피질의 상위 레벨 기능을 형성시키는 훈련을 쌓게 한다면, 효율적 수학 학습이 이루어지리라 본다. (참고: 꼬리에 꼬리를 무는수학)

둘째 ; 누구나 할 수 있는 수학 재미도 있는 수학을 나는 "수학을 도저히 못하겠다." 이런 학생중 공부도 못하고 IQ도 나쁜 학생이 많을 것이라는 생각이 잘못되었다는 것을 경험을 통해 알 수 있었다. 예로, 현재 서울대 ○○과 수석을 차지하고 있는 ○○○양의 경우 초등학교 6학년때 본인과 만나 속진과 심화를 하여 중1때 같은 층의 학생들을 크게 앞질렀고, 3학년 선배들이 과학고 준비반(보통 15명 정도 구성, 그해 100% 특수고 입학) 학생들과 겨루어도 손색이 없었다. 매년 실력이 급상승하고 있다는 것을 여러가지 자료(학교, 전국대회 등)를 통해 서로 증명이 된 학생이었다.

그런데 같은 동년배가 된 중3때, 객관적 실력으로는 전국 최고라고 할 수 있는(이유; 같은해 그 학생보다 못하다고 평가한 학생이 교육부 장관을 거쳐 KMO, 아시아 세계(IMO)금상을 수상한 박세용) ○○학생은 전국대회 출전 자격에서 조차 나갈 수 없었다. 본인은 그 학생이 잘된 공부 습관으로 과학고 수석 서울대에 진학하여 열심히 만족하는 모습에 만족하고 수학에 대해 급격히 멀어지는 모습을 보면서 왜 일까? 반문해 보니 너무 잘하려는 부담감과 여학생으로 오는 자신감의 부족이었다.

셋째 : 자신감이란 1. 관심을 줘야 한다. 그러면 집중력이 생긴다. 내가 다시 맡은 반 중에 수학성적 40점 미만, 문제아 반이었다. 이 학생들도 공부는 하고 싶은데 공부하는 법, 자기를 제어하는 법을 몰라 힘들어 하는 것을 볼 수 있었다. 그래서 그런 학생들이 많이 본듯한 영화 '친구'를 유오성씨가 한 대사를 해 주었더니 주위가 환기되었다.

"나에게는 삼촌 5명이 있었다. 내가 가출했다가 돌아오니 야단을 친 사람이 한 분도 없었다. 만약 그때 야단을 친 분이 한명이라도 있었다면 지금 이모습(깡패)이 아닐 것인데!!!!..." 모든 학생들이 공감했고, 본인들도 공부가 하고 싶다고 했다.

2. 재미있어야 한다. 그러면 스스로 하고 집중력도 생긴다. "인간은 생각하는 갈대"라는 명언으로 유명한 명상록「팡세」의 저자 파스칼은 서른 아홉이라는 나이로 일찍 세상을 떠난 수학자이다. 그는 수학이라는 것을 모르는 어린 시적에 세모꼴의 색종이를 이리저리 오리는 놀이를 하다가 문득 세 꼭지각이 한 점에서 만나면 직선(=2직각)을 이룬다는 것을 발견했다. 새 사실을 알아냈다는 기쁨과 스스로 이런 일을 해낼 수 있다는 자신감 때문에 계속 수학을 연구한 결과 역사에 남을 여러 가지 훌륭한 업적을 세웠다. 현장에서 직접 학생들과 부딪히다보면, 정말 이것만 알려주면 되는데, 학생들이 재미없을 것 같아 답만 유도해 주는 선생님들이 많다. 그런, 사실 이러한 경우가 학생들이 수학에 흥미를 잃게하라는 것을 많은 자료와 경험에서 볼 수 있었다. 「하나를 알면 열을 알 수 있는 것, 고기를 잡아 주는 것이 아니라 잡도록 해줄 때 」학생들은 재미있어하고 스스로 하는법을 체득할 수 있었다.「오늘 하나만 확실히 알자」할 때 모두 "예"라고 긍정할 수 있을 때, 자심감은 늘어난다.

3. 수학은 꼬리에 꼬리에 물게하라. 그러면 자신감이 생긴다. 수학이 어렵다고 느끼는 것은 무엇보

다도 각 단원의 '계단식' 체계 때문이다. 차곡차곡 지식을 쌓아 올려가는 학문이기 때문에 도중에서 한 부분만 빠트리면 반드시 막히게 되어있다. 아무리 수학에 소질이 있는 사람도 단원마다의 학습 순서를 무시하면 단번에 막히고 만다. 2002년 한해를 뜨겁게 했던 '2002 FIFA'우리 온 국민들에게 자부심과 하면된다는 마음을 심어주었던 우리 축구팀과 히딩크 감독. 특히 놀라웠던 전적을 보였던, 넣어야 할 때 공격을 보장하고 자신들의 미안한 부분을 힘껏 노력하게끔한 부분을 볼 때, 체육과 음악등은 동물적 감각과 소질이 있어야 하지 않나보다.

대음악가 바흐(J.S Bachi ; 1685~1750)는 음악가 가문으로 유명하다. 즉, 천부적인 재능이 필요없이는 수준급 운동선수가 되기가 쉽지않다. 하지만 수학은 다르다. 국어를 제대로 할 정도의 머리가 있는 사람이라면 논리중심의 학문이며, 실제로 대뇌 생리학에 의하여 논리와 수학은 같은 뇌부분이 지배하고 있다. 가장 기본적인 사항을 가지고 꼬리에 꼬리를 물어보아라 '두드리라 그러면 열릴 것이다'

결론적으로 왜? 수학공부를 그렇게 오래 하는지 모르겠다.

초등학교 4학년 학생을 본인의 교수법으로 1년을 하니 초등학생대상 경시대회 본대회 금상을 받았고, 1년 6개월 후에는 대상을 받았다. 그리고 지금은 각 종 전국 경시대회와 도 영재센터를 걸쳐 영재학교에 합격까지 하였다. 이 학생의 IQ(지능)은 120에서 얼마 넘지않은 것으로 알고 있다. 나는 학생들을 지도할 때, 두 부류로 먼저 나눈다. 학년을 심화 시킬것인가? 속진 대상인가? 물론 속진 대상에는 심화과정이 포함된다. 그러면서, 학생들에게 중2까지의 실력과 집중력, 조화력만 있으면 세계 경시도 정복할 수 있다고 가르친다. 실제로 만 18년 동안 현장에서 직접 지도하면서, 많은 실적을 내어 증명 할 수 있었다.(실적참고) 사실 고2, 고3 과정은 15일 이면 충분하다는 것을 경험한 많은 학생들이 알고 있다. 내가 하는 방법은 사고력의 효율을 증대시키는 방법이다. 수학 문제가 어려울수록 기본에 충실하라고 가르친다. 그리고 공식은 외우는 것이 아니라 공식을 유도하는 과정을 충분히 가르치게하고, 수업시간에 딴정신을 파는 것을 용납지 않는다. 생활에 접근된 이야기에서 수학을 해당 문제가 만들어진 이유는 기본바탕에서 쪼개어 가서 가장 기본적인것만 알고 있어도 할 수 있게 추리력을 갖추게하고, 그것이 어떻게 발전해 가는지 연상작용으로 보여줌으로써 기억력을 오래 갈 수 있게 유도하고, 반드시 수업시간에 한 내용을 보고, 듣고, 적게함으로 다른 생각을 못하게끔 한다. 그러면서 복습에 예습 스스로 풀게 될 수 있었다. 또한, 수학 미진아가 수학 천재가 될 수 있었다.

이렇게 하니 좋았다.

본인이 지금까지 경험해 보고 시도하여 이렇게 하니 좋았다 하는 것을 지면상 다할 수 없고 재미있는 계산과 도형쪽만 보이려고 한다. 나중에 다른 영역 및 자세히 보일 수 있는 기회가 있었으면 한다.

1. 계산빨리하기// 검산하기

덧셈 1) 일의 자리의 합이 10이 넘을 때

① 차의 값이 다를 때 84+57 = (90-6)+(60-3) = 150-9 = 141

② 보수구구 활용법 57+26 = (6+2)×10+10-(3+4) = 83

③ 세로셈하기 55+29 = 79 ← (50+29)

$$\begin{array}{r} 79 \\ +\ 5 \\ \hline 84 \end{array}$$

[검산법③]

55+29	=	84
5+5+2+9	=	8+4 (가감구법)
5+4+1+2+9	=	8+1+3
9+3+9	=	9+3
3	=	3

[속해] 일의자리 합이 10이 넘을 때「앞에 십자리 수에 1을 더하고, 뒤에 십자리를 더하고, 앞· 뒤 일의 자리수에 일의 자리만 읽는다.」

79+48 = (7+1+4)+(9+8)
= 127

뺄셈 같은 수로 합차할 때 「공통차에 나머지 끼리 합」

55-38 = (40+14)-(40-2)
= 16

곱셈 ① 38×2 = (40-2)×2 = 76

② 96×97 = (96-3)×100+(4×3) = 9300+12 = 9312

③ 98×135 = (100-2)×(100+35) = (98+35) = (35-2)×100+(35×(-2)) =13230

나눗셈 ① 1085÷35 = 2170÷70 = 35×2

217÷7 = 31

＊ 일의자리에 5가 있을 때 피젯수와 제수의 2배

지수법칙

1) 일의자리가 5일 때 $45^2 = 4\times(4+1)+(5\times5) = 2025$

2) 50에 가까운 수 (일의 자리가 5가 아닌수)

$$46^2 = \{(50\div2)-4\times100\}+(-4)^2 = \underline{(25-4)} \quad \underline{4^2}$$

$$21 \qquad 16$$

$$2116$$

가까운 수의 반에 모자(남는)수를 빼고(더하고)모자(남는) 수의 제곱

3) 445^2 ?

$$44\times45 = \underline{1950}+30 = 1980 \quad 25$$

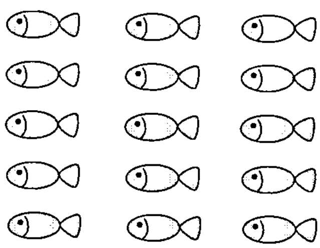
$$\downarrow \qquad = 1\ 9\ 8\ 0\ 2\ 5$$

$$\{(456)\div2\times100\}$$

2. 도 형

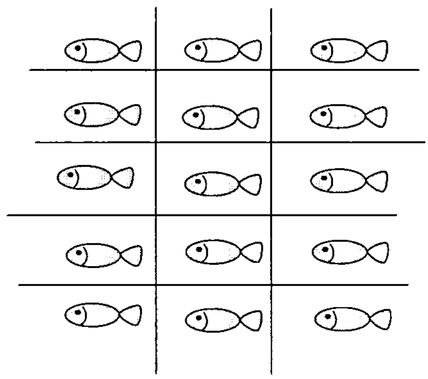
문제 1	바둑에도 수학이 있다.	**step1 평행선**

아람이네 가족은 바닷가로 여행을 갔다.
여행 중 바다 양어장을 들렀는데
오른쪽 그림과 같이 고기 15마리가 있어
막대 5개로 한 마리 씩 가두려고 한다.
어떤 방법으로 하면 되나요?



답 : 평행선 정리이다.

막대기는 6개뿐 15칸 바둑판을 만들면 된다.



★$_1$ 평행선 작도

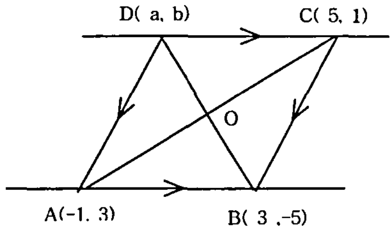
ex) 직선 l 과 직선 밖의 한 점 P가 주어졌을 때, 점 P를 지나고, 직선 l 에 평행한 직선을 작도하여라.

CIA착상 1) 평행사변형 정의 : □ABCD에서 AB∥CD, AE∥BC (마주보는 (대변)) 이다.

정리) ① ∠A=∠C, ∠B=∠D

② $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{OD}=\overline{OB}$

③ $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{DC}=\overline{AB}$



2) 평행사변형 꼭지점 구하기 : 평행사변형 ABCD에서 각 꼭지점을 A(-1,3), B(3,-5), C(5,1), D(a,b) 라 할 때, D(a,b)를 구하라.

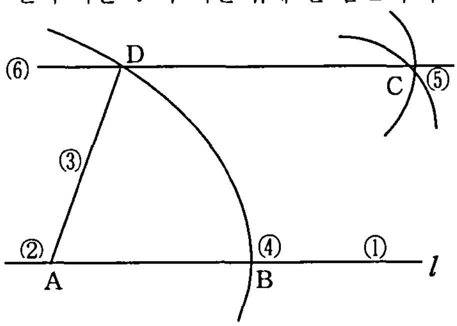
속해) (a,b)-(-1,3)=(5,1)-(3,-5)

(a-(-1), b-3)=(5-3, 1-(-5) ←착상 $\overline{AD}$∥ $\overline{BC}$ 이므로,

(a+1, b-3)=(2,0) $\boxed{D-A=C-B}$

∴ a=1, b=9

작도 1) 다음과 같이 직선 l 과 직선 밖에 한 점 D가 주어졌다고 하자.



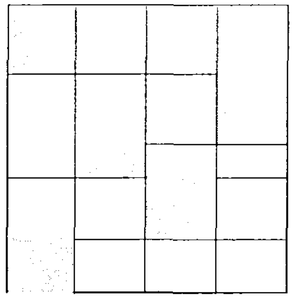
2) 직선 l 위에 임의의 ②와 같이 한 점 A를 잡아 ③과 같이 $\overline{AD}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리고, 이 원이 직선 l과 만나는 점을 ④와 같이 B라 하자.

3) ⑤와 같이 점 B와 D를 중심으로 하고, $\overline{AD}$ 를 반지름으로 하는 두 개의 원을 그려, 두 원이 만나는 점을 ⑤와 같이 C라 하자.

4) ⑥와 같이 점 D와 C를 지나는 직선 그리면, 이 직선이 l 에 평행선이 된다.

문제	평행선	step2 도형

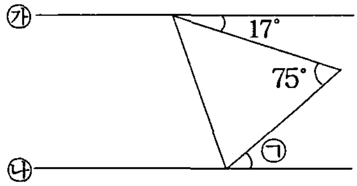
모든 가로선은 각기 평행하고, 모든 세로선은 같은 폭으로 평행하며, 모든 각이 직각이라면, 검은 부분의 면적은 전체 면적의 얼마나 될까?



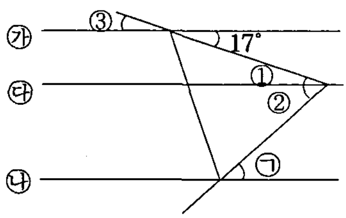
[풀이] 검은 부분을 전부 오른쪽으로 옮겨 보아라. $\frac{1}{4}$

문제	평행선	step3 초등 4년 step 2-8번

오른쪽 그림과 같이 두 직선 ㉮, ㉯가 서로 평행일 때, 각 ㉠의 크기는 몇 도인가?

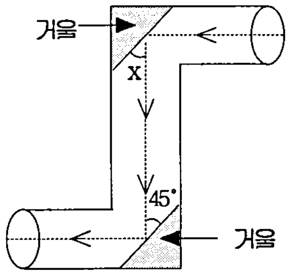


[풀이] 오른쪽 그림과 같이 직선 가, 나, 다가 평행이 되도록 직선 다를 그으면,
③=17° 이고, 직선 ㉮와 ㉰는 평행이므로,
①=③이다.
따라서, ①=17° 이고, 이와 유사한 방법으로
②=㉠이다.
그런데, ①+②=75° 이므로,
㉠=②=75° -17° =58°

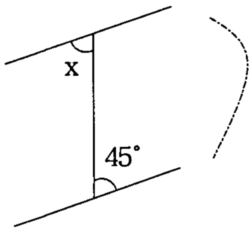


문제	평행선	step4 4차원 5년 생활수학

잠망경에서 두 거울은 서로 평행하게 고정되어 있다. 오른쪽 그림에서 ∠x의 크기를 구하시오.



[풀이]



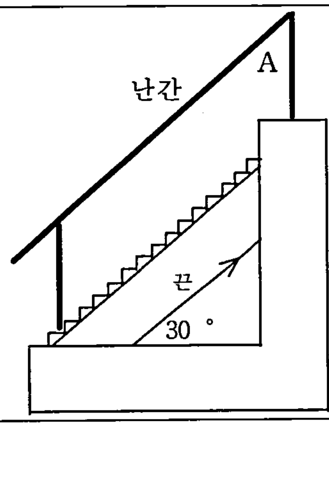
∴ $x=45^\circ$

문제	평행선	step5 4차원 6년 생활수학

오른쪽 그림처럼 무대로 이르는 계단이 세워져 있다.

(1) 층계가 바닥과 평행하다면 층계와 끈이 이루는 각의 크기는?

(2) 난간이 끈과 평행하다면 ∠A의 크기는?

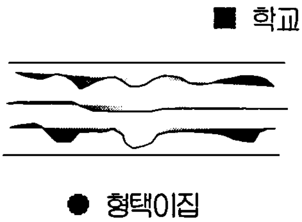


[풀이] 1) 30°

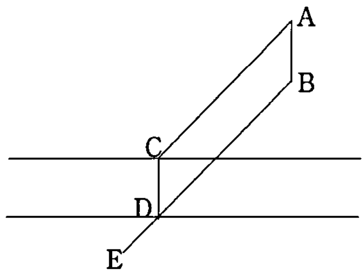
2) 60°

문제 평행선 **step6 4차원 중1 생활수학**

오른쪽 그림처럼 형택이는 학교와 집이 강을 가로 질러 사이에 있다. 장마로 인해 가교가 유실되어 강기슭과 수직되게 다리 하나를 놓으려고 합니다.
강기슭의 어느 위치를 선택하여 다리를 놓아야 학교와 형택이 집 사이의 거리(다리를 건너서 가는 거리)가 가장 짧을까요?

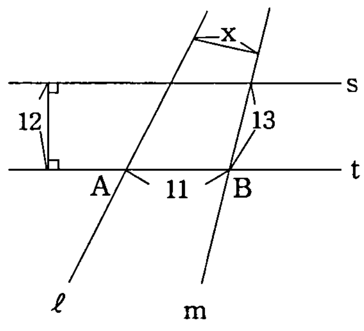


[풀이] A에서 강폭만큼 내려
B와 E가 직선되는 곳 강기슭을 D
A와 윗쪽 강기슭까지 직선되는 거리를 C라하자.
ABCD는 평행사변형



문제 평행선 **step7 4차원 중1 2단계**

네 직선 l, m, s, t에 대하여 $\ell /\!/ m$, $s /\!/ t$일 때,
x의 길이를 구하여라.



[풀이] $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 12 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times x$ $\therefore x = \frac{132}{13}$

문제	개념이 완벽해야 고지를 넘을 수 있다.	step8

같은 평면에서 '한 직선에 수직인 직선과 수직이 아닌 직선은 반드시 만난다' 증명하시오.

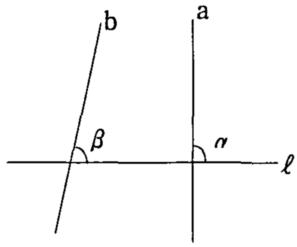
CIA착상 귀납법으로 증명하자. ← 거꾸로 풀이법

[풀이] 주어진 한 직선을 ℓ이라고 하고, 이 직선과 수직인 직선을 a, 수직이 아닌 직선을 b라 하자. 두 직선 a, b 라 만나지 않는다라고 가정하면, 즉, a∥b라고 가정하면, 그림에서 $\angle\alpha=\angle\beta$이다.

또, $\ell \perp a$이므로, $\angle\beta=90°$,$\angle\alpha=90°$ $\therefore$ $b\perp\ell$

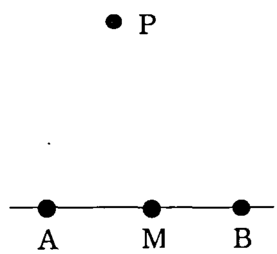
이것은 직선 b가 직선 ℓ에 수직이 아니라는 원래의 가정에 모순이다.

따라서, 두 직선 a, b는 반드시 만난다.



문제	체바의 정리(작도)	step9 증명/생활중급

그림의 점 M은 선분 AB의 중점이다.
이밖에 직선 AB의 선상에 잇지 않은 점 P가 있다.
눈금 없는 자만을 사용해서 P를 지나며 AB에 평행한 직선을 그어 보아라.
(단, 같은 간격으로 나열된 3점이 직선상에 나타나 있으므로, 이 직선에 대한 평행선을 긋는 것이다.)



[작도] ① 직선 AP를 긋는다.
② AP의 연장선상의 임의의 1점을 Q라 하고, 직선 QM을 긋는다.
③ 직선 BP를 그어 QM과의 만나는 점을 C라 한다.
④ 직선 AC를 긋는다.
⑤ 직선 BQ를 긋는다.
⑥ AC, BQ의 만나는 점을 R이라 하고, 직선 PR을 긋는다.

직선 PR은 P를 통과하고, AB에 평행한다.

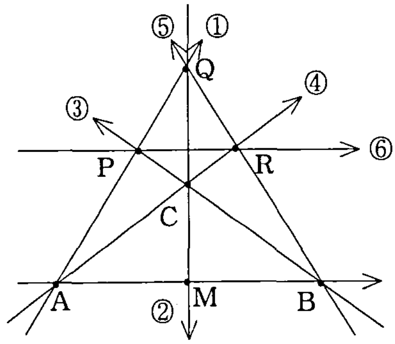
[증명] 체바의 정리에 의하여

$\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BR}{RQ}=1$ 또는 $\frac{AM}{MB}=1$

따라서 $\frac{QP}{PA} \cdot \frac{BR}{RQ}=1$

즉, $\frac{QP}{PA}=\frac{RQ}{BR}$

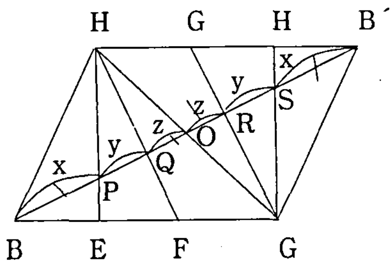
그러므로, $\overline{PR} /\!/ \overline{AB}$



문제	step9

△ABC에서 $\overline{AC}$의 중점을 M, 변 BC의 삼등분 점을 E, F 라고 하자.
선분 BM은 $\overline{AE}$ 와 $\overline{AF}$ 에 의하여 세 부분으로 나누어 진다.
이 세 부분의 길이를 x, y, z라고 할 때, x : y : z 를 구하여라.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB'} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{AB} /\!/ \overline{B'C}$ 평행 사변형 ABCB′을 그릴 수 있다.
이 때, $\overline{AB'}$의 삼등분 점을 G, H 라 하면 $\overline{AE} /\!/ \overline{HC}$, $\overline{AF} /\!/ \overline{GC}$이고, 세 부분의 길이는 x, y, z, z, y, x 의 순으로 나누어 진다.



△SBC 와 △PBE에서 $\overline{SC} /\!/ \overline{PE}$ 이므로, 서로 닮은꼴이고.

$\overline{BS} : \overline{BP} = \overline{BC} : \overline{BE}$에서

$(x+2y+2z) : x = 3 : 1$

$\therefore\ x = y+z$ …①

△RBC 와 △QBF에서 $\overline{RC} /\!/ \overline{QF}$ 이므로, 서로 닮은꼴 이고,

$\overline{RB} : \overline{QB} = \overline{BC} : \overline{BF}$ 에서

$(x+y+2z) : x+y = 3 : 2$

$\therefore\ x = -y+4z$ …②

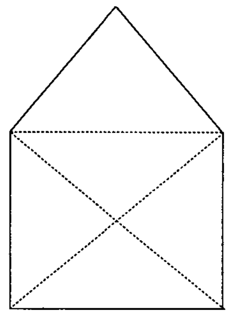
①②를 연립하면, y+z=-y+4z에서 $y=\frac{3}{2}z$ …③

③을 ①에 대입하면, $x=\frac{3}{2}z+z=\frac{5}{2}z$

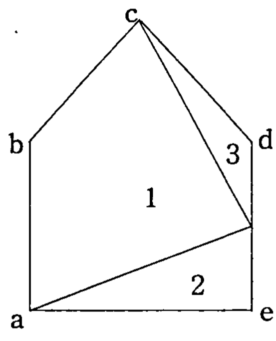
$$\therefore x:y:z=\frac{5}{2}z:\frac{3}{2}z:z=5:3:2$$

문제 2	step1 도형

젊은 목수에게 오각형의 널판지가 있었습니다.
이 널판지는 그림처럼 정사각형과 삼각형을 이어
맞춘 것 같은 형으로 삼각형의 부분의 크기는
정사각형의 부분의 1/4로 되어 있습니다.
그런데 이 젊은 목수는 주인으로부터 이 널판지로
정사각형을 만들도록 지시받았습니다.
단, 이 널판지를 자를 때, 쓸데없는 조각이 나와서도
안되고 다른 널판지를 이어 서로 안된다고 합니다.
젊은 목수는 곰곰히 생각 한 끝에 이 널판지를 두 개의 직선을 그어 세 개로
나누고 난 후에 짜 맞추기로 했습니다.
그는 과연 널판지를 어떻게 나누었겠습니까?



[풀이] 하나의 선은 de의 중앙 f에서 정점 c로, 다른 하나의 선도 역시 같은 f점에서 정점 a로 그어야 합니다. 그리고, 이 두 개의 선을 따라 절단된 3개의 부분, 1, 2, 3을 이어 맞추면 정사각형이 됩니다.



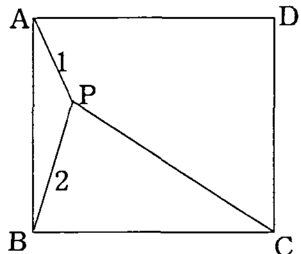
문제	교육부 장관	**step2 경기도/전국**

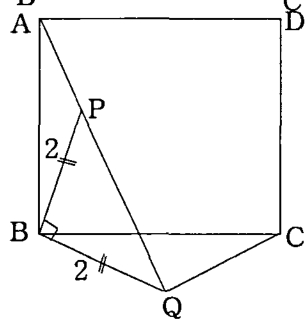
정사각형 ABCD에서 이 되도록 정사각형 내부에 $\overline{AP}=3$, $\overline{BP}=5$, $\overline{DP}=\sqrt{7}$
점 P를 정할 때, ∠APD의 크기를 구하여라.

본인이 전국대회 (교육부 장관 경시대회) 적중 문제이며, 이 문제를 풀면, 앞 문제 풀기가 쉽습니다. 이러한 문제 유형은 회전 변환, 대칭 변환, 평행 변환 등의 문제로 자주 출제됩니다. 이유는 경시대회는 공식을 사용하지 않게 하기 위함이므로, 고등학교 과정에서도 회전변환, 대칭변환, 평행변환은 증명할 수 없습니다.

즉, 고등학생이라도 경시를 하지 않았으면, 증명하지 못하고 대학수능, 모의고사, 특수대, 특수고, 본고사 등에서는 자주 출제되는 형태입니다.

자! 그럼 풀어봅시다. 모든 문제가 그렇지만 도형은 작도가 중요하고, 그렸다고 하면 70% 이해한 것입니다.





CIA착상 $\overline{AP}$=1이고, $\overline{BP}$=2 이므로, $\overline{AP}$를 가능한 $\overline{AB}$에 가깝도록 P점을 잡아 작도하는 것이 중요 그리고 $\overline{BP}$, $\overline{PC}$ 그려준다.

또, 문제가 ∠APB의 크기를 구해 달라고 하기 때문에 과연 각을 구하기 위해 어떻게 해야 할까?

그래 착상이 나지 않으면, 가장 기본을 생각하라 했지요?

세각=120° =평행선 그래 짱!!

도형은 선이 중요 평행선을 만들어 보자.

어떻게 만들지 그래 AP를 연장해 보면 되지 어디에서 멈추어야 하지 그래, Good Idea

회전도형 ABCD가 사각형이지, 그래서 $\overline{BP}$를 D를 중심으로 90° 만큼 회전시켜 보자.

(즉, ∠APB를 점 B를 중심으로 하여 시계바늘의 회전방향으로 90° 만큼 회전시켜서 ∠CQB를 얻는다. 그러면 ∠CQB≡△APB이다.)

그럼 Q를 작도할 수 있지 왜 $\overline{BP}=\overline{BQ}$ 가 같게 하면되잖아.

그럼 △PBQ는 이등변 삼각형 (꼭 기억해둬)

그래서 $\overline{BQ}$=2(cm), 그럼 $\overline{CQ}$와 $\overline{AP}$는 같게되네

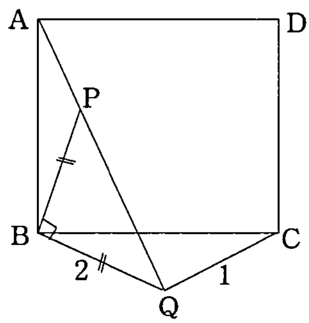
└ 이것을 꼭 찾아야되 아니면 (간접) 왜

△APB와 △CBQ가 합동이 되거든.

합동조건 한번 보자! $\overline{AP}=\overline{CQ}$(S), $\overline{AB}=\overline{CB}$(∵정사각형), $\overline{BP}=\overline{BQ}$

그러므로, △APB와 △CBQ가 합동이지 여기까지 하면 30점(20점)만점 중 두 문제이기에 15점(10점)이면, 그럼 20점, 30점은 언제 (5점 10점은 언제주지) ⇒ 시·군 대회는 보통 10문항 나오기에 20점 만점 문제 형태로 주고, 전국과 시·도대회는 6문항 중심이기에 30점 형태로 줘. 나같으면 6~8점 정도 줄거야 (일반적으로는 서론 5점, 본론 5점, 결론 5점)을 줘. 그래서 감점 처리하지

다시 시작하자



본론 아까 착상을 그렇게 했지만 (즉, Back word (거꾸로 푸는 것) 아마 내가 도사일거야 잘할걸!! 이제는 적어 줘야지 P와 Q를 연결하면 ∠PBQ가 90° $\overline{PB}=\overline{QB}=2$ 이므로, ∠PQB=∠QPB=45° 피타고라스 정리에 의해 $\overline{PB}=\overline{QB}=2$ 이므로,

$1:1:\sqrt{2} \Rightarrow 2:2:2\sqrt{2}$

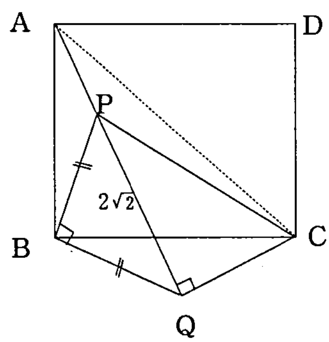
△PBQ가 이등변삼각형이므로, 아까 기억하라고 했지 그러므로 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

이제 서론을 증명해야지 뭐 △APB≡△CBQ말야

∠BQC를 알면 ∠APB를 알수 있어

이 결과를 찾기 위해 머나먼 타양 살이를 했어

보통 거꾸로는 문제에서 나오는데 이 정도로 해서 문제 거꾸로나



△PQC에서 $\overline{PC}=3$, $\overline{CQ}=1$, $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로,

$\overline{PC}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$ 따라서 ∠PQC=90° (5-6점)

그러므로, ∠CQB=90° + 45° =135° =∠APB 답 : 135° (2-3점)

정사각형의 한 변의 길이는 [CIA착상] 앞에서 착상했다 싶이

A, P, Q가 동일 직선 위에 점임을 밝혀 줘야 한다.

대각선 길이를 알면 이등변 삼각형 (왜, ABCD는 정사각형이니까!)

∠APB+∠BPQ = 135° +45° = 180° 이므로, A, P, Q 세 점은 동일 직선 위에 있다.

따라서, $\overline{AQ}=2\sqrt{2}+1$

그래서 $\overline{AC}$ 그리자. 그러니까 △AQC에서 ∠Q=90, $\overline{QC}=1$

$\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{PQ}=1+2\sqrt{2}$

그러므로 △AQC는 직각 삼각형이다.

그래서 $\overline{AC}=\sqrt{1+(1+2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10+4\sqrt{2}}$

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}$

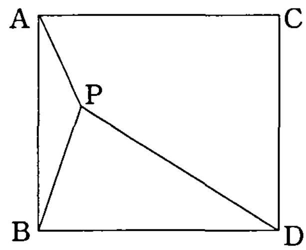
문제	step3 경기도/중국

그림과 같이 P는 정사각형 ABCD 내부의 한 점이다.

$\overline{PA}=1$, $\overline{PB}=2$, $\overline{PC}=3$일 때, 다음을 구하여라.

1) ∠APB 의 크기

2) 정사각형의 한 변의 길이



[풀이] 1) ∠APB를 점 B를 중심으로 하여 시계 바늘의 회전 방향으로 90° 만큼 회전 시켜서 ∠CQB를 얻는다. 그러면 ∠CQB≡△APB이다.

P와 Q를 맺으면 ∠PBQ=90°, $\overline{PB}=\overline{QB}=2$ 이므로, ∠PQB=∠QPB=45°

따라서, $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

△PQC에 있어서 $\overline{PC}=3$, $\overline{CQ}=1$, $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로, $\overline{PC}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$

따라서, ∠PQC=90°

∴ ∠CQB= 90° +45°

= 135° = ∠APB

2) ∠APB+∠BPQ=135° +45° =180° 이므로,

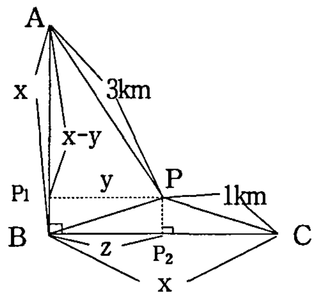
A, P, Q 세 점을 동일직선위에 있다.

따라서 $\overline{AQ}=2\sqrt{2}+1$

직각삼각형 △AQC에서

$\overline{AC}=\sqrt{1+(1+2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10+4\sqrt{2}}$이다.

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$



문제	step4 생활/심층/적중

A, B, C 세 학생의 집을 학교로부터 각각 3km, 2km, 1km 떨어져 있다고 한다.
A와 B, B와 C학생들의 집은 거리가 같다고 할 때, A와 B학생의 집의 거리는 약 몇 km 인가?
(단, $\angle ABC=90°$, $\sqrt{2}≒1.4$라 하자.)

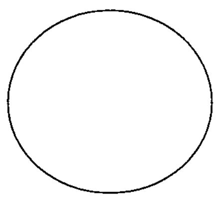
CIA착상

1. 특정한 조건하에서의 두 지점간의 거리
2. 연립방정식 계산시 주의

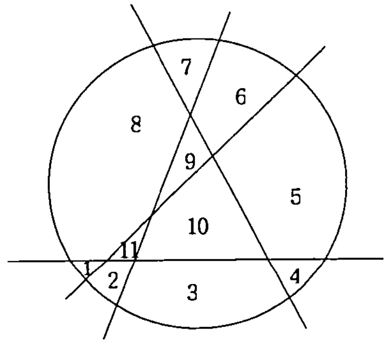
[풀이] P에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 끝을
각각 P_1 , P_2 라 하면,
삼각형 PAP_1 , $PP_1B = PBP_2$, PP_2C 에서
$(x-y)^2+z^2=9$ $\cdots★_1$
$y^2+z^2=4$ $\cdots★_2$
$(x-z)^2+y^2=1$ $\cdots★_3$
$★_2-★_1$, $★_3-★_2$ 에서
$2xy=x^2-5$, $2xz=x^2+3(x^2>5)$ → 안쓰면 감점
이들을 제곱하여 더하면, $4x^2(y^2+z^2)=2x^4-4x^2+34$ $\cdots★_4$
$★_2$ 를 $★_4$ 에 대입하면, $16x^2=2x^4-4x^2+34$
$x^4-10x^2+17=0$
$x^2=5+\sqrt{5^2-17}=5\pm\sqrt{8}$
$x^2>5$ 이므로, $x^2=5+\sqrt{8}=5+2\sqrt{2}≒7.8$
답: $\sqrt{7.8}$k

문제 3	원의 분할	step1

원이 있습니다.
네 개의 직선으로 원을 나누변, 원은 최대한
몇 부분으로 나눌 수 있을까요?



CIA착상 $n\times\dfrac{(n+1)}{2}+1$



[풀이1] 오른쪽 그림과 같이 최대한 11개 부분으로 나눌 수 있다.

[풀이2] $4\times\dfrac{(4+1)}{2}+1$

$=2\times5+1$

$=11$(개)

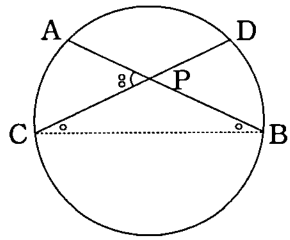
문제	원주각의 성질 step2

원의 두 현 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$가 원안의 점 P에서 만날 때, $\angle APC$는 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각 크기와 $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 크기와의 합과 같음을 증명하여라.

[풀이] 그림에서처럼 문제조건에 맞게 작도한 후 C와 B를 연결하면, $\angle APC=\angle PBC$($\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각)+$\angle PCB$($\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각)

$\therefore$ $\angle APC$는 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각의 비와 같다.

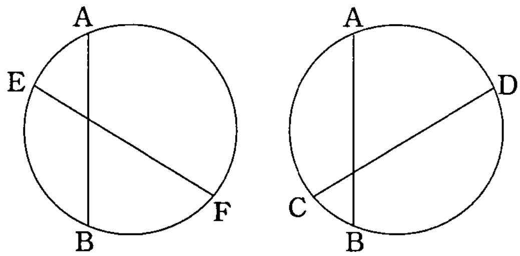
더 자세한 것은 원론에 가서 합시다.



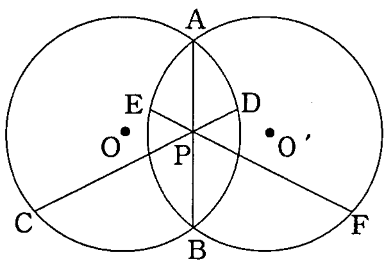
문제	한 원안에 있다. step3

서로 만나는 두 원에서 공통 현 AB가 점 P를 지나는 두 원의 현을 각각 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$라 할 때, 네 점 C, E, D, F가 한 원에 있음을 증명하여라.

CIA착상 원을 분리하면
준비단계 1과 같음

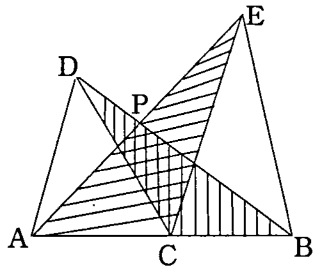


[증명] 원 O에서
$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ …①
원 O′에서 $\overline{PE}\cdot\overline{PF}$
$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$ …②
①, ②에서 $\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$
따라서 네 점 C, E, D, F 한 원안에 있다.



문제	삼각형의 기본 조건(미국)	step4

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$위에 점 C를 잡아 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 DAC, ECB를 $\overline{AB}$에 대하여 같은 쪽에 그리면, △ACE≡△DCB이다.
다음 물음에 답하여라.



(1) 이 증명에서 사용되는 삼각형의 합동 조건을 말하여라.

(2) $\overline{BD}$와 $\overline{AE}$의 교점이 P일 때, ∠APB의 크기는?

CIA착상 문제를 보고 스스로 작도를 해보자.

[풀이1] △ACE와 △DCE에서 ($\overline{AC}=\overline{DC}$ (S), $\overline{CE}=\overline{CB}$ (S), ∠ACE=∠DCE=120°)
(∵ ∠ACD=60+∠DCE=∠ECB+∠DCE=60° 공통이므로,
∴ △ACE≡△DCE (SAS 합동))

[풀이2] [풀이1]의 합동조건에 의하여 $\therefore \angle EAC=\angle BDC$, $\angle AEC=\angle DBC$

$\therefore \angle EAC+\angle AEC=60^\circ$

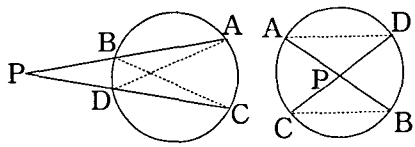
$\triangle APB$에서 $\angle APB=180^\circ-(\angle EAC+\angle PBC)=180^\circ-(\angle EAC+\angle AEC)$

$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

문제	원과 비례 (원멱 정리) step5

한 원의 두 현 AB, CD 또는 이들의 연장선이 만나는점을 P라고 하면,

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ 임을 증명하여라.



< 1 >　　< 2 >

[풀이] < 1 >에서 AD와 BC를 연결하자. 그러면 $\triangle APD$와 $\triangle PBC$에서

$\angle PAD=\angle PCB$ ($\because$ BP호가 공통호 이므로), $\angle APC=\angle BPC$ ($\because$ $\angle P$가 공통각이므로)

$\therefore \triangle APD \backsim \triangle PBC$

$\therefore \overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PC}:\overline{PB}$ 즉, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

< 2 >에서 A와 D를 연결하고, C와 B를 연결하자.

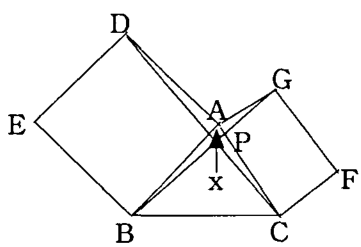
그러면, $\angle DAB=\angle DCB$ ($\because$ CB가 공통호), $\angle APC=\angle CPB$ ($\because$ 맞꼭지각이므로)

$\therefore \triangle APC \backsim \triangle PCD$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PD}=\overline{PC}\cdot\overline{PB}$ 즉, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

문제	step6

오른쪽 그림은 $\triangle ABC$의 변 AB, AC를 한 변으로 하는 정사각형 ADEB, ACFG를 그린 것이다.



(1) $\triangle ADC \equiv \triangle ABG$ 임을 보이라.

(2) $\angle BPC$ 의 크기를 구하라.

CIA착상 (1) △ADC와 △ABG에서 $\overline{AD}=\overline{AB}$ …① (S), $\overline{AC}=\overline{AG}$ …② (S)

$\angle DAC=\angle DAB+\angle BAC=90° +\angle BAC$, $\angle BAG=\angle GAC+\angle BAC=90° +\angle BAC$ …③(A)

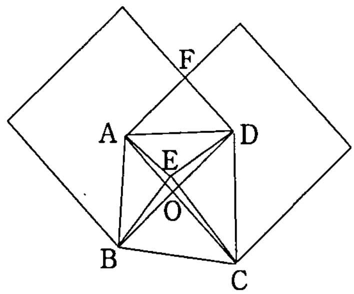
∴ $\triangle ADC\equiv\triangle ABG$ (SAS합동)

(2) $x=180° -(\angle PBC+\angle PCB)=180° -\{(180-\angle BAC)-(\angle ABP+\angle ACP)\}$

$=\angle BAC+\angle ABP+\angle ACP(=\angle AGP)=\angle BAC+\{180° -(\angle BAC+90°)\}=90°$

문제	step7

볼록 사각형 ABCD의 내부에 <u>OA=OB</u>, <u>OC=OD</u> 그리고 ∠AOB=90° =∠COD를
① ②
만족시키는 점 O가 있다고 하자.
선분 AC를 한 변으로 하고 점 B의 반대쪽에 있는 정사각형과 선분 BD를 한 변으로 하고 점 C의 반대쪽에 있는 <u>정사각형의 공통부분이 정사각형</u>일 때, 사각형 ABCD가 원에 내접함을 증명하라.



[CIA착상] 조건에 맞게 작도를 해보자.
① 원주각의 성질을 사용하자.
② 만약 OA=OB=OC=OD라면, 제일 쉬운데

[풀이1] **<거꾸로 풀이법>**

사각형이 원에 내접함으로 시작하는 착상과정

□ABCD가 원에 내접한다고 할 때, $\angle AOB=\angle AEB=90°$

이는 원주각이 같으므로, A, B, E, O 는 한 원위에 있다.

따라서,

$\angle AEO=\angle ABO$, $\angle ABO=45°$ (∵ △AOB는 직각이등변삼각형) …①

같은 방법으로 C, D, O, E는 한 원안에 있다.

∴ $\angle DEC=\angle DCO$

$\angle DCO=45°$ (∵ △COD는 직각이등변삼각형) …②

이 때, ①②, OE는 공통이므로 $\triangle AEO \equiv \triangle DEO$

$\therefore \overline{AE}=\overline{DE}, \quad \overline{AO}=\overline{DO}$

$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DC}$

∴ 한원안에 있다.

따라서, 앞의 식을 만족시키려면

□AEDF가 정사각형이 되어야 한다.

이때, 문제에서 말하는 공통부분 즉, □AEDF가 정사각형이므로,

앞내용 모두 성립하게 된다.

∴ □ABCD는 원에 내접한다.

[풀이2] 이렇게 보면 간단하다. (앞에 1단계, 2단계, 3단계를 연결시켜 착상을 보여라.)

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$가 만나는 점을 E라 놓자.

$\triangle AOC$와 $\triangle BOD$에서 $\angle BOD=90^\circ+\angle BOC=\angle AOC$

$\therefore \triangle AOC \equiv \triangle BOD$ (SAS)

따라서, $\overline{AC}=\overline{BD}$

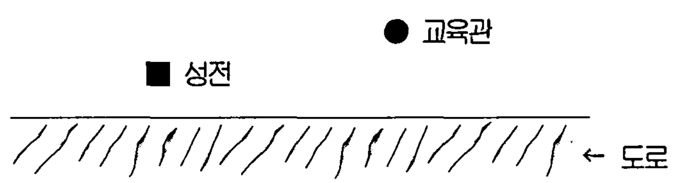
또 문제에서 $\overline{AE}=\overline{DE}$ (∵ 정사각형이라고 했으므로, 만약 마름모이면?)

$\overline{BE}=\overline{CE} \qquad \therefore \overline{DE}\cdot\overline{BE}=\overline{AE}\cdot\overline{CE}$

점 A, B, C, D는 한 원안에 있다.

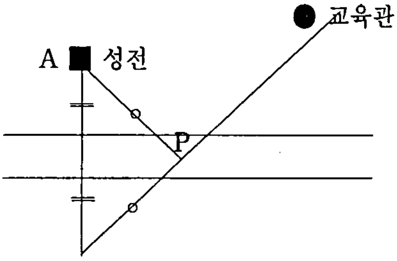
문제 4 | 개념이 완벽해야 고지를 넘을 수 있다. **step1**

은혜와 교회 수원 성전에는 선전과 교육관이 멀어 그 사이에 버스 정류장을 설치하고저 한다. <그림1>어디에 설치하면 성도들이 가장 편하겠는가?



[CIA착상] ① 직선거리가 가장 짧다. ⇒ 대칭점
② 이등변 삼각형 정의를 생각하라.

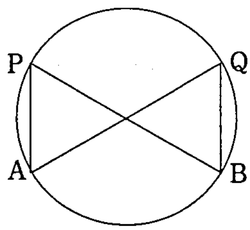
[풀이]



문제	step2
직선 AB의 같은 쪽에 있는 두 점 P, Q에 대하여 ∠APB=∠AQB 이면, 네 점 A, B, P, Q는 한 원위에 있다를 증명하라.	

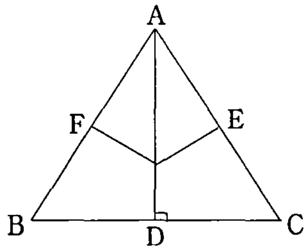
[증명] ( )을 채워라.

△ABP의 외접원을 그린다. 만일 Q점에 이 원의 외부에 있다면, ∠AQB<(∠APB)
또, 내부에 있으면 ∠AQB>(∠APB)이므로, 가정에 모순된다.
따라서, Q는 이 원위에 있어야 한다.



문제	step3
△ABC의 꼭지점 A에서 변 BC에 수선 AD를 긋고, $\overline{AD}$ 위에 임의의 점 P에서 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 수선 PE, PF를 그으면 사각형 B, C, E, F는 원에 내접함을 증명하라.	

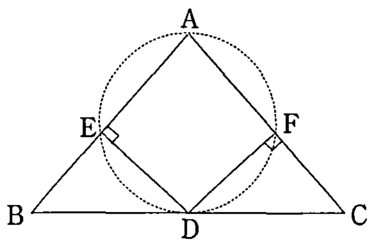
[증명] (　)을 채워라.



원에 내접 사각형 AFPE는 ∠E+(∠F)=180˚ 이므로, 원에 내접한다.
∠PAE, ∠PFE는 이 원에서 PE에 대한 원주각이므로, ∠PAE=(∠PFE) …①
한편, △ADC에서 (∠PAE)+∠C=90˚ …②
①, ②에서 ∠BFP+∠PFE+(∠PAE)=90˚ + 9 0 ˚
=180˚
즉, 사각형 BCEF는 내각 ∠F와 ∠C의 크기의 합이 180˚ 이므로, 원에 내접한다.

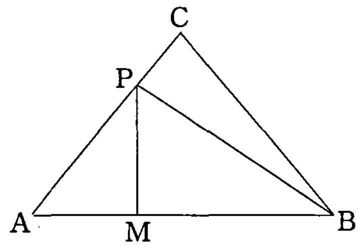
문제	step4
△ABC의 꼭지점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선 AD, 점 D에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선을 DE, DF라 하면, B, C, F, E는 한 원위에 있다를 증명하라.	

[증명] 사각형 AEDF는 ∠E+(　)=180˚ 이므로, 원에 내접한다.
∴ ∠AFE=(　) …① 직각삼각형 ADB에서 $\overline{DC}\perp\overline{AB}$이므로,
∠ABD=(　) …② ①, ②에서 ∠ABD=(　)
따라서, 사각형 BCFE는 원에 내접한다. 즉, B, C, A, E는 한 원 위에 있다.



문제	경시 개념 잡기	step5

삼각형 ABC의 변 AB의 중점을 M이라 하자.
변 AC위의 한 점P를 다음과 같이 잡는다.
$\angle MPB=90^\circ$, $\overline{PC}+\overline{BC}=\overline{AP}$,
$\overline{BC}=17$㎝일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.



[풀이] **변 AC의 연장선 위에 점 D를 $\overline{CD}=\overline{CB}$가 되도록 잡자.**

그러면 점 P는 변 $\overline{AD}$의 중점이다.

이유 : PC+BC=AP

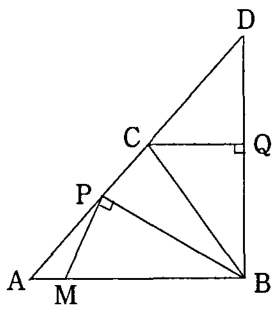
그러므로, 중점 연결정리에 의해 $\overline{PM} /\!/ \overline{DB}$이고, $\angle PBD=90^\circ$ 이다.

점 Q를 변 BD의 중점이라 하면, △CBD가 이등변삼각형이므로,
$\angle CQD=90^\circ$ 이다.

$\overline{PB} /\!/ \overline{CQ}$이고, 점 Q가 $\overline{BD}$의 중점이므로, 중점 연결정리에 의해
$\overline{PC}=\overline{CD}$이다.

그러므로, $\overline{PC}=\overline{CD}=\overline{CB}=17\text{cm}$

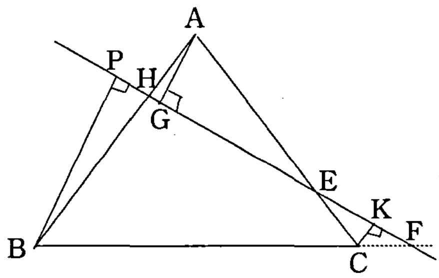
따라서 $\overline{AC}=3\text{cm}$, $\overline{CD}=51\text{cm}$



문제	step6

한 직선이 △ABC의 변 AB, BC, CA 또는 그 연장과 만나는 점을 D, F, E 라고 하면

$\dfrac{BF}{FC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AD}{DB} = 1$ 이다.



[풀이] 점 A, B, C에서 직선에 내린 수선의 발을 각각 G, H, K라고 하자,

△BHF ∽ △CKF, △CKE ∽ △AGE, △AGD ∽ △BHD 이므로,

$\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{BH}{CK}$ …①

$\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CK}{AG}$ …②

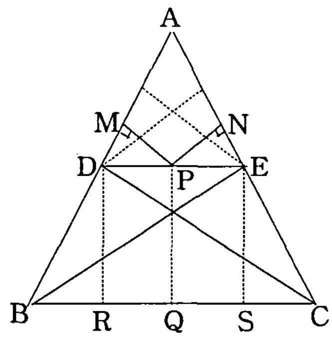
$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AG}{BH}$ …③

①×②×③

$\dfrac{BF}{FC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{BH}{CK} \cdot \dfrac{CK}{AG} \cdot \dfrac{AG}{BH} = 1$

문제	step7 중국/도형

△ABC에서 ∠ABC의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 E, ∠ACB의 이등분선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 D라 한다. $\overline{DE}$의 중점 P에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, M, N이라고 하면
$\overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{PN}$ 임을 증명하라.



[풀이] $\overline{PQ}$, $\overline{PN}$, $\overline{PM}$을 평행 이동하여 점 P가 △ABC의 세변의 중점에 이르도록 하자
그러면, M, N, Q는 각각 $\overline{DT}$, $\overline{EW}$, $\overline{RS}$의 중점

$\overline{PM} = \frac{1}{2}$ET, $\overline{PN} = \frac{1}{2}$DW ∴ $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{DR} + \overline{ES})$

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PN} \perp$AC, $\overline{PQ} \perp$BC 이므로,

$\overline{PR} /\!/ \overline{PQ}$, DW // PN, ES // PQ, ET // PM 이고,

또, DR ⊥ BC, ES ⊥ BC, PM ⊥ AB, PN ⊥ AC

또한 BE, DC는 ∠ABC, ∠ACB의 이등분선이므로

$\overline{DR} = \overline{PW}$, ES = ET

∴ $\overline{DR}$+ES = $\overline{DW}$+ET

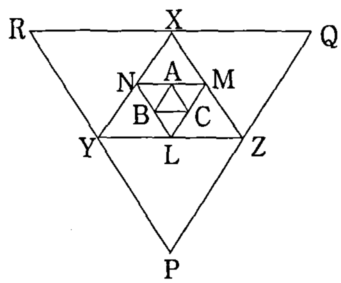
∴ $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{PR}+\text{ES}) = \frac{1}{2}(\text{PW} \perp \text{ET})$

$= \frac{1}{2}\text{DW} + \frac{1}{2}\text{ET} = \overline{PN}+\text{PM}$

문제	step8

삼각형 ABC에서 외각의 이등분선으로 삼각형 LMN을, 삼각형 LMN에서 외각의 이등분선으로 삼각형 XYZ를 감각형 XYZ에서 외각의 이등분선으로 삼각형 PQR을 차례로 만들었다.
이 때, $\angle A$의 크기가 a일 때, $\angle P$의 크기를 사용하여 나타내시오.

[풀이]



문제	step9

$\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 내접원이 빗변 BC와 접하는 점을 D라 하면, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$를 두면으로 하는 직사각형의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이와 같음을 증명하라.

[풀이] $\overline{DB}$와 $\overline{OP}$의 교점을 S,
$\overline{CD}$와 $\overline{OQ}$의 교점을 T라 하면,
$\triangle TCQ$와 $\triangle TOD$에서
$\angle TQC=\angle TDO=90^\circ$
$\angle CTQ=\angle OTD$
이므로, $\angle TCQ=\angle TOD$ 또, $\overline{CQ}=\overline{OD}$(원 O이 반지름)이므로,
$\triangle TCQ\equiv\triangle TOD$(ASA합동)

따라서 $\overline{CT}+\overline{TD}=\overline{OT}+\overline{TQ}$ 이므로, $\overline{CD}=\overline{OQ}$

마찬가지로, $\overline{DB}=\overline{OP}$

따라서, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$를 두 변으로 하는 직사각형의 넓이는 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$를 두 변으로 하는 직사각형 △PRQ 의 넓이와 같다.

□OPQQR에서 △ODT=△CQT, △ODS=△BPS 이므로,

□OPRQ=△CBR

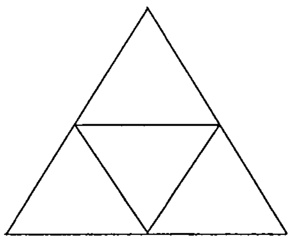
곧, □OPRQ의 넓이도 △ABC의 넓이와 같다.

문제	계산빨리하기	step10

둘레의 길이가 4인 삼각형 A_1이 있다. 이 삼각형의 각 변의 중점을 이어서 만든 삼각형을 A_2라 하고 같은 방법으로 한없이 반복하여 삼각형 A_3, A_4…를 만든다고 하자.

이 때 생기는 모든 삼각형 A_1, A_2, A_3…의 둘레의 길이를 a_1, a_2, a_3… 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

[CIA속해] 그림을 그려라.



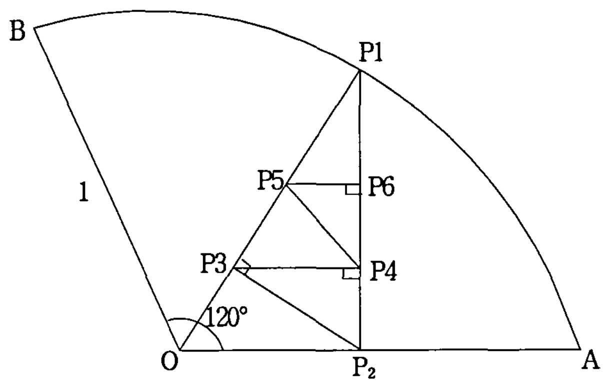
∴ An의 둘레의 길이를 an이라 하면, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이고, $a_1=4$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$$

답 : 8

문제	수능 미리보기	step11

반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 120° 인 부채꼴 OAB가 있다.
호 AB를 이등분 하는 점 P_1에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 P_2, 점 P에서 $\overline{OP_1}$에 내린 수선의 발을 P_3,점 P_3에서 $\overline{P_1P_2}$에 내린 수선의 발을 P_4라 한 다.
이와 같은 방법으로 계속 그려 나갈 때 선분 P_5P_6의 길이는?



[풀이] $\overline{OP_1}$ =1이고, ∠AOP=60° 이므로, $\overline{P_1\ P_2} = \overline{OP_1}$, sin60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

(∵ sine의 법칙)

∠P1OP2 =∠P1P2P3 =60° 이므로,

$\overline{P_2\ P_3} = \overline{P_1\ P_2}$ cos60° $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

또, $\overline{P_3\ P_4} = \overline{P_2\ P_3}$ cos30° $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$

∠P3P4P5=30° 이므로, P4P5 = $\overline{P_3\ P_4}$ cos30° $= \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{32}$

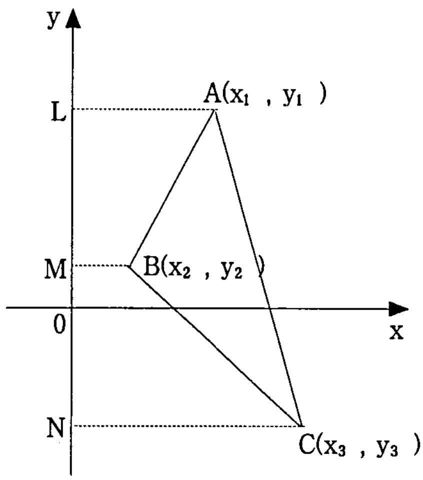
문제	step12
삼각형 ABC와 만나지 않는 직선 l이 있다. 점 A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하고, 점 L, M, N에서 각각 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 X, Y, Z 라 한다. 이 때, 세 직선 LX, MY, NZ가 한 점에서 만남을 증명하여라.	

[풀이] △ABC를 좌표평면 위에 놓고 꼭지점의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$라 하면 일반성을 잃지 않고 직선 l을 x=0에 대응시킬 수 있다.

따라서 점 L, M, N 의 좌표는 각각 $L(0, y_1)$, $M(0, y_2)$, $N(0, y_3)$가 된다.

직선 LX, MY, NZ는 각각 직선 BC, CA, AB에 수직이면서 L, M, N을 지나게 된다.

따라서, 세 직선 LX, MY, NZ의 방정식은



직선 LX : $y = \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}x + y_1$ …①

직선 MY : $y = \dfrac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}x + y_2$ …②

직선 NZ : $y = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}x + y_2$ …③

이고, 세 직선의 기울기는 모두 다르다.

(∵ 삼각형의 세 변의 기울기가 모두 다르다.)

그러므로, ①②는 반드시 한 점에서 만나고, 그 교점은 ①②③을 다음과 같이 변형시킨 식에서 판단한다.

직선 LX : $(x_3 - x_2)x + (y_3 - y_2)y = (y_3 - y_2)y_1$

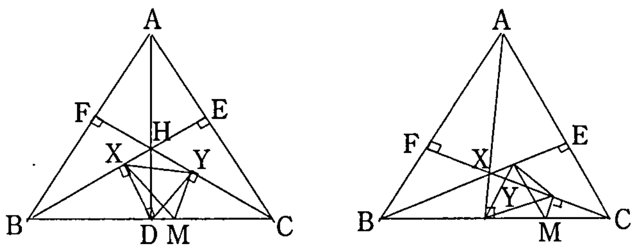
직선 MY : $(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1) = (y_3 - y_1)y_2$

직선 NZ : $(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)y_3$

이제 위의 두 직선 LX와 MY의 방정식을 변변 빼면,
$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = (y_1 - y_2)y$ 가 되고, 이직선은 직선 NZ와 방정식이 같다. 따라서,
직선 LX와 MY의 방정식을 동시에 만족하는 점은 항상 직선 NZ의 방정식을 만족한다. 즉, 직선 NZ는 항상 직선 LX와 직선 MY의 교점을 지나므로, 세 직선 LX, MY, NZ는 한 점에서 만난다.

문제	step13 세계수학경시대회 (IMO)
△ABC에서 D를 A에서 BC로 내린 수선의 발이라 하고 E를 B에서 AC로 내린 수선의 발 F를 C에서 AB로 내린 수선의 발이라 하자. 그리고 BE의 중점을 X, CF의 중점을 Y라 하면 △DXY 의 외접원은 이 삼각형의 수심을 지남을 증명하여라. 그리고 △DXY는 △ABC와 닮음임을 보여라.	

[풀이]



(1) 수심을 H, $\overline{BC}$의 중점을 M

i) X, Y가 $\overline{AD}$에 대해 반대 방향에 있을 때

$\overline{BE} = 2\,\overline{BX}$, $\overline{BG} = 2\,\overline{BM}$, ∠MBX 는 공통이므로

△MBX ∽ △CBE,

∴ ∠MXB = 90°

마찬가지로 △CMY ∽ △CBF에서 ∠DYM = 90°

∠HXM - ∠HDM =90°

∴ H, X, D, M 은 한원 위에 있다.

(∴ ∠H×M+∠MYH=180° ∴ H, X, M, Y는 한 원안에 있다.)

ii) X, Y 가 $\overline{AD}$에 대해 같은 방향에 있을 때,

$\overline{BE} = 2\,\overline{BX}$, $\overline{BC} = 2\,\overline{BM}$, ∠MBX 는 공통이다.

△MBX ∽ △CBE

∴ ∠MXB = 90°

마찬가지로 △CYM ∽ △CFB에서

∠CYM =90° ∠MXH=∠MYH=90°

∴ M, Y, X, H 는 한 원위에 있다.

∠MXH+∠MDH=1800

∴ M, X, H, P 는 한 원위에 있다.

따라서 H, X, D, Y, M 은 한 원위에 있다.

i)ii)에서 △DXY의 외접원은 수심 H를 지난다.