토릭렌즈의 표면 곡률 특성 연구

박상안 · 김용근
동강대학 안경광학과

두 개의 토로이드 면이 서로 직각인 토릭렌즈의 두 곡률의 합 $(C_x + C_y)$는

$$C_x + C_y = \frac{x^2 + y^2}{2r_1} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

이며, 사축인 토릭렌즈의 두 곡률의 합 $(C_a + C_b)$은

$$(C_a + C_b) = \frac{x^2\cos^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{x^2\cos^2\alpha_2}{2r_2} + \frac{y^2\sin^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{y^2\sin^2\alpha_2}{2r_2}$$

이다. $(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)_{90}$ 는 구면의 곡률 합 $(S_{S_1} + S_{S_2})$과 같은 값을 얻었다. 표면 곡률(Cx, Cy) 값을 포함한 사축 토릭렌즈의 합성 굴절력의 parameter S, C, θ 값을 다음과 같다.

$$S = (n-1)\left[\frac{C_x}{x^2} + \frac{C_y}{y^2}\right] - \frac{C}{2}, \qquad C = -\frac{2(n-1)}{\sin 2\theta}\left[\frac{C_x}{x^2} + \frac{C_y}{y^2}\right]$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[-\frac{C_x y^2 \sin 2\theta_1 + C_y x^2 \sin 2\theta_2}{C_x y^2 \cos 2\theta_1 + C_y x^2 \cos 2\theta_2}\right]$$

Properties of a Surface Curvature in Toric Lens

Sang - An Park · Yong - Geun Kim
Department of Ophthalmic Optics, Dongkang College

We obtained the sum of two curvature $(C_x + C_y)$ in toric lens which two toroidal surface is the right angle each other,

$$C_x + C_y = \frac{x^2 + y^2}{2r_1} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

and the sum of two curvature $(C_a + C_b)$ in toric lens about the cross angle,

$$(C_a + C_b) = \frac{x^2\cos^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{x^2\cos^2\alpha_2}{2r_2} + \frac{y^2\sin^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{y^2\sin^2\alpha_2}{2r_2}$$

and claculated the parameter S, C, θ of a combination power in toric lens of the cross angle including surface curvature (C_x, C_y) values,

$$S = (n-1)\left[\frac{C_x}{x^2} + \frac{C_y}{y^2}\right] - \frac{C}{2}, \qquad C = -\frac{2(n-1)}{\sin 2\theta}\left[\frac{C_x}{x^2} + \frac{C_y}{y^2}\right]$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[-\frac{C_x y^2 \sin 2\theta_1 + C_y x^2 \sin 2\theta_2}{C_x y^2 \cos 2\theta_1 + C_y x^2 \cos 2\theta_2}\right]$$

I 서 론

눈의 난시 교정용으로 방향성에 따라 굴절력이 변화하는 토릭렌즈가 사용되고 있다. 토릭렌즈는 원점을 중심으로 한 경축의 방향성에 따라 곡률 반경의 형태가 변하는 구조를 갖고 있다. 이런 구조는 최대-최소의 곡률을 갖는 토로이드 면(toroidal surface)을 이루며 이것은 곡률(cuveratute)로써 쉽게 설명 할 수가 있다. 구면인 경우 최대-최소 곡률이 같은 토로이드 면이며. 원주는 최소 곡률이 0 인 형태의 특별한 경우이다. 곡률은 원점을 기준으로 위치에 따른 곡률 반경의 비율 형태로 정의됨으로 렌즈 상의 위치에 대한 기하학적 구조를 쉽게 알 수 있는 parameter 중 하나이다[1-3]. 토로이드 면으로 이루어진 토릭렌즈에 대해 곡률을 이용한 표면의 기하학적 구조와 굴절력에 대한 연구가 없는 실정이다.

본 연구는 이런 취지에서 원주 상의 곡률로부터 두 개의 원주가 서로 직각인 경우와 일정한 일반 각을 이룬 경우에 2개 곡률 값의 합들의 의미와 이들 관계를 밝히고, 토로이드 면을 이룬 토릭렌즈에 대해 곡률 값을 포함한 굴절력 값을 유도하여 곡률이 굴절력에 미치는 영향을 규명하였다.

II 본 론

1. Toric 렌즈의 곡률 분석

토릭렌즈는 2개의 원주로 이루어졌으며, 이에 대한 표면의 기하학적 구조를 분석하기 위해 곡률(curvature)의 정의로부터 출발하면, 구에 대한 곡률(S_s)는 다음과 같이 주어진다.

$$S_s = \frac{y^2 + x^2}{2r} \qquad \cdots\cdots (1)$$

원주 면의 경우에는 다음과 같이 주어진다.

$$C_y = \frac{y^2}{2r} \qquad \cdots\cdots (2)$$

원주 축이 x 축에 평행이었을 때는

$$C_x = \frac{x^2}{2r} \qquad \cdots\cdots (3)$$

이다. 두 원주 면이 서로 직각으로 놓여 있고, 한 평면 접촉 한 경우 두 곡률의 합은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_x + C_y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r} = \frac{x^2 + y^2}{2r} = S_s \qquad \cdots\cdots (4)$$

여기서 두 원주의 곡률 반경이 같다면 구면이 된다. 원주 곡률 반경이 다르다면 다음과 같다.

$$C_x + C_y = \frac{x^2}{2r_1} + \frac{y^2}{2r_2} \qquad \cdots\cdots (5)$$

여기서 3차 비점수차를 기술하기 위해서는 타원 함수를 사용해야 할 것이다. 이러한 타원 함수는 다음과 같이 주어진 두 개의 항을 분리함으로써 구면 함수와 원주 함수의 합으로 표현 할 수 있다.

$$C_x + C_y = \frac{x^2 + y^2}{2r_1} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad \cdots\cdots (6)$$

그림 1에서는 두 개 토로이드 면이 서로 수직으로 놓인 경우로 비점수차 형태의 광 경로가 발생함을 볼 수 있다.

이와 같이 두 개의 원주 렌즈로 이루어진 구조상의 기하학적 특성을 알 수 있는 곡률 분포를 보면 그림 2와 같다. 원통 렌즈를 정의한 같은 함몰 윤곽선은 식(1)와 식(2)로부터 다음과 같은 간격으로 된 공간의 평행선을 의미한다.

$$x = \sqrt{2rC_x} \quad \text{and} \quad y = \sqrt{2rC_y} \qquad \cdots\cdots (7)$$

그림 2는 4개의 임의의 단위에 대한 표면 곡률 분포를 나타낸 것으로 타원형태로 분포함을 볼 수 있다.

다음으로 두 개의 토로이드 면이 서로 수직이 아닌 경우로, 그림 3과 같이 각들 관계를 보였다. 두 원주 축이 각 α 를 유지하고, x축 상에서 각각 θ_1과 θ_2를 유지하는 형태이다. 좌표에서 몇 개의 각 θ에 의한 축의 회전은 새

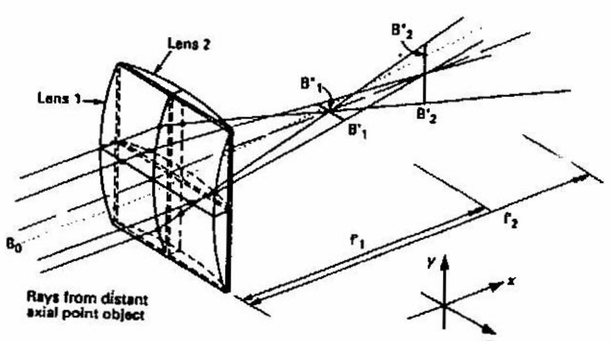

그림 1. 두 개의 원주로 결합한 토릭렌즈의 광 경로

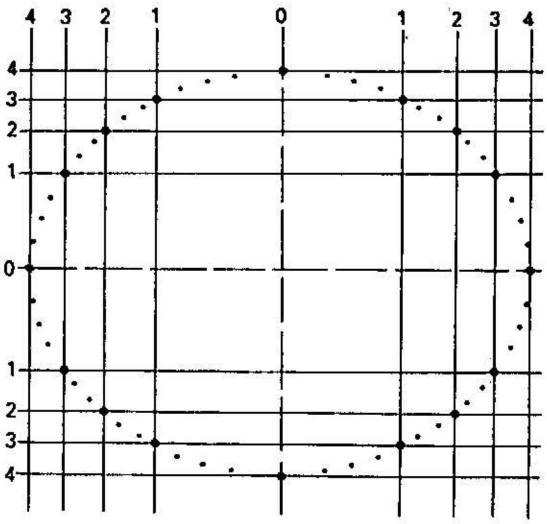

그림 2. 두 개의 원주로 결합한 토릭렌즈 상의 표면 곡률 분포

로운 조건에 대해서 앞의 x가 $x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1$로 대체되어야 하며, 같은 방법으로 y는 $x\sin\theta + y\cos\theta$로 되어야 한다는 것을 의미한다. 그림 3의 두 원주 렌즈가 z축에 평행한 것으로부터 회전되었기 때문에 이것들의 초기 방정식은 식(2),(3)처럼 쓸 수 있다. 이것들을 다시 쓰면,

$$C_a = \frac{(x\sin\theta_1 - y\cos\theta_1)^2}{2r_1}$$

$$C_b = \frac{(x\sin\theta_2 - y\cos\theta_2)^2}{2r_2} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

두 렌즈의 광학적 효과를 결합한 평면으로부터의 총 곡률의 합은 $C_a + C_b$이다.

$$C_a + C_b = \frac{x^2\sin^2\theta_1}{2r_1} + \frac{2yx\sin\theta_1\cos\theta_1}{2r_1} + \frac{y^2\cos^2\theta_1}{2r_1} + \frac{x^2\sin^2\theta_2}{2r_2} + \frac{2yx\sin\theta_2\cos\theta_2}{2r_2} + \frac{y^2\cos^2\theta_2}{2r_2} \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

이것은 타원에 대한 일반 방정식 형태를 이루고 있으며, 축을 선택한다면 다음과 같이 간단하게 바꿀 수 있다.

$$\frac{2yx\sin\theta_1\cos\theta_1}{2r_1} + \frac{2yx\sin\theta_2\cos\theta_2}{2r_2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

또는

$$\frac{\sin 2\theta_1}{2r_1} + \frac{\sin 2\theta_2}{2r_2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

이들 사이의 각이 α이기 때문에 $\theta_1 - \theta_3$ 그리고 $\theta_2 - \theta_3$로 대체할 수 있기 때문에 축들을 회전할 수 있다. $\theta_1 - \theta_3 = \alpha_1$ 그리고 $\theta_2 - \theta_3 = \alpha_2$라 가정하면, 식(9)처럼 쓸 수 있다.

$$C_a + C_b = \frac{x^2\sin^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{x^2\sin^2\alpha_2}{2r_2} + \frac{y^2\cos^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{y^2\cos^2\alpha_2}{2r_2} \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

이것은 알 수 없는 축에 대한 알려져 있지 않는 경선각에서의 광학적 효과이다. 식 (12)에 90°에서의 경선 각의 광학적 효과를 계산한다. 이 경우에 대해서 α_1과 α_2를 90°로 변화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(C_a + C_b)_{90^\circ} &= \frac{x^2\sin^2(\alpha_1 + 90^\circ)}{2r_1} + \frac{x^2\sin^2(\alpha_2 + 90^\circ)}{2r_2} \\ &\quad + \frac{y^2\cos^2(\alpha_1 + 90^\circ)}{2r_1} + \frac{y^2\cos^2(\alpha_2 - 90^\circ)}{2r_2} \\ &= \frac{x^2\cos^2\alpha_1}{2r_1} + \frac{x^2\cos^2\alpha_2}{2r_2} + \frac{y^2\sin^2\alpha_1}{2r_1} \\ &\quad + \frac{y^2\sin^2\alpha_2}{2r_2} \quad \cdots\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

식(12)와 식(13)에 대한 의미는 이것들을 모두 합하면 어떤 θ값에 대해서 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이 되기 때문에 모든 각들이 사라지게 된다는 것이다.

$$\begin{aligned}C_a + C_b + (C_a + C_b)_{90} &= \frac{x^2}{2r_1} + \frac{x^2}{2r_2} + \frac{y^2}{2r_1} + \frac{y^2}{2r_2} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{2r_1} + \frac{x^2 + y^2}{2r_2} \\ &= S_{C_1} + S_{C_2}\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

식(14)는 직각 경선과 짝을 이루기 때문에 광학적 효과의 합은 항상 일정하게 된다. 이 같은 이유는 어느 일반적 토로이드 면이 선택된 경선에서 변하는 곡률을 가진다는 것을 의미한다. 예를 들어 만약 어떤 두 개의 경선이 직각이라면 이들 곡률의 합은 그 면에 대해서 일정하다. 즉 곡률이 x^2에 비례하기 때문이다. 또한 삼각함수에서 회전축은 $(x\cos\theta)^2$항으로 주어지고, $\cos(\theta + 90) = \sin\theta$ 그리고 $\sin^2\theta + \cos 2\theta = 1$되기 때문이다. 모든 토로이드 면은 이러한 모양을 가진다. 그 이유는 비구면의 off-axis 부분을 가지기 때문이다. 면의 모든 곡률처럼 어떤 직각 곡률의 합을 다루는데 이용된다. 두 개의 토로이드 면이 서로 수직이 아닌 α 각인 경우 4개의 임의의 단위에 대한 표면 곡

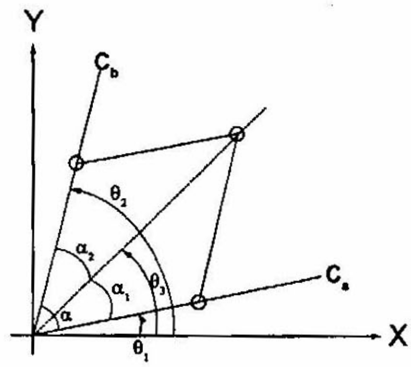

그림 3. 두 원주렌즈가 α각을 이룬 경우 표면 곡률 관계

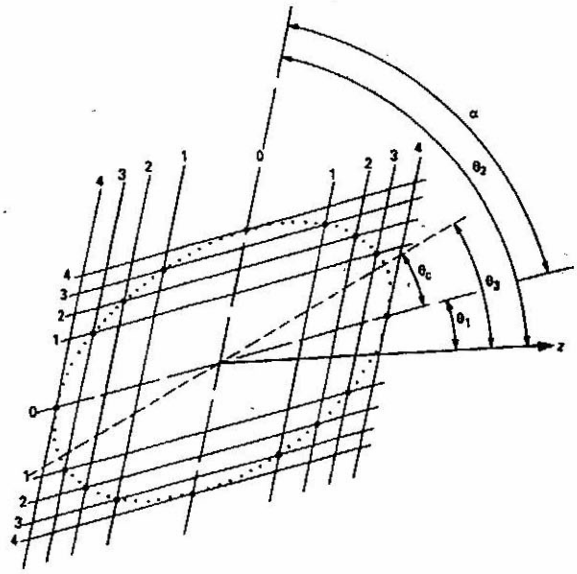

그림 4. 두 원주렌즈가 α각을 이룬 경우 표면 곡률 분포

률 분포를 그림 4에 보였다. 이것도 그림 2와 같이 타원형으로 분포함을 볼 수 있다.

2. 곡률을 포함한 토릭렌즈의 굴절력

앞에서는 토릭렌즈 표면 곡률의 기하학적 특성을 보아왔다. 2개의 원주렌즈로 결합된 토릭렌즈는 그림 1과 같이 원주렌즈 앞면이나 뒷면 중 한 개의 면이 평면으로 된 2개의 원주 렌즈는 각각 1개 면에 대한 면 굴절력 만이 발생한다. 그러므로 제1원주렌즈에 대한 면 굴절력(D_1)을 굴절률(n), 표면 곡률(C_x), 곡률반경(r_1)으로 표현하면,

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{2C_x(n-1)}{x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

이며, 같은 방법으로 제2 원주렌즈에 대한 면 굴절력 D_2는

$$D_2 = \frac{n-1}{r_2} = \frac{2C_y(n-1)}{y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

가 된다. 두 개의 원주렌즈가 그림 5와 같이 놓여 있는 경우 표면 곡률(C_x, C_y)이 포함된 합성 굴절력을 구하자. 두 개의 원주렌즈는 S-C 표기법으로 나타내면

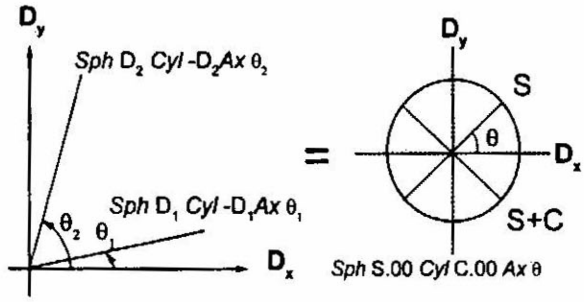

그림 5. 두 원주렌즈의 합성 굴절력

$$\begin{aligned} &Sph\ D_1\ Dptr \frown Cyl\ -D_1\ Dptr.\ Ax\,\theta_1 \\ &Sph\ D_2\ Dptr \frown Cyl\ -D_2\ Dptr.\ Ax\,\theta_2 \quad \cdots\cdots(17) \end{aligned}$$

의 두 매의 토릭렌즈를 합성하여 얻은 최종 합성 토릭렌즈를

$$Sph\ S\ Dptr \frown Cyl\ C\ Dptr.\ Ax\,\theta \cdots\cdots\cdots(18)$$

로 두면 곡률을 포함한 S. C. θ대해서 풀어보면 제1, 제2 렌즈의 굴절력 matrix는

$$[D_1] = \begin{bmatrix} D_1 + -D_1\sin^2\theta_1 & D_1\sin\theta_1\cos\theta_1 \\ D_1\sin\theta_1\cos\theta_1 & D_1 + -D_1\sin^2\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} D_2 + -D_2\sin^2\theta_2 & D_2\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ D_2\sin\theta_2\cos\theta_2 & D_2 + -D_2\sin^2\theta_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(19)$$

따라서 합성 굴절력 matrix는

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 + D_2 + \ -D_1\sin^2\theta_1 + \ -D_1\sin^2\theta_1 + \ -D_2\sin^2\theta_2 & -D_1\sin\theta_1\cos\theta_1 - D_2\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ D_1\sin\theta_1\cos\theta_1 + D_2\sin\theta_2\cos\theta_2 & S_1 + S_2 + D_1\cos^2\theta_1 + D_2\cos^2\theta_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots(20)$$

여기서 각각의 성분은

$$\begin{aligned} D_{xx} &= S_1 + S_2 + -D_1\sin^2\theta_1 + -D_2\sin^2\theta_2 \\ D_{xy} &= D_{yx} = (D_1\sin\theta_1\cos\theta_1 + D_2\sin\theta_2\cos\theta_2) \\ D_{yy} &= D_1 + D_2 + -D_1\cos^2\theta_1 + -D_2\cos^2\theta_2 \cdots\cdots(21) \end{aligned}$$

이 되어 이 matrix를 풀면

$$\tan\theta=\frac{S-D_{xx}}{D_{xy}}$$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta)}$$
$$=\frac{2(2D_{xy})[(D_{xx}-D_{yy})+C]}{[(D_{xx}-D_{yy})+C]^2-(2D_{xy})^2} \quad \cdots\cdots(22)$$

여기서 $D_{xx}-D_{yy}=M, 2D_{xy}=N$ 으로 두고, C를 구하면

$$C=-\sqrt{(D_{xx}+D_{yy})^2-4(D_{xx}D_{yy}-D_{xy}^2)}$$
$$=-\sqrt{(D_{xx}-D_{yy})^2+(2D_{xy})^2} \quad \cdots\cdots(23)$$
$$=-\sqrt{M^2+N^2}$$

이고,

$$\tan 2\theta=\frac{N}{M} \quad \cdots\cdots(24)$$

가 된다. 따라서 M 과 N은

$$M=D_{xx}-D_{yy}$$
$$=-(-D_1\cos 2\theta_1+\ -D_2\cos 2\theta_2) \quad \cdots\cdots(25)$$

$$N=2D_{xy}$$
$$=-(-D_1\sin 2\theta_1+\ -D_2\sin 2\theta_2) \quad \cdots\cdots(26)$$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{-D_1\sin 2\theta_1+\ -D_2\sin 2\theta_2}{-D_1\cos 2\theta_1+\ -D_2\cos 2\theta_2} \quad \cdots\cdots(27)$$

다음은 C에 관하여 풀면 이미 윗 식의 유도과정에서

$$-D=\sqrt{M^2+N^2}$$
$$\tan 2\theta=\frac{N}{M} \quad \cdots\cdots(28)$$

의 관계가 있으므로

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{-D_1\sin 2\theta_1+\ -D_2\sin 2\theta_2}{-D_1\cos 2\theta_1+\ -D_2\cos 2\theta_2}\right].$$
$$\sin 2\theta=\frac{N}{-C}$$
$$C=\frac{-N}{\sin 2\theta}$$
$$C=\frac{-D_1\sin 2\theta_1+\ -D_2\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta} \quad \cdots\cdots(29)$$

마지막으로 S를 구하면

$$S=\frac{D_{xx}+D_{yy}-C}{2} \quad \cdots\cdots(30)$$
$$=\frac{1}{2}D_1+\frac{1}{2}D_2-\frac{C}{2}$$

결국 합성 굴절력에 관계된 합성 S, C, θ값은 식 (27)(29)(30)에 보였다. 토릭렌즈에서 표면 곡률(C_x, C_y)를 포함한 굴절력 식으로 나타내 보면 θ값은

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[-\frac{C_x y^2\sin 2\theta_1+C_y x^2\sin 2\theta_2}{C_x y^2\cos 2\theta_1+C_y x^2\cos 2\theta_2}\right] \quad \cdots(31)$$

이면 C 값은

$$C=-\frac{2(n-1)}{\sin 2\theta}\left[\frac{C_x}{x^2}+\frac{C_y}{y^2}\right] \quad \cdots\cdots(32)$$

마지막으로 S값은

$$S=(n-1)\left[\frac{C_x}{x^2}+\frac{C_y}{y^2}\right]-\frac{C}{2} \quad \cdots\cdots(33)$$

으로부터 결국 *Sph* S *Dptr* ⌒ *Cyl* C *Dptr*, *Ax* θ을 얻을 수 있다.

Ⅲ 결 론

두 개의 토로이드 면으로 이루워진 토릭렌즈에 대한 표면 곡률의 관계(C_x+C_y)에서 토로이드 면이 서로 수직인 경우

$$C_x+C_y=\frac{x^2+y^2}{2r_1}+\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

을 얻었고, 두 개의 토로이드 면이 α 각을 이룬 경우는

$$C_x+C_y=\frac{x^2\sin^2\alpha_1}{2r_1}+\frac{x^2\sin^2\alpha_2}{2r_2}+\frac{y^2\cos^2\alpha_1}{2r_1}$$
$$+\frac{y^2\cos^2\alpha_2}{2r_2}$$

이며, (C_x+C_y) 와 90° 회전각 $(C_x+C_y)_{90^\circ}$ 의 합은

$$C_1+C_2+(C_1+C_2)_{90^\circ}=S_{C_1}+S_{C_2}$$

값으로 각 구면 곡률의 합과 같음을 알 수 있다. 또한 두

토로이드 면굴절력이 D_1과 D_2가 직각이 아닌 경우에, 표면 곡률을 포함한 토릭렌즈의 굴절력 관계 parameter S, C, θ 값은 다음과 같이 얻었다.

$$S=(n-1)\left[\frac{C_x}{x^2}+\frac{C_y}{y^2}\right]-\frac{C}{2}$$

$$C=-\frac{2(n-1)}{\sin 2\theta}\left[\frac{C_x}{x^2}+\frac{C_y}{y^2}\right]$$

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[-\frac{C_x y^2 \sin 2\theta_1+C_y x^2 \sin 2\theta_2}{C_x y^2 \cos 2\theta_1+C_y x^2 \cos 2\theta_2}\right]$$

참고문헌

[1] A.G Bennett, Clinical Visual Optics, (Butterworths, 1990)

[2] D. Malacara, Optical Shop Testing, (Wiley-Inter-science, pub., N.Y., 1991), p 752

[3] M.Carmen, Apply Opt., 25, 3008(1986)