

인터넷 기반 마이크로월드 자바수학의 설계

조 한 혁 (서울대학교)

7차 교육과정과 정보화시대를 맞이하여, 수학 교수-학습에서도 기술공학적 교구의 사용이 권장되고 있다. 이에 따라 많은 교원양성 기관과 단체들이 기술공학적인 교구에 대해 다양한 의견을 내고 있다. 여기에서는 먼저 기술공학적 교구의 사용에 대해 teaching 보다 학생의 learning을 중심이 되도록 하고 또한 인터넷과 네트워크 기반의 콘텐츠를 강조하는 원칙을 제시하고, 또 거북 기하학습 환경과 움직이는 기하학습 환경을 하나로 통합하여 인터넷에서 연결하여 쓸 수 있도록 <http://javamath.snu.ac.kr> 주소에 자바로 구현한 자바수학 마이크로월드의 설계에 대해 논한다.

1. 7차 교육과정과 교육정보화 패러다임

7차 교육과정에서는 수학 교수-학습 전반에서 컴퓨터와 같은 기술공학적 교구의 적절한 사용을 강조하고 있다.

그러나 기술공학적 교구의 활용 이전에 학교 현장의 상황이 어떤가를 먼저 생각하여야 한다. 예를 들어, DOS가 돌아가는 컴퓨터에 윈도우 소프트웨어가 무슨 소용이며, 파워포인트 자료가 분필과 칠판보다도 좋게 만들어지지 않았다면 차라리 분필 수업이 더 좋을 것이다. 무엇보다도 학생에 대한 수학교수-학습 효과를 생각하지 않고 번쩍번쩍하는 기술공학적 교구만 찾는다면 정말 문제일 것이다. 교원임용고시에 출제되었다고 화제가 되었던 문제처럼 기술공학적 교구는 “무조건이 아니고 적절히” 사용되어야 할 것이다.

7차 교육과정의 정신과 정보화시대의 기술공학적 교구가 효과적으로 교육 현장에 정착하려면 다음과 같은 패러다임의 변화가 요구된다.

① PC 개념에서 네트워크-인터넷 개념으로 교육용 하드웨어와 소프트웨어의 패러다임을 바꾼다. 따라서 콘텐츠가 인터넷 기반으로 만들어져야 한다 (인터넷이 안되는 곳에서는 하드 디스크에 설치하고 작동할 수 있다)

② 컴퓨터와 인터넷에 대한 teaching 에서 컴퓨터와 인터넷을 통한 learning으로 패러다임을 바꾼다. 따라서 학생이 집에서도 자유롭게 접근할 수 있도록 정보화 콘텐츠가 만들어져야 한다.

③ 컴퓨터와 소프트웨어의 활용에 대한 평가를 바탕으로 기자재와 소프트웨어를 차등 지원한다.

영역	현안 및 문제점	개선 방안
하드웨어 및 네트워크	- 예산 부족 - 최신형 PC도 2-3년 후에는 구형 PC가 되고, PC의 고장 수리 등의 문제가 많다.	- 인터넷 망에 우선 신경을 쓰고, PC 개념에서 네트워크 개념으로 교육의 패러다임을 바꾼다. - 각 학교의 활용 능력을 고려하여 차등적으로 예산을 투입한다
교육용 소프트웨어 및 콘텐츠	- PC 위주의 질 낮은 교육용 소프트웨어 - 학교와 가정 어디에서도 접근할 수 있는 교육용 콘텐츠 부족	- 인터넷 망에 맞는 네트워크용 콘텐츠를 강조하여 PC 개념에서 네트워크 개념으로 콘텐츠의 패러다임을 바꾸어야 한다.
교육과정	- 소프트웨어 사용에 대한 지식의 강조 - 학생 중심의 교육과정 부족	- 컴퓨터와 인터넷에 대한 teaching에서 컴퓨터와 인터넷을 통한 learning으로 패러다임을 바꾸어야 한다.

2. 학습자 중심 교육정보화

바람직한 교육정보화를 위한 대안으로 사이버 공간에서의 도움, PC 개념에서 네트워크 및 인터넷 개념으로의 발상 전환, 그리고 컴퓨터에 대한 교육보다 컴퓨터를 통한 교육을 강조하였다. 여기서 컴퓨터를 통한 교수-학습이 학교뿐만 아니라 학생들의 가정에서도 일어나게 하려면 학교의 서버가 인터넷으로 가정과 연결되어야 한다. 이렇게 학교와 가정의 컴퓨터가 인터넷으로 연결되면 학생들은 시간과 장소를 초월해 학습을 할 수 있다.

자신의 PC에 소프트웨어가 없어도 인터넷으로 연결하여 소프트웨어를 쓸 수 있다. 예를 들어, 미국에 무료로 전화를 걸 수 있는 홈페이지에 가면 전화를 걸 수 있는 소프트웨어를 볼 수 있다. 이렇게 인터넷에서 돌아가는 소프트웨어는 자바(Java)라는 언어 등으로 짜여진 것이다. 다음은 미국교사 협의회 (www.nctm.org) 홈페이지에 있는 미국의 수학교육과정 스탠다드(standard)에 대한 기술공학적인 교구 사용의 예이다. 이곳에 인터넷으로 한국에서도 접근하여 쓸 수 있도록 자바(Java)로 소프트웨어의 예를 만들어 올려져 있다. 미국 과학재단 (NSF)도 자바로 짠 수학학습 프로그램 개발을 위한 프로젝트를 진행 중이다.

NCTM의 예에 나오는 소프트웨어는 모두 인터넷으로 연결하여



4.2 Investigating the Concept of Triangle and Properties of Polygons

This two-part example describes activities using interactive geoboards to help students identify simple geometric shapes, describe their properties, and develop spatial sense. The first part, Making Triangles, focuses on the concept of triangle, helping students understand the mathematical meaning of a triangle and the idea of congruence, or sameness, in geometry. In the second part, Creating Polygons, students make and compare a various polygons, describing the salient properties of the shapes they create. Both parts help students reach the goals described in the Geometry Standard.



4.3 Learning Geometry and Measurement Concepts by Creating Paths and Navigating Mazes

The three-part ladybug example presents a rich computer environment in which students can use their knowledge of number, measurement, and geometry to solve interesting problems. Planning and visualizing, estimating and measuring, and testing and revising are components of the ladybug activities. These interactive figures can help students build ideas about navigation and location, as described in the Geometry Standard, and use these ideas to solve problems, as described in the Problem Solving Standard. In the first part, Hiding Ladybug, students create a path that enables the ladybug to hide under a leaf. In the second part, Making Rectangles, students plan the steps necessary for the ladybug to draw rectangles of different sizes. In the last part, Ladybug Mazes, students plan a series of moves that will take the ladybug through a maze.

(PC의 하드디스크에 소프트웨어가 없어도) 쓸 수 있는 Java 로 짠 소프트웨어이다. 기존에는 각각의 PC 하드디스크에 있는 프로그램을 사용하여 교육을 하였는데, 이 경우 학생이 학교의 PC 앞에 앉아야만 학습이 가능하였다. 또한 새 버전의 프로그램이 나오면 모든 PC에 다시 깔아야 한다. 그러나 Java 등으로 만든 인터넷 프로그램은 인터넷으로 연결된 모든 컴퓨터에서 사용될 수 있으며 새 버전을 한 곳의 서버에 새로 설치하면 되기에 간편하다.

위의 NCTM 예 중에 첫 번째 것은 기하교육용 기하판이다. 기하판 외에 GSP 또는 Cabri-Geometry가 제공하는 움직임은 기하 환경도 자바로 구현되어 쓰이고 있다. 위의 NCTM 예 중에 두 번째 것은 로고에 대한 것이다. 로고는 거북이를 통한 수학학습용 컴퓨터 언어로 미국 MIT 대학 수학교수였던 페펠트 (Papert) 등이 주축이 되어 만들어진 것이다.

현재 우리나라의 7차 교육과정에서는 기술공학적 교구를 teaching 방법의 도구로만 강조하는 면이 있다. 올바른 기술공학적 교구의 이용은 teaching은 물론 learning 이 가능한 것이다. 따라서 비싼 소프트웨어를 사서 학생들 앞에서 시범을 보여주고, 학생은 접근을 할 수 없고 단지 앉아서 비디오 보듯이 하는 방식은 분명히 문제가 있는 것이다.

Teaching은 물론 learning 이 가능한 컴퓨터 환경은 소위 마이크로월드(MicroWorld) 환경과 일치한다. 마이크로월드가 제공하는 교수-학습 환경은 대상물들(objects)과 대상물들의 조작(operations)이 함께 존재하는 학습을 위한 컴퓨터 환경이다.

3. 인터넷 기반 로고 마이크로월드 설계

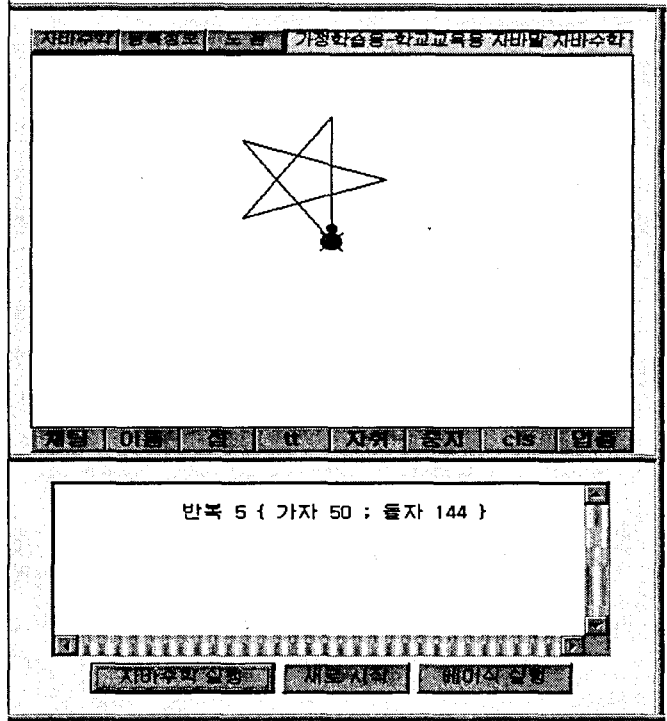
소프트웨어의 발전에서 보면 과거 도스 버전에서 윈도우에 돌아가는 소프트웨어로, 그리고 앞으로는 인터넷 또는 핸드폰과 같은 네트워크 장비에서 돌아가는 소프트웨어가 강조될 것이다. 예를 들어, 로고 (LOGO) 언어도 도스에서 윈도우 버전으로, 그리고 이제는 자바 버전으로 발전할 것이다. 다음은 자바로 만들어진 거북 기하 마이크로 월드 환경이다.

화면의 밑에 보이는 편집기에 가자 50 ; 돌자 90 을 쓴 후 [자바수학 실행] 단추를 누르면 앞으로 50 발자국 간 후 왼쪽으로 몸의 방향을 90도 돌린다. 위의 로고 마이크로 월드 환경은 PC는 물론 자신의 하드 디스크에 소프트웨어가 없어도 인터넷에서 작동하도록 자바로 만들어진 것이다.

로고 (LOGO)가 제공하는 교수-학습 환경은 대상물들(objects)과 대상물들의 조작(operations)이 함께 존재하는 학습을 위한 마이크로월드 (Mathematical MicroWorld) 환경이다. 마이크로월드 환경은 "프로그래밍은 컴퓨터 언어로 컴퓨터와 대화하는 것이다. 그러기에 컴퓨터 언어는 어린이가 어른과 대화하며 말을 배우듯이 컴퓨터와 대화할 그 무엇을 통해 배워야 한다." 라는 페펠트의 철학이 담긴 그래픽 환경이다. 놀이와 탐구를 통한 학습이 강조되는 LOGO의 마이크로월드인 거북이

(Turtle) 그래픽 환경에서는 거북과 학습자와의 자연스러운 대화를 통한 컴퓨터와 수학 학습을 유도하고 있다.

수학교육에서 프로그래밍을 하는 것은 미국 수학교사단체인 NCTM의 주장처럼 컴퓨터 프로그래밍을 도입하여 학생들이 수학에 대한 흥미와 관심을 새로운 측면에서 도울 뿐만 아니라 문제 해결 과정의 체계적 분석, 해답의 타당성 분석, 오류 분석 등의 과정을 통하여 수학적 사고력을 강화시키려는 것이다. 즉, 이미 알고 있는 수학적 사실이라도 프로그래밍을 하기 위해서는 그 과정을 의식적으로 분석해서 알고리즘을 이끌어 내야 하기 때문에 프로그래밍 활동은 학생들의 문제 해결력을 향상시킬 수 있는 효과적인 방법이 된다는 것이다.



프로그래밍에는 컴퓨터 언어가 사용된다. 현재 7차 교육과정의 실용수학에서는 도스(DOS)에서 작동하는 Q베이식을 대신해서 윈도우에서 작동하는 비주얼 베이식(Visual BASIC)을 교육용 컴퓨터 언어로 새롭게 강조하고 있다. 한편, 초등학교 등에서는 외국의 예를 따라 교육용 컴퓨터 언어인 로고(LOGO)를 통한 수학학습을 시도하고 있다. 그런데 인터넷 등에서는 씨(C) 언어에 기반을 둔 자바스크립트, PHP, 그리고 자바 등의 언어가 새롭게 부각되고 있다.

그렇다면 어떤 컴퓨터 언어를 사용하는 것이 좋을까? 사람들은 수학교육을 위해 컴퓨터 언어를 쓰는 것인지 또는 컴퓨터 언어를 배우기 위해 컴퓨터 언어를 쓰는지를 먼저 구분한다. 그러기에 수학교육에는 로고가 좋다는지, 학습의 전이효과를 위해서는 사회에서 가장 널리 쓰이는 C 계열의 언어를 써야한다는 등의 주장이 있다. 그러나 정보화 시대를 맞이하여 컴퓨터 프로그래밍과 수학 모두가 교육목표가 될 수 있기에 로고와 씨(또는 베이식)를 하나의 교육용 언어에 통합하는 것도 의미가 있을 수 있다.

자바수학 마이크로월드에는 바로 이러한 필요성에서부터 개발되기 시작했다. 즉, 자바수학은 수학교육에 적합한 로고 언어를 우리 나라의 교육용 언어인 베이식 언어의 문법으로 작동시키는 것과, 또

씨 언어의 명령과 인터넷에서도 작동하도록 만들어졌다. 다음은 왜 이러한 개발이 필요했는지에 대한 근거이다.

① 로고 (LOGO)의 명령체계를 현대적으로 또한 수학적으로 바꾼다.

많은 연구자들이 컴퓨터 프로그래밍, 특히 LOGO환경이 변수를 지도할 수 있는 자연스럽고 의미 있는 환경을 제공해 준다고 주장한다. LOGO프로그래밍에서 변수는 하나의 주소로 정의되며, 로고 프로그래밍에서의 변수는 대수에서의 변수와 동일한 상황에서 사용된다고 볼 수 있다. LOGO 프로그래밍에서는 그림을 그리는 간단한 절차에서부터 변수를 사용하게 되므로, 변수사용이 쉽고 의미 있으며, 역동적이고, 동기를 유발한다.

그러나 로고는 베이식 언어보다 먼저 개발되었고, 그 당시의 컴퓨터 메모리 문제 때문에 로고 언어를 복잡하게 만들 수 없었다. 따라서 예를 들어 영어 문자 X를 변수 또는 함수의 변수로 쓸 때에는 앞에 접두사를 다음과 같이 사용한다.

```
MAKE "X 5 <-- 변수 X에 5를 기억(대입)시킨다
PRINT :X <-- 변수 X에 기억된 값을 출력한다.

TO F :X <-- 함수 변수가 X인 함수 F를 정의
  PRINT :X <-- X의 값을 출력
END <-- 함수 정의 끝
```

이런 LOGO 명령에 대응하는 비주얼 베이식 명령은 다음과 같다.

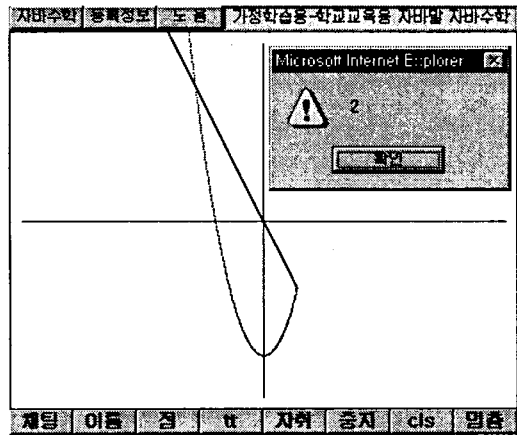
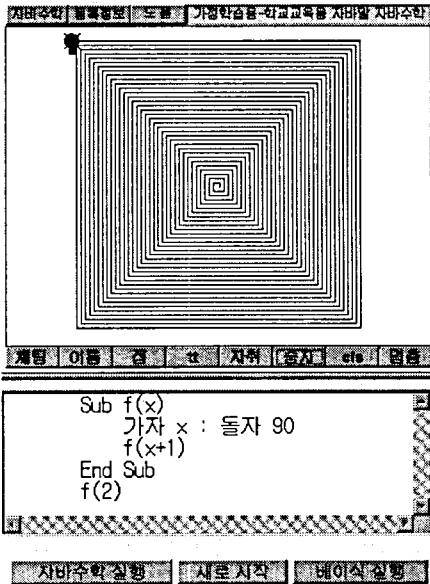
```
X=5 <-- 변수 X에 5를 기억시킨다
MsgBox(X) <-- 변수 X의 값을 출력박스에 출력시킨다

Sub f(X) <-- 함수 변수가 X인 함수를 정의
  MsgBox(X) <-- X의 값을 출력
End Sub <-- 함수 정의 끝
```

어떤 것이 더 수학적일까? 대답이 자명하다면 왜 로고의 문법만 고집할 것인가? 다시 말해서 로고의 문법을 가르치는 것이 목적이 아니고 로고의 거북 기하 환경을 통해 수학 학습을 유도하는 것

이 로고를 사용하는 일차적인 목표이다. 그렇다면 수학교육에서 로고의 문법만 고집한다는 것은 자기모순이다.

그렇다면 비주얼 베이식이 로고 언어를 대치할 수 있는가? 아니다. 베이식은 거북 기하 그래픽 환경을 지원하지 않는 것이다. 그렇다면 베이식의 기본 명령을 사용할 수 있는 로고를 만들면 되지 않겠는가? 다음은 자바수학으로 베이식과 로고 언어의 명령을 실행한 화면이다.

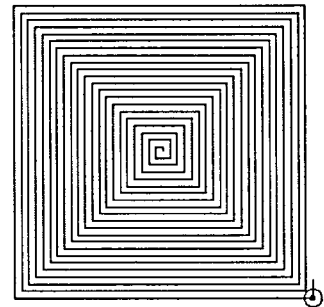


위의 오른쪽 화면은 $y = x^2 - 8$ 과 $y = -2x$ 의 그래프를 그린 것이고, 왼쪽은 점화수열과 관련된 함수 명령을 보자. 이러한 함수 명령을 통한 함수, 변수 개념, 알고리즘 학습에 대한 여러 연구가 있다. 예를 들어, 비주얼 베이식 명령과 거북 기하 명령으로 작성된 다음을 보자.

```

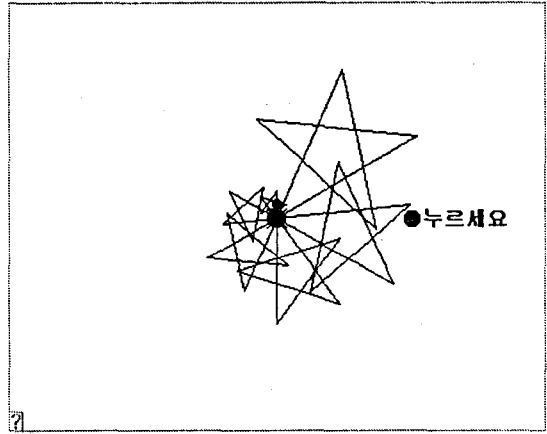
Sub f(x) ; 가자 x ; 돌자 90 ; f(x+2) ; End Sub
  
```

이 명령 후, f(2) 명령을 하면 어떤 일이 일어날까? 먼저 fd 2 ; rt 90 이 실행된 후, f(2+2) 가 실행된다. 그런데, f(4) 는 fd 4 ; rt 90 실행 후 f(4+2)를 실행한다. ... 즉, 초항이 2 이고 공차가 2 인 수열 a_n 에 대해 fd a_n 과 rt 90 이 계속되게 된다. 따라서 오른쪽과 같은 그림을 그리게 된다.



② 로고에 마우스를 사용할 수 있는 기능을 더한다.

로고에서는 모든 것을 명령을 통해 실행시킨다. 그러나 윈도우 환경에 익숙한 학생들에게는 마우스 클릭으로 명령을 실행시키는 환경이 필요할 것이다. 자바수학에서는 함수의 이름과 같은 단추를 화면에 만들도록 하고, 이 단추를 누르면 해당하는 함수가 작동하도록 설계되어 있다.



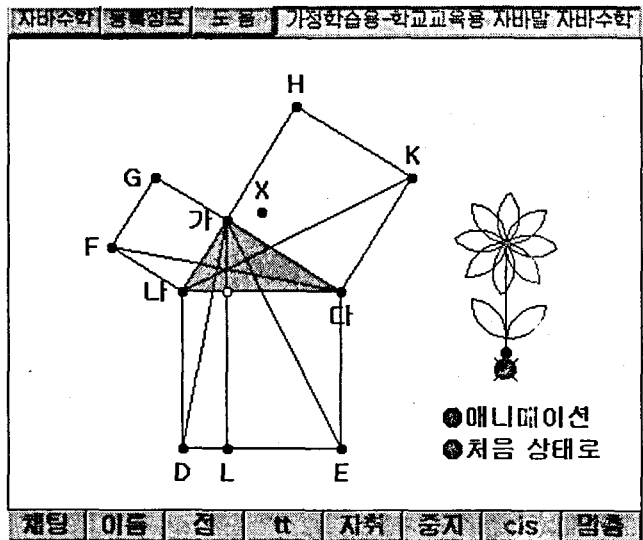
4. 인터넷 기반 움직이는 기하학습 마이크로월드 설계

```
def f(x) { repeat 5 { fd x ; rt 144 } };
def g() {x=10;
repeat 6 { f(x) ; rt 60 ; x=x+10 ;}}
button g() {'누르세요'; 50,0}
```

① 통합 소프트웨어 환경 (움직이는 기하 학습 환경 + 거북 기하학습 환경)

평면 도형을 그리는 로고의 한계를 극복하기 위해서 3D 도형을 그리는 로고도 나왔으나 널리 쓰이지는 않는다. 그런데 요사이의 움직이는 기하 소프트웨어가 교육 현장에 도입되고 있다. 로고 언어의 관점에서 본다면 움직이는 도형도 로고와 같이 명령으로 하면 여러 수정 등을 통해 사고력 교육도 생각할 수 있을 것이다.

요사이 기하 교육을 위해 쓰이는 Geometer's SketchPad (GSP) 또는 Cabri-Geometry가 제공하는 마우스와 메뉴 위주의 윈도 환경도 로고의 철학을 따라 마이크로월드로 만들고 또한 인터넷에서 돌아가도록 설계를 할 수 있다. 예를 들어, 다음의 자바수학 화면은 피타고라스 정리의 그림을 자바수학에서 그린 것이다. 여기서 마우스로 점 가를 움직이면 삼각



형 가나다가 직각 삼각형이 되도록 하면서 움직이게 된다. 여기서 점 X는 점 F와 K를 잇는 선분의 중점이다. 이 때, 점 가를 마우스로 빙빙 돌려도 점 X의 위치가 변하지 않는 것을 화면을 통해 볼 수 있다. 자바수학은 로고의 거북기하 환경과 움직이는 기하 환경을 자바 환경에서 통합하도록 설계되었다.

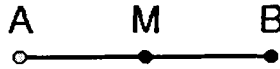
②. 통합 명령 환경 (마우스 조작 명령 + 키보드 명령문 명령)

자바말 자바수학에서는 요사이 학교 등에 쓰이고 있는 GSP 또는 Cabri-Geometry가 제공하는 마우스와 메뉴 위주의 환경을 로고의 철학을 따라 마이크로 월드로 만드려는 시도에서 시작하였다. 사실 GSP 등의 소프트웨어는 Graph Drawing 알고리즘을 기반으로 만들어진 소프트웨어로, 그래프란 vertex와 edge로 이루어진 수학적 대상이다 (7차 교육과정에 의해 고등학교 선택과목이 된 이산수학에 나오는 내용이다). Graph Drawing 알고리즘을 기반으로 하는 소프트웨어에서는 도형을 여러 개의 vertex로 나누고 vertex 들을 서로 edge로 연결하여 표현한다. 따라서 이산수학과 기하 교육 모두를 위해 Graph Drawing 알고리즘을 바탕으로 자바수학이 설계되었다.

또한 자바수학 마이크로월드에서는 학생들이 마우스로 도형을 작도한 그림을 명령문 형태로 바꾸어 저장하는 기능을 갖고 있다. 즉, 명령문 방식과 마우스 조작 방식 사이의 변환을 가능하게 하여 로고(LOGO) 에서와 같이 작도 활동을 순서대로 나열한 알고리즘이 명령문 형태로 정리된다. 예를 들어, 마우스로 다음과 같이 작도를 하고, 작도된 그림을 명령문으로 바꾸는 메뉴를 클릭하면 편집기에 명령이 쓰인다. 물론 화면을 청소한 후, 편집기에 쓰여진 명령을 실행시키면 다시 그림이 그려진다.

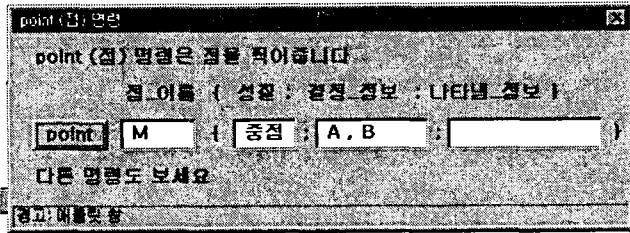
예를 들어, <http://javamath.snu.ac.kr> 주소의 움직이는 기하학습자료방에는 자바수학으로 만든 움직이는 기하 학습자료가 있다. 그 곳에서, 자바수학 화면 위에서 왼쪽 마우스를 두 번 연속해서 클릭 하여보자. 이 때, 점이 찍힌다. 이제 자바수학 화면 왼쪽 아래의 물음표 [?]를 마우스로 클릭 하여보자. 이 때, 빔 프로젝터 등을 위한 확대 화면이 나타나게 된다 (다시 돌아올 때에도 [?]를 누른다).

확대 화면에는 메뉴가 나타나는데, point (점) 메뉴를 택하고 다음과 같이 중점 명령을 하면 점 A와 B를 잇는 선분의 중점이 그려진다 (또는 점 A와 B를 잇는 선분 위에서 마우스 오른쪽 버튼을 두 번 연속해서 누르면 중점이 그려진다).



- point A, 0,50
- point B, 50,50
- point A, yellow
- line e, A, B
- circle c, A, B
- line e, none
- point A, none

LOGO 언어는 모든 것을 명령으로 한다. 그 이유 중 중요한 것은 학생이 운동장에서 정다각형 등을 그리는 행위를 의식화하게 해서 컴퓨터의 거북이에게 명령을 하게 하는 것이다. 이렇게 명령을 쓰고 실행을 시켰을 때, 원하는 결과가 나오면



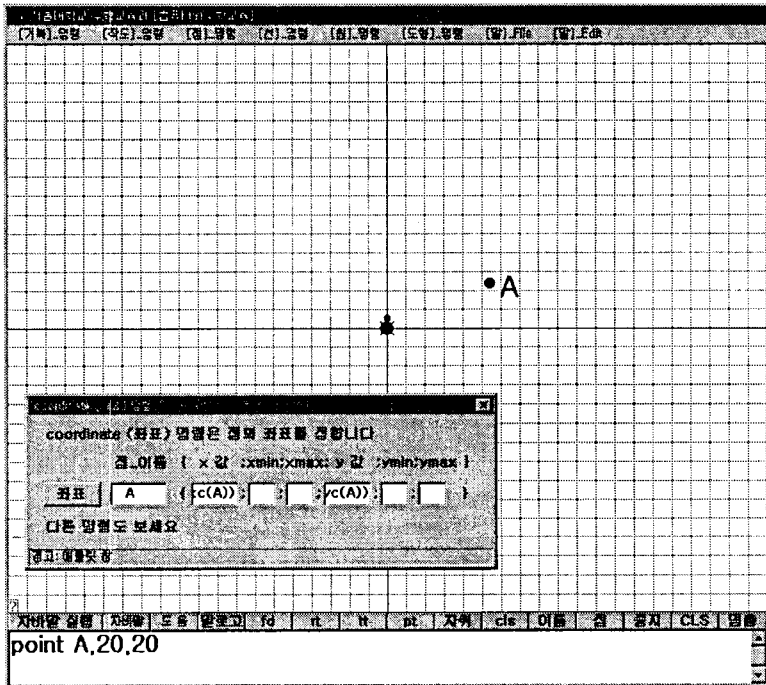
쓰여진 명령에서 실수 error를 찾게 된다. 이 후, 고쳐서 다시 실험하게 된다. 이와 같이, 로고는 사고 실험, 그리고 오류를 찾고 고칠 수 있는 학습환경을 제공한다. 같은 이유로 자바말에서는 명령으로 기하 작도하는 것을 권장한다. 물론 편의를 위해 마우스 작도도 지원한다. 다음은 명령에 의해 작도하는 예이다.

자바말 자바수학에서 그린 그림은 명령문으로 저장이 가능하다. 명령문 저장 방식은 인터넷 상의 통신 등에 편리하다. 자바수학에서의 명령은 키보드를 통한 명령 외에 마우스 조작으로 중요한 작도 명령의 일부가 실행되게 하였다. 대부분의 마우스 명령은 점, 선, 원, 빈 곳을 마우스 버튼으로 두 번 클릭하여 실행된다. 여기서 마우스 클릭의 순서는 키보드로 입력하는 명령과 순서가 일치하도록 하였다. 다음은 마우스 조작 명령의 표이다.

(주의:마우스 버튼 누르는 순서에서 마지막 버튼은 두 번 클릭하는 것이다)

마우스 버튼 누르는 순서	왼쪽 버튼	오른쪽 버튼	쉬프트 + 왼쪽	쉬프트 + 오른쪽	컨트롤 + 왼쪽	컨트롤 + 오른쪽
빈 곳 (한 번 누름)	점				좌표정보	
빈 곳 (두 번 누름)	점					
선 (한 번 누름)	선택				선의정보	선 이름
선 (두 번 누름)	선위점	중점			선의색	선지움
원 (한 번 누름)	선택				원의정보	원 이름
원 (두 번 누름)	원위점	중심			원의 색	원 지움
점 (한 번 누름)	선택				점의정보	점 이름
점 (두 번 누름)					점의 색	점 지움
점 - 점		선분	연장점	원		
점 - 점 - 점		각이등분	수선, 받	부채꼴		
점 - 점 - 빈 곳			정사각형	정삼각형		
점 - 점 - 점 - 빈 곳			사변형	외접원		
점 - 선			사변형	원		
점 - 점 - 선			작도점			

화면의 크기와 좌표를 나타내기 위해 window 명령과 axis 명령이 동도입되었다. 예를 들어, window 50을 하면 원점과 화면 오른쪽의 거리가 50으로 된다. 또한 axis 5 하면 5 간격으로 좌표 모눈종이가 만들어진다. 다음은 axis 5 명령으로 모눈종이를 만든 후, 좌표 명령으로 점 A가 정수값 만을 좌표로 갖도록 한 화면의 모습이다. 여기에 쓰이는 좌표 명령에 대해서는 바로 뒤에서 설명한다.

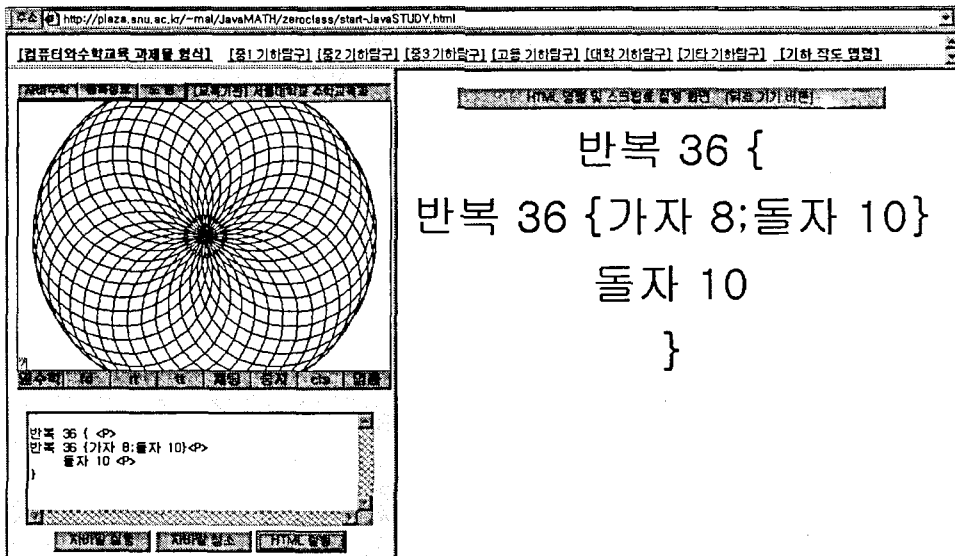


모눈을 만든 후, 도형을 그리고 점 위에서 Shift 키를 누르고 마우스 왼쪽 버튼을 누르면 해당 점의 엑스 좌표가 나타난다. 자바수학에서의 명령 방식은 첫째 마우스로, 둘째 화면 위에 있는 메뉴를 통한 명령 상자로, 그리고 마지막으로 화면 밑 부분에 있는 편집기에 명령을 입력한 후 실행시켜 작도 명령을 실행하게 된다.

③ 통합 전자교과서 환경 (탐구 Learning + 다이내믹 Teaching).

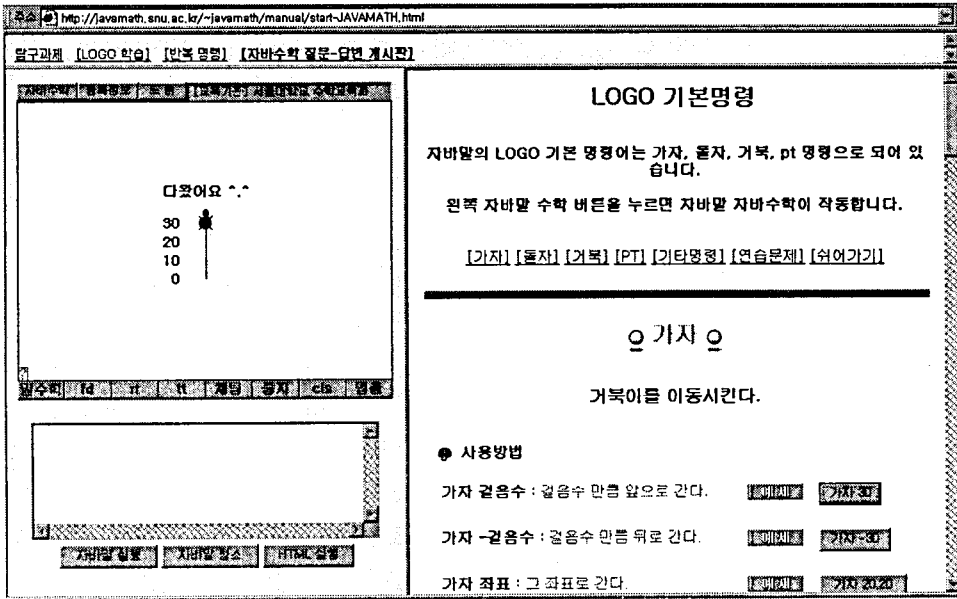
자바수학은 HTML 환경에서 JavaScript 등과 통신하는 Java 소프트웨어이다. 따라서 자바수학은 HTML 환경을 통해 탐구학습용 내용을 전하고 또 학생이 HTML 환경에서 조작이 가능하다. 자바수학 탐구환경은 모니터 화면을 크게 양분하여 오른쪽에는 학습 내용을 그리고 왼쪽에는 자바수학을 배치하였고, 이 두 환경사이의 통신을 통해 교수-학습이 가능하도록 설계되어 있다. 특별히 교실 수업을 위해 자바수학 화면의 확대 기능이 있는데, 확대 화면에는 자바수학의 여러 기능이 추가되어 있다.

자바수학 밑에는 편집기가 있는데, 이 곳에 명령을 쓰고 자바수학을 실행시킬 수도 있고, 또한 이곳에 HTML 명령을 쓴 후 오른쪽 화면에 확대하여 나타나게 할 수 있다. 다음 화면은 편집기에 명령을 쓴 후, 자바수학으로 실행시키고 또 그 것을 오른쪽 화면에 나타나게 한 것이다.



여기서 학습 내용을 간단히 파워포인트와 같이 화면에 비출 수 있는 기능을 활용하면 다이내믹한 교수 환경을 만들 수 있다. 한편, 자바수학 인터넷 환경은 혼자서 학습하는 원격 학습도 고려하여 전자교과서를 지원하는 기능을 자바스크립트를 통해 구현하고 있다. 예를 들어, 다음과 같은 서울대

영재센터의 자바수학 실험실의 한 화면을 보자. 여기에서는 오른쪽에 쓰여진 명령문의 설명을 단추를 눌러 왼쪽의 자바수학에서 확인하며 학습하도록 화면이 구성되어 있다.



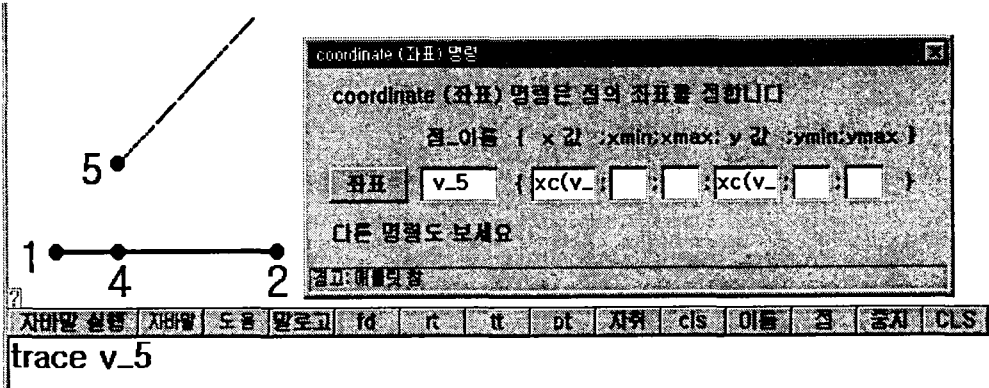
④. 통합 수학 환경 (점의 성질에 대한 coordinate, label 명령을 도입).

점의 좌표에 대한 제한점 (constraint)을 주는 좌표 명령을 도입하여 움직이는 마이크로월드에서 수학적 환경을 만들었다. 예를 들어, 점 A를 만든 후, coordinate A { yc(A) } 명령을 하면 점 A의 엑스 좌표는 점 A의 와이 좌표인 yc(A)와 같아지며, 따라서 이 점은 $y=x$ 직선 위에서 움직이게 된다. 이와 같이 좌표 명령의 도입은 기하 소프트웨어에서 함수와 변수 등의 학습도 가능하게 할 수 있다.

예를 들어, 정의역이 주어진 함수 $y=x+30$ 의 그래프를 그려보자. 이를 위해 정의역의 최소값에 해당하는 값이 점 v_1의 엑스 좌표라 하고, 정의역의 최대값에 해당하는 값을 점 v_2의 엑스 좌표라 하여 마우스 두 번 클릭하는 명령으로 점 v_1, v_2를 만든다 (화면에는 점의 이름으로 1, 2가 나온다). 이제 마우스 오른쪽 버튼으로 v_1과 v_2를 잇는 선분을 만든다. 이후, 선분 위에서 마우스 왼쪽 버튼을 두 번 클릭하면 선분 위에서 움직이는 점이 생기는데 그 점의 이름을 v_4라 하자.

참고: 마우스 왼쪽 버튼 두 번 클릭하면 점이 생긴다. 선분 위에서 하면 선분 위를 지나는 점, 원 위에서 하면 원 위를 지나는 점, 두 직선의 교점에서 하면 교점이 각각 그려진다. 그 외에 shift, control 키 등을 누르고 마우스 왼쪽과 오른쪽 버튼을 눌러 다양한 것을 그릴 수 있다.

이제 마우스로 점 v_5를 만든 후, 화면 위의 [점]_명령 메뉴에서 coordinate 명령을 택하면 아래와 같은 명령 상자가 나온다.



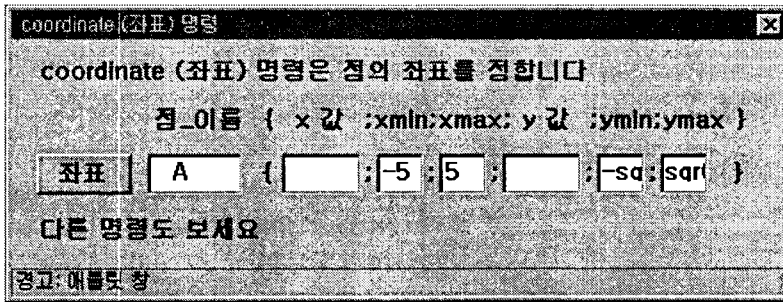
위의 명령 상자에서, v_5의 x 값은 xc(v_4)로 주어졌다 (이 말은 v_5의 엑스 좌표 값은 점 v_4의 엑스 좌표와 같다는 것이다). 또 y 값은 xc(v_5)+30으로 주어졌다 (이 말은, v_5의 와이 좌표가 자신의 엑스 좌표 값 더하기 30 즉 $y=x+30$ 이라는 말이다). 이와 같이 v_5에 좌표 명령을 한 후, 점 v_4를 마우스로 움직이면 정의역 안에서 v_4가 움직이며 대응하는 점 v_5는 v_4의 움직임에 따라 $y=x+30$ 직선 상에서 움직이게 된다. 이 때, 화면에서 보듯이 trace v_5 명령을 하면 v_5가 움직이며 자취를 남긴다. 따라서 이 경우 $y=x+30$ 의 그래프의 자취가 생긴다.

참고: 점 A와 B와 C에 대해, xc(A)는 점 A의 엑스 좌표 값을, yc(A)는 와이 좌표 값을, mc(A,B)는 점 A와 B의 거리를, mc(A,B,C)는 삼각형 ABC의 면적을 나타낸다. 이 외에 다양한 기하작도 관련 함수가 있다.

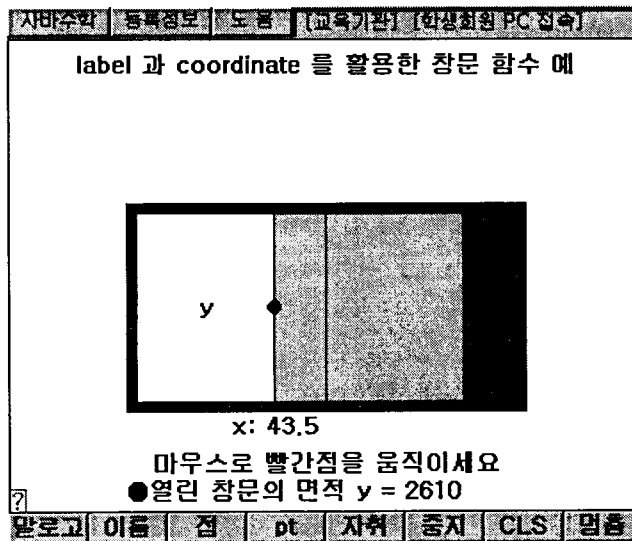
좌표 명령으로 움직이는 점의 활동 반경을 정할 수도 있다. 예를 들어, 다음 명령을 하면 점 A는 원점을 중심으로 하는 반지름이 5인 원 안에서만 움직이게 된다.

```
coordinate A { ; -5; 5; ; -sqr(25-xc(A)*xc(A)); sqr(25-xc(A)*xc(A)) }
```

이 명령을 좌표 명령 상자에서 하면 다음과 같다. 여기서, ymax는 점 A의 와이 좌표의 최소값을 나타내는데, 원 안에 있으려면 점 A의 y 좌표의 최대값은 $\sqrt{25-x^2}$ 이다. 따라서 다음 명령 상자의 ymax 부분에 $\text{sqr}(25 - \text{xc}(A)*\text{xc}(A))$ 라고 명령한다.



점의 label 명령은 점이 나타내는 이름 등의 값을 변화시킬 수 있다. 예를 들어, 다음의 예는 변수 x 에 대한 면적 함수 y 값의 대응을 보여주는 것이다. 여기서 변수 x 에 해당하는 점을 마우스로 움직이면 그 점의 x 값이 변하며 또 화면에서 열린 창문의 면적이 y 값으로 나타내진다.



5. 맺는 말

컴퓨터를 통한 수학교육에 대한 지금까지의 많은 연구는 지금 있는 이런 저런 소프트웨어를 활용하여 어떻게 수학 내용을 가르는가? 라는 것이었다. 그러나 소프트웨어에 의존하는 컴퓨터와 수학교육 연구가 그 한계를 갖고 있음을 누구나 알고 있다.

우리도 수학교육에 적합한 소프트웨어 환경을 만들 수 있다. 문제는 일본에서는 일본말로 작동하는 LOGO를 사용하는데 우리 나라에서는 오히려 우리말로 작동하는 것은 로고가 아니라며 외제 로

고만 강조하는 것이 현실이다. GSP, Cabri 등과 같은 움직이는 기하환경도 마찬가지이다. 7차 교육과정과 정보화가 결실을 보려면 네트워크와 인터넷 패러다임을 바탕으로 양질의 교육용 콘텐츠와 소프트웨어 특히 수학 탐구가 가능한 마이크로월드가 개발되어 학생과 선생님 모두가 사용할 수 있어야 한다.

참 고 문 헌

- 김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 심규선 (1997). 교육용 프로그래밍 언어 Mal을 이용한 함수개념 지도, 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- 이종영 (1999). 컴퓨터 기반 수학 학습-지도 환경에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 전영국·주미 (1998). 기하문제 해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습의 신장, 수학교육학연구발표대회논문집, pp.413-428, 서울: 대한수학교육학회.
- Abelson, H. & DiSessa, A. (1984). *Turtle Geometry: The computer as a Medium for Exploring Mathematics*, Cambridge: The MIT press.
- Hoyles, C & Noss, R. (1992). *Learning Mathematics and LOGO*, Cambridge : The MIT Press.