

## 직교이방성 함유체를 포함하는 등방성 기지에서의 탄성과 산란 수치해석 모델

### Numerical Modeling of Elastic Wave Scattering in an Isotropic Medium Containing an Orthotropic Inclusion

이정기\*  
 Jung-Ki Lee\*

**초 록** 다수의 이방성 함유체를 포함하는 등방성 무한고체에서 이들 이방성 함유체에 의한 탄성과의 산란문제 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 새로운 수치해석 방법으로 체적 적분방정식법을 제시하였다. 체적 적분방정식법에서는 등방성 무한고체에서의 Green 함수만 구할 수 있으면 이방성 함유체에서의 Green 함수를 구하지 않고서도 탄성과 산란문제 해석이 가능해지는 장점이 있다. 이 방법은 임의의 형상을 갖는 다수의 이방성 함유체가 포함된 일반적인 탄성동역학 문제 해석에도 적용이 가능하다. 한 개의 직교이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서 직교이방성 함유체에 의한 종파(P파) 및 횡파(SV파) 산란문제 해석을 통하여, 체적 적분방정식법이 일반적인 이방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성과 산란문제 해석에 있어 정확하고 효과적인 수치해석 방법임을 입증하였다.

**주요용어:** 산란, 직교이방성 함유체, 체적 적분방정식법, 경계요소법

**Abstract** A volume integral equation method(VIEM) is applied for the effective analysis of elastic wave scattering problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions. It should be noted that this newly developed numerical method does not require the Green's function for anisotropic inclusions to solve this class of problems since only the Green's function for the unbounded isotropic matrix is involved in their formulation for the analysis. This new method can also be applied to general two-dimensional elastodynamic problems with arbitrary shapes and number of anisotropic inclusions. Through the analysis of plane elastodynamic problems in unbounded isotropic matrix with an orthotropic inclusion, it is established that this new method is very accurate and effective for solving plane elastic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions.

**Keywords:** scattering, orthotropic inclusion, volume integral equation method, boundary integral equation method

#### 1. 서 론

복합재료의 구성물들은 일반적으로 등방성 재료로 이루어진다. 그러나, 기존의 금속재료에 비하여 비강성, 비강도 및 내열성, 내마모성등이 뛰어나 항공분야에 사용되고 있는 금속기지 복합재료에서는 Ti 기지는 등방성 재

료로 이루어지지만, SiC 섬유는 강한 이방성 재료로 이루어진다[1]. 따라서, 복합재료에서의 파손 메카니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 등방성 함유체 뿐만 아니라 이방성 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성동역학 해석이 필요하다.

본 논문에서는 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성

함유체 및 공동을 포함하는 등방성 무한고체에서 이들 이방성 함유체 및 공동에 의한 탄성파의 산란문제 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 체적 적분방정식법 (Volume Integral Equation Method; VIEM)이라는 새로운 수치해석 방법을 소개한다. 또한, 비교적 간단한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체가 등방성 무한거체에 포함된 무한고체에서 직교 이방성 함유체에 의한 종파(P파) 및 횡파(SV파) 산란문제 해석을 통하여, 체적 적분방정식법이 일반적인 이방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성파 산란문제 해석에 효과적인 수치해석 방법임을 입증하도록 한다.

## 2. 체적 적분방정식법 (VIEM)

Fig. 1은  $x$ 축에 평행하게 전파하는 평면 시간-조화 탄성파가 입사할 때 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체에 의하여 산란현상이 발생하는 일반적인 탄성동역학 문제를 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다.  $\rho^{(1)}$ 과  $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 밀도와 탄성상수를 나타내고,  $\rho^{(2)}$ 와  $c_{ijkl}^{(2)}$ 는 기지의 밀도와 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.  $e^{-i\omega t} \mathbf{u}_m^o(\mathbf{x}, \omega)$ 를 입사파의 변위 벡터의  $m$ 성분이라고 하고, 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터의  $m$ 성분을  $e^{-i\omega t} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \omega)$ 라고 한다. 여기서  $\omega$ 는 파형의 각 주파수(angular frequency)를 나타내고, 공통적인 시간인자  $e^{-i\omega t}$ 의 표시는 생략하기로 한다. Mal과 Knopoff[2]는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ 가

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = & \mathbf{u}_m^o(\mathbf{x}) \\ & + \int_V [\delta\rho\omega^2 g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_i(\boldsymbol{\xi}) \\ & - \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고,  $\delta\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ 이고  $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 각각 함유체와 기지 사이의 밀도와 탄성상수의 차이를 나타낸다.  $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ 은 등

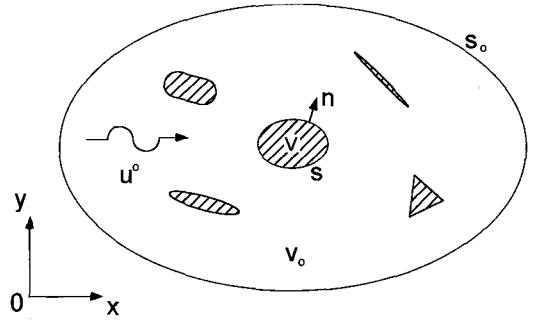


Fig. 1 Geometry of the general elastodynamic problem

방성 무한거체에서의 Green 함수이다. 즉,  $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ 은 등방성 무한거체의  $\mathbf{x}$ 에서  $m$ 방향으로 작용하는 단위 집중하중  $\mathbf{e}_m e^{-i\omega t}$  때문에  $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의  $i$ 방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합은 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수  $\boldsymbol{\xi}_i$ 에 관해서 행해진다. 여기서,  $\delta\rho$ 와  $\delta c_{ijkl}$ 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약  $\mathbf{x}$ 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소분할하여 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal[3, 4]에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형을 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 산란파의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움 없이 계산할 수 있다.

등방성 무한거체에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal[3, 4]에 잘 나타나 있다.

일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다

[5-11]. 식 (1)에서  $g_1^m$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성동역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

**3. 직교 이방성 함유체가 포함된 2차원 무한고체의 탄성과 산란문제 해석**

**3.1. 등방성 함유체에 의한 종파 및 횡파의 산란문제 해석 (in-plane 문제)**

우선, 등방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 종파 및 횡파 산란문제 해석을 고찰해본다. 여기서, 파가  $x(x_1)$ 축에 평행하게 진행할 때, 입자가  $x(x_1)$ 방향으로 운동하는 파를 종파(P파)라고 하며, 입자가  $y(x_2)$ 방향으로 운동하는 파를 횡파(SV파)라고 한다. 등방성 함유체와 기지에서의 재료 물성치(material properties)는 각각 첨자 1과 2로 구분한다. 체적 적분방정식 (1)은 다음과 같이 된다.

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^o(\mathbf{x}) + \int_R \left\{ \delta\rho\omega^2 [g_1^1(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) + g_2^1(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] - [\delta(\lambda + 2\mu)g_{1,1}^1 u_{1,1} + \delta\lambda g_{1,1}^1 u_{2,2} + \delta\mu g_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] - [\delta(\lambda + 2\mu)g_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta\lambda g_{2,2}^1 u_{1,1} + \delta\mu g_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = u_2^o(\mathbf{x}) + \int_R \left\{ \delta\rho\omega^2 [g_1^2(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) + g_2^2(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] - [\delta(\lambda + 2\mu)g_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta\lambda g_{1,1}^2 u_{2,2} + \delta\mu g_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] - [\delta(\lambda + 2\mu)g_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta\lambda g_{2,2}^2 u_{1,1} + \delta\mu g_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (3)$$

여기서,  $u_1(\mathbf{x})$ 와  $u_2(\mathbf{x})$ 는 in-plane 변위 성분이다.

$\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$  이며, 그리고  $\delta(\lambda + 2\mu) = (\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)$ 이다. 여기서,  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$ 과  $\mu_2$ ,  $\lambda_2$ 는 각각 함유체와 기지에서의 Lamé의 상수를 나타낸다.

2차원 시간-조화 탄성동역학 상태에 대한 Green 함수 [12]는

$$g_1^1 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) - k_2^2 H_0(k_2 r)] - \frac{2(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^3} [k_1 H_1(k_1 r) - k_2 H_1(k_2 r)] \right\} \quad (4)$$

$$g_2^1 = g_1^1 \quad (5)$$

$$g_1^2 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) - k_2^2 H_0(k_2 r)] + \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r^2} \right] [k_1 H_1(k_1 r) - k_2 H_1(k_2 r)] + k_2^2 H_0(k_2 r) \right\} \quad (6)$$

$$g_2^2 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) - k_2^2 H_0(k_2 r)] + \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r^2} \right] [k_1 H_1(k_1 r) - k_2 H_1(k_2 r)] + k_2^2 H_0(k_2 r) \right\} \quad (7)$$

로 표시되며,  $r = |\mathbf{x} - \xi|$ 이고,  $H_0$ 와  $H_1$ 는 각각 0차 및 1차 1종의 Hankel 함수를 나타내며,  $k_1$ 과  $k_2$ 는 무한기지에서의 종파 및 횡파의 파수(wavenumber)이다. 즉,  $k_1 = \omega/a_2$ ,  $k_2 = \omega/\beta_2$ 이고,  $a_2$ ,  $\beta_2$ 는 각각 무한기지에서의 종파와 횡파의 속도(wave speed)이다. 식 (2)와 (3)에서 함유체 내부를 표준의 유한요소를 사용하여 분할하면, 함유체 내부 절점(node)에서의 미정 변위에 대한 연계된(coupled) 연립 선형 대수방정식을 얻을 수 있다.

**3.2. 직교 이방성 함유체에 의한 종파 및 횡파의 산란 문제 해석 (in-plane 문제)**

**3.2.1. 체적 적분방정식법**

직교 이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 종파 및 횡파 산란문제 해석을 고찰해본다. 좌표축  $x_1(x)$ ,  $x_2(y)$ ,  $x_3(z)$ 이 각각 직교 이방성 대칭축에 평행하게 놓여 있다고 가정할 때, 직교 이방성 함유체에서의 밀도를  $\rho_1$ , 탄성상수를  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{66}$ 라고 한다. 등방성 기지에서의 밀도를  $\rho_2$ , Lamé 상수를

$\lambda_2, \mu_2$ 라고 한다.

중파 및 횡파에 대한 체적 적분방정식 (1)은 다음과 같이 된다.

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^0(\mathbf{x}) + \int_R \left\{ \delta\rho\omega^2 [g_1^1(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) + g_2^1(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] - [\delta c_{11}g_{1,1}^1 u_{1,1} + \delta c_{12}g_{1,1}^1 u_{2,2} + \delta c_{66}g_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] - [\delta c_{22}g_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta c_{12}g_{2,2}^1 u_{1,1} + \delta c_{66}g_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (8)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = u_2^0(\mathbf{x}) + \int_R \left\{ \delta\rho\omega^2 [g_1^2(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) + g_2^2(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] - [\delta c_{11}g_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta c_{12}g_{1,1}^2 u_{2,2} + \delta c_{66}g_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] - [\delta c_{22}g_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta c_{12}g_{2,2}^2 u_{1,1} + \delta c_{66}g_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (9)$$

여기서,  $u_1(\mathbf{x})$ 와  $u_2(\mathbf{x})$ 는 in-plane 변위 성분이다.

$\delta c_{11} = c_{11} - (\lambda_2 + 2\mu_2)$ ,  $\delta c_{12} = c_{12} - \lambda_2$  이며,

$\delta c_{22} = c_{22} - (\lambda_2 + 2\mu_2)$  그리고  $\delta c_{66} = c_{66} - \mu_2$ 이다.

식(8), (9)에서  $g_i^m$ 은 무한 공간을 차지하는 등방성 기저에서의 Green 함수이다.

식 (8), (9)에서 알 수 있듯이, 등방성 무한기저에서의 Green 함수만 정의되면, 직교 이방성 함유체가 등방성 무한기저에 포함된 무한고체에서의 중파 및 횡파 산란문제 해석이 가능함을 알 수 있다. 식 (8), (9)에서 미정의 값은 함유체 내부에서의 변위 및 변형률이므로, 표준의 유한요소들로 함유체 내부를 요소 분할하여 요소들의 각 절점(node)에서의 미정 변위를 수치해석을 통하여 구할 수 있다. 함유체 내부에서의 변위를 구하면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력과 함유체 외부에서의 변위 및 응력은 별다른 어려움 없이 계산할 수 있다.

### 3.2.2. 경계요소법

직교 이방성 함유체가 등방성 무한기저에 포함된 무한고체에서의 중파 및 횡파 산란문제를 고찰해본다. 직교 이방성 함유체의 바깥면에서의 적분방정식은

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^0(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [g_1^{1(2)}(\xi, \mathbf{x})t_1(\xi) + g_2^{1(2)}(\xi, \mathbf{x})t_2(\xi)] - T_1^{1(2)}(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) - T_2^{1(2)}(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] dS(\xi) \quad (10)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = u_2^0(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [g_1^{2(2)}(\xi, \mathbf{x})t_1(\xi) + g_2^{2(2)}(\xi, \mathbf{x})t_2(\xi)] - T_1^{2(2)}(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) - T_2^{2(2)}(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] dS(\xi) \quad (11)$$

로 표시된다.  $g_a^{\beta(2)}$ 은 등방성 무한기저에 대한 Green 함수이다. 등방성 무한기저에서의 Green 함수에 대한 표현력 벡터  $T_a^{\beta(2)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )는

$$T_1^{1(2)} = (\lambda + 2\mu)g_{1,1}^{1(2)} n_1 + \lambda g_{2,2}^{1(2)} n_1 + \mu(g_{1,2}^{1(2)} + g_{2,1}^{1(2)}) n_2$$

$$T_1^{2(2)} = (\lambda + 2\mu)g_{1,1}^{2(2)} n_1 + \lambda g_{2,2}^{2(2)} n_1 + \mu(g_{1,2}^{2(2)} + g_{2,1}^{2(2)}) n_2$$

$$T_2^{1(2)} = (\lambda + 2\mu)g_{2,2}^{1(2)} n_2 + \lambda g_{1,1}^{1(2)} n_2 + \mu(g_{1,2}^{1(2)} + g_{2,1}^{1(2)}) n_1$$

$$T_2^{2(2)} = (\lambda + 2\mu)g_{2,2}^{2(2)} n_2 + \lambda g_{1,1}^{2(2)} n_2 + \mu(g_{1,2}^{2(2)} + g_{2,1}^{2(2)}) n_1 \quad (12)$$

로 주어지고,

$$t_1 = (\lambda + 2\mu)u_{1,1}n_1 + \lambda u_{2,2}n_1 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_2$$

$$t_2 = (\lambda + 2\mu)u_{2,2}n_2 + \lambda u_{1,1}n_2 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_1 \quad (13)$$

이 된다.

한편, 직교 이방성 함유체의 안쪽면( $S_-$ )에서의 적분방정식은

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{S_-} [g_1^{1(1)}(\xi, \mathbf{x})t_1(\xi) + g_2^{1(1)}(\xi, \mathbf{x})t_2(\xi)] - T_1^{1(1)}(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) - T_2^{1(1)}(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] dS(\xi) \quad (14)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{S_-} [g_1^{2(1)}(\xi, \mathbf{x})t_1(\xi) + g_2^{2(1)}(\xi, \mathbf{x})t_2(\xi)] - T_1^{2(1)}(\xi, \mathbf{x})u_1(\xi) - T_2^{2(1)}(\xi, \mathbf{x})u_2(\xi)] dS(\xi) \quad (15)$$

로 표시된다.  $g_a^{\beta(1)}$ 와  $T_a^{\beta(1)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )는 각각 직교 이방성 함유체에 대한 Green 함수와 표현력 벡터를 나타내며,

$$t_1 = c_{11}u_{1,1}n_1 + c_{12}u_{2,2}n_1 + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1})n_2$$

$$t_2 = c_{22}u_{2,2}n_2 + c_{12}u_{1,1}n_2 + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1})n_1 \quad (16)$$

이 된다. 여기서,  $n_1, n_2$ 는  $S_+$ 에서의 바깥쪽 법선 방향의 단위 벡터 성분을 나타낸다.

그러나, 직교 이방성 재료 및 이방성 재료에서의 탄성 동역학 Green함수에 대한 닫힌형(closed form) 표현식은 문헌에 나와있지 않다. 따라서, 경계요소법을 적용하여 이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성과 산란문제 해석을 수행할 때, 많은 어려움이 따르게 된다.

3.3. 체적 적분방정식법과 경계요소법을 적용한 탄성과 산란문제 해석의 차이점

이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성과 산란문제 해석에 경계요소법을 적용할때, 이방성 함유체에서의 Green 함수를 구하지 못하면 해석이 불가능해진다. 그러나, 체적 적분방정식법을 적용하면, 이방성 함유체에서의 Green 함수를 구하지 않고 고서도 탄성과 산란문제 해석이 가능하다는 장점이 있다.

4. 단일 함유체 문제

4.1. 직교 이방성 함유체에 의한 종파의 산란문제 해석

Fig. 2에 나와있는 단일의 직교 이방성 실린더형 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 종파 산란문제 해석을 고찰해본다. Fig. 3은 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델의 예로서, 표준의 8-절점 사각형 유한요소와 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 함유체 내부만을 요소 분할하였다. 모델에 사용된 요소의 수는 384개이다. Fig. 3에 나타난 대로, 체적 적분방정식법에서는 무한 영역을 이루는 기지는 요소분할 할 필요가 없고, 기지와 다른 재료로 이루어진 함유체 내부만을 표준의 유한요소를 사용하여 요소 분할한다.

x축의 양의 방향을 따라 진행되는 종파 입사파의 형태를 다음과 같이 가정하여 산란문제 해석을 수행하였다.

$$u_1^0 = \frac{e^{ik_1x}}{ik_1} \tag{17}$$

여기서,  $k_1$ 은 등방성 무한기지에서 종파의 파수이다. 입사파의 파장을  $\lambda_1$ 라 하고, 함유체의 반지름을  $a$ 라고 할 때,  $\lambda_1 = 5.03a, 2.09a, 1.26a$ 에 해당하는 주파수를 갖는 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다.  $k_1\lambda_1 = 2\pi$ 이므로, 각각의 입사파의 파장에 대하여 무차원 종파의 파수는  $k_1a = 1.25, 3.0, 5.0$ 이 된다. 문제해석에 사용

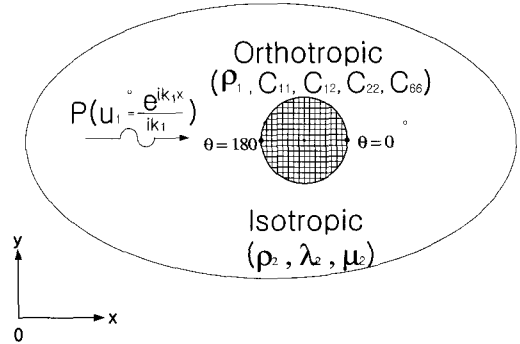


Fig. 2 P wave interaction with an orthotropic inclusion in unbounded isotropic matrix

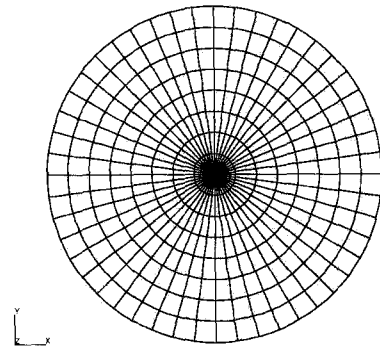


Fig. 3 A typical discretized model in the volume integral equation method

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic and isotropic inclusion

Elastic constants	Isotropic matrix	Orthotropic inclusion	Isotropic inclusion
$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	4.54	2.78	2.78
$\lambda$ (GPa)	67.34	-	93.03
$\mu$ (GPa)	37.88	-	93.03
$c_{11}$ (GPa)	143.10	279.08	279.09
$c_{12}$ (GPa)	67.34	7.80	93.03
$c_{22}$ (GPa)	143.10	30.56	279.09
$c_{66}$ (GPa)	37.88	11.80	93.03

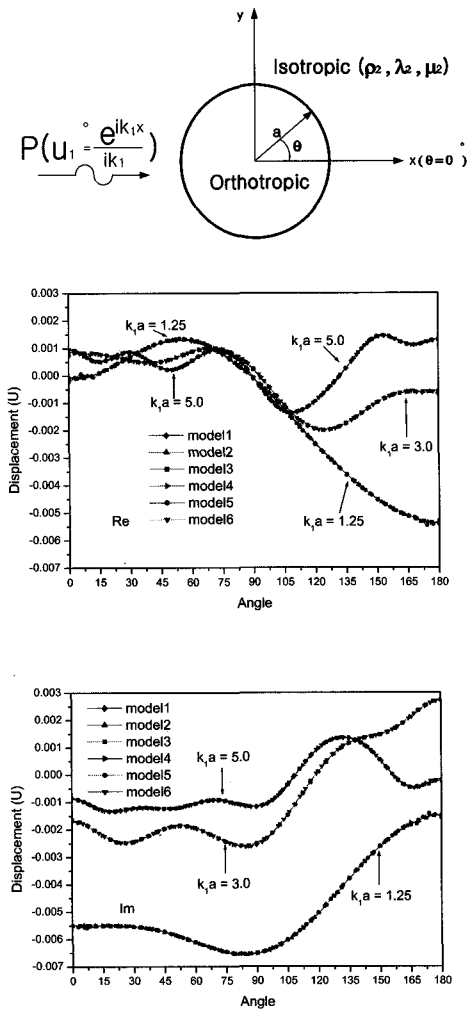


Fig. 4 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_1$  (displacement in the x-axis) using VIEM at the interface of single orthotropic cylindrical inclusion for  $k_1 a = 1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_1$  is the P wavenumber in the unbounded isotropic matrix

된 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 재료 물성치는 Table 1에 나타나 있다. Fig. 4는 각기 다른 주파수를 갖는 종파가 입사되었을 때, 직교 이방성 함유체와 등방성 무한기지의 경계면에서의 변위성분  $u_1$ (x방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다. Fig. 5는 각기 다른 주파수를 갖는 종파가 입사되었을 때, 직교 이방성 함유체

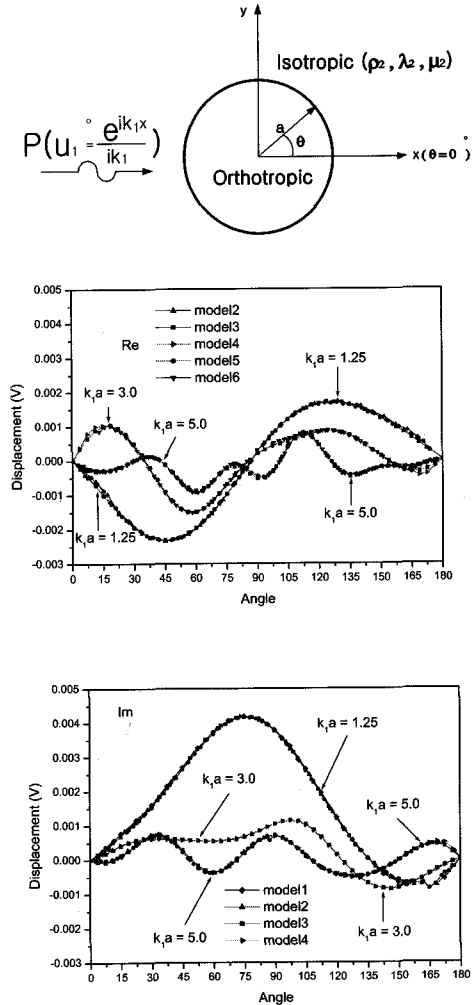
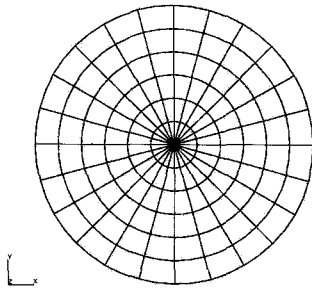


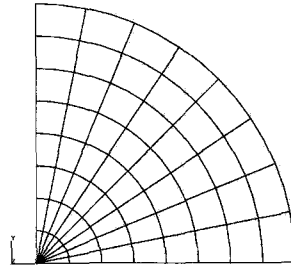
Fig. 5 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_2$  (displacement in the y-axis) using VIEM at the interface of single orthotropic cylindrical inclusion for  $k_1 a = 1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_1$  is the P wavenumber in the unbounded isotropic matrix

와 등방성 무한기지의 경계면에서의 변위성분  $u_2$ (y방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다.

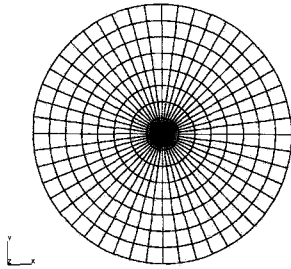
저자가 아는 범위에서는 이 문제에 대한 해석하는 문헌에 나와있지 않다. 또한 직교 이방성 재료에서의 Green 함수에 대한 닫힌형 표현식도 문헌에 나와있지 않으므로, 경계요소법을 적용한 수치해석을 통한 체적 적분



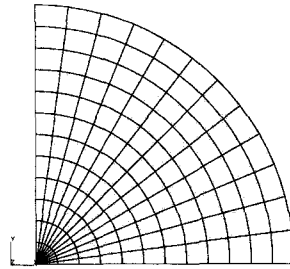
(a) Model11 (요소수 : 144)



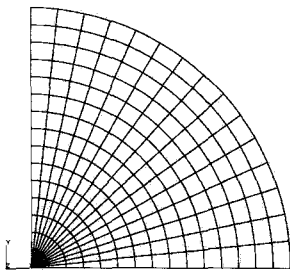
(b) Model12 (요소수 : 64)



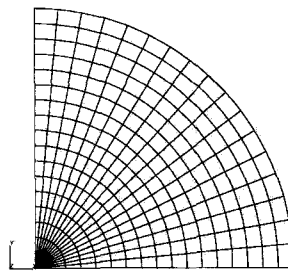
(c) Model13 (요소수 : 384)



(d) Model14 (요소수 : 144)



(e) Model15 (요소수 : 225)



(f) Model16 (요소수 : 289)

Fig. 6 Discretized models used for the analysis of P and SV wave interaction with an isotropic or orthotropic inclusion in the volume integral equation method.

방정식으로부터 얻어진 결과에 대한 검증 과정은 생략하였다. 따라서, 체적 적분방정식법을 적용한 직교 이방성 함유체에 의한 종파 산란문제 해석 결과에 대한 검증은 참고문헌 [13]에 나와있는 직교 이방성 함유체가 포함

된 무한고체가 무한하중을 받는 탄성정역학 문제 해석에 대한 검증으로 대체한다.

본 논문에서는 Fig. 6에 보이는 다양한 형태의 서로 다른 모델들을 사용하여 해석결과에 대한 수렴여부를 조사

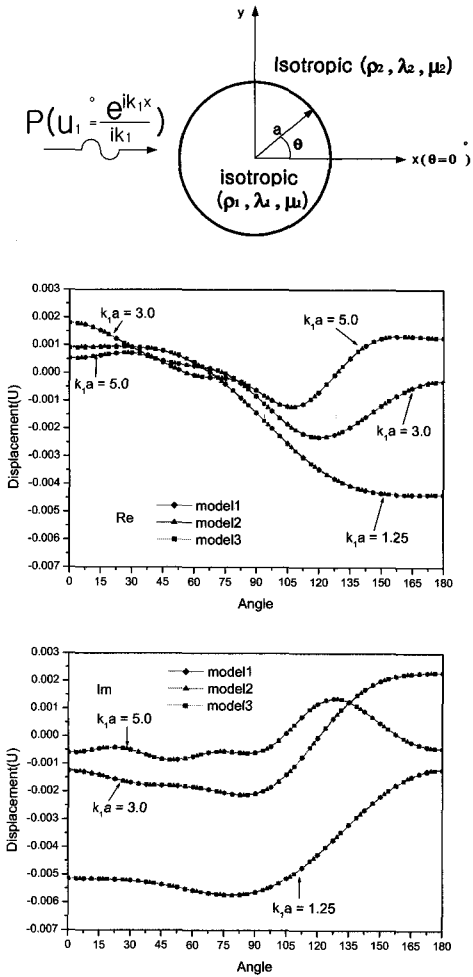


Fig. 7 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_1$  (displacement in the  $x$ -axis) using VIEM at the interface of single isotropic cylindrical inclusion for  $k_1a=1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_1$  is the P wavenumber in the unbounded isotropic matrix

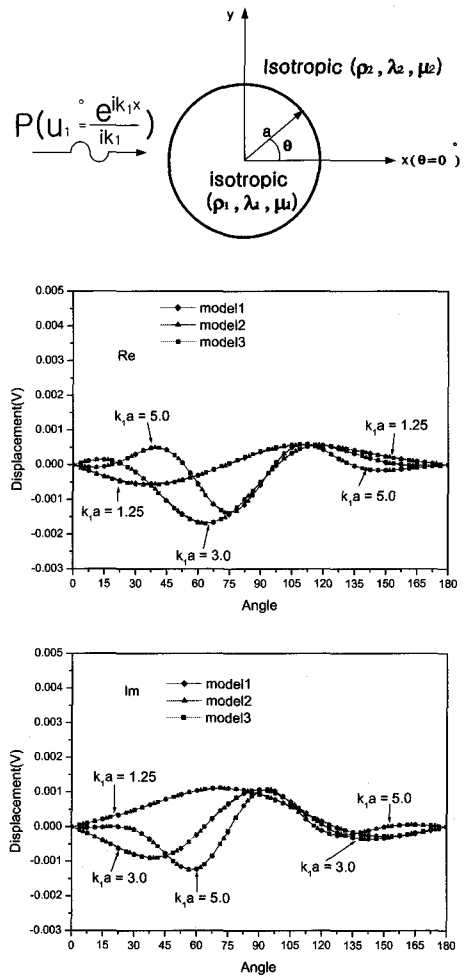


Fig. 8 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_2$  (displacement in the  $y$ -axis) using VIEM at the interface of single isotropic cylindrical inclusion for  $k_1a=1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_1$  is the P wavenumber in the unbounded isotropic matrix

하여 보았다. 전체 모델과 1/4 모델, 그리고 서로 다른 개수의 요소를 사용한 해석 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

다음으로 함유체가 직교 이방성 재료로 이루어진 경우와 등방성 재료로 이루어진 경우를 비교하기 위하여, 직교 이방성 함유체와 밀도는 같고 탄성상수가 다른 등방성 함유체가 등방성 무한거체에 포함된 무한고체에서의 종파 산란문제 해석을 고찰해본다. 직교 이방성 함유체

해석에 사용된 같은 조건의 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다. 문제해석에 사용된 등방성 함유체와 등방성 거체의 재료 물성치는 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 7은 각기 다른 주파수를 갖는 종파가 입사되었을 때, 등방성 함유체와 등방성 무한거체의 경계면에서의 변위성분  $u_1$ ( $x$ 방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다. Fig. 8은 각기 다른 주파수를 갖는 종파가 입사되었



을 때, 등방성 함유체와 등방성 무한기지의 경계면에서의 변위 성분  $u_2$ (y방향의 변위 성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다. 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과에 대한 검증은 참고 문헌 [3]에 나와 있다.

Figs. 7, 8에 나타난 대로, 전체모델과 1/4 모델, 그리고 서로 다른 개수의 요소를 사용한 해석 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있었다. 직교 이방성 함유체 해석과 다른 점은 적은 개수의 요소를 포함한 모델을 사용해도 해석 결과가 잘 수렴한다는 점이다.

Figs. 4, 5와 Figs. 7, 8을 비교해 보면, 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의  $c_{11}$ 은 같으므로, 변위성분  $u_1$ (x방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에서 큰 차이를 발견할 수 없다. 그러나, 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의  $c_{22}$ 는 많은 차이가 나므로, 변위성분  $u_2$ (y방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에서 많은 차이가 나는 것을 쉽게 발견할 수 있다.

4.2. 직교 이방성 함유체에 의한 횡파의 산란문제 해석

x축의 양의 방향을 따라 진행하는 횡파 입사파의 형태를 다음과 같이 가정하여 산란문제 해석을 수행하였다 (Fig. 9).

$$u_2^o = \frac{e^{ik_2x}}{ik_2} \tag{18}$$

여기서,  $k_2$ 은 등방성 무한기지에서 횡파의 파수이다. 입사파의 파장을  $\lambda_2$ 라 하고, 함유체의 반지름을  $a$ 라고 할 때,  $\lambda_2 = 5.03a, 2.09a, 1.26a$ 에 해당하는 주파수를 갖는 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다.  $k_2\lambda_2 = 2\pi$ 이므로, 각각의 입사파의 파장에 대하여 무차원 횡파의 파수는  $k_2a = 1.25, 3.0, 5.0$ 이 된다. 문제해석에 사용된 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 재료 물성치는 Table 1에 나타나 있다. Fig. 6에 보이는 다양한 형태의 서로 다른 모델들을 사용하여 해석결과에 대한 수렴여부를 조사하여 보았다. 전체 모델과 1/4 모델, 그리고 서로 다른 개수의 요소를 사용한 해석 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있었다. Fig. 10은 각기 다른 주파수를 갖는 횡파가 입사되었을 때, 직교 이방성 함유체와

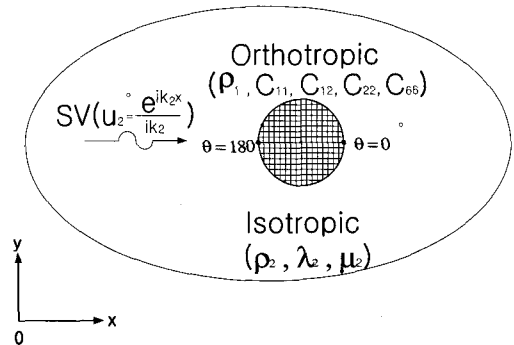


Fig. 9 SV wave interaction with an orthotropic inclusion in unbounded isotropic matrix

등방성 무한기지의 경계면에서의 변위성분  $u_2$ (y방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다.

다음으로 함유체가 직교 이방성 재료로 이루어진 경우와 등방성 재료로 이루어진 경우를 비교하기 위하여, 직교 이방성 함유체와 밀도는 같고 탄성상수가 다른 등방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 횡파 산란문제 해석을 고찰해본다. 직교 이방성 함유체 해석에 사용된 같은 조건의 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다. 문제해석에 사용된 등방성 함유체와 등방성 기지의 재료 물성치는 Table 1에 나타나 있다. Fig. 11은 각기 다른 주파수를 갖는 횡파가 입사되었을 때, 등방성 함유체와 등방성 무한기지의 경계면에서의 변위성분  $u_2$ (y방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에 대한 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과를 나타낸다. 체적 적분방정식법에 의한 수치해석 결과에 대한 검증은 참고문헌 [3]에 나와있다.

Figs. 10, 11을 비교해 보면, 함유체가 직교 이방성 재료인 경우와 등방성 재료인 경우에, 입사파가 종파인 경우와 마찬가지로, 변위성분  $u_2$ (y방향의 변위성분)의 실수부분과 허수부분에서 많은 차이가 나는 것을 쉽게 발견할 수 있다.

한편, 본 논문에서는 단일의 직교 이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 문제만을 고려해 보았으나, 다수의 경계면(interface)을 갖는 다수의 이방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 문제를 해석하는 경우에, 경계요소법에서는 모든 경계면에서의 변위 및 표면력 벡터의 연속성을 만족시켜야만 하므로 수치해석 과정이 무척 복잡

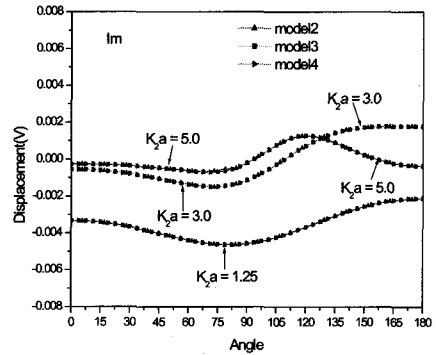
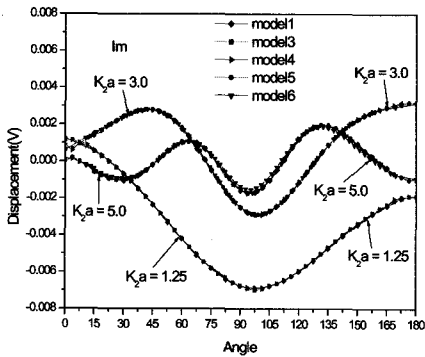
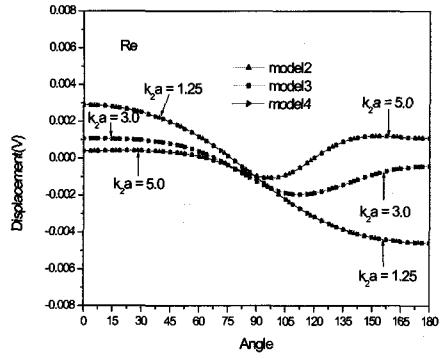
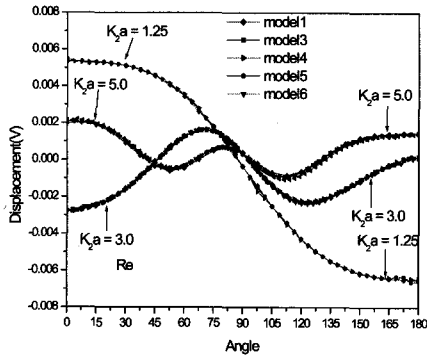
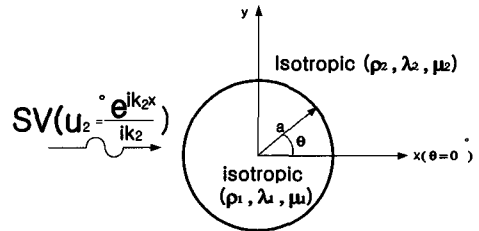
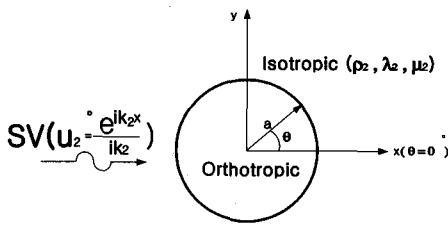


Fig. 10 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_2$  (displacement in the  $y$ -axis) using VIEM at the interface of single orthotropic cylindrical inclusion for  $k_2a = 1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_2$  is the S wavenumber in the unbounded isotropic matrix

Fig. 11 Real and Imaginary parts of the displacement  $u_2$  (displacement in the  $y$ -axis) using VIEM at the interface of single isotropic cylindrical inclusion for  $k_2a = 1.25, 3.0$  and  $5.0$ .  $k_2$  is the S wavenumber in the unbounded isotropic matrix

잡하게 된다. 그러나, 체적 적분방정식법에서는 다음에 열거한 장점들을 이용할 수 있다. 첫째, 다수의 함유체 문제에 대하여 체적 적분방정식 (1)을 수치해석 적으로 적용함에 있어서 단일의 함유체 문제와 기본적으로 차이 점이 없다. 즉, 단일의 함유체 문제에서와 마찬가지로 다수의 함유체 내부만을 표준의 유한요소를 사용하여 분할

하면 된다[3]. 또한, 모든 경계면에서의 연속조건은 식 (1)의 유도과정에서 자동적으로 만족되었기 때문에 다수의 함유체 문제에 적용하기가 매우 쉽고 간편하다. 둘째, 표준의 유한요소를 사용하여 다수의 함유체 내부를 모델링함으로써 함유체의 모양이나 packing sequence에 전혀 지장을 받지 않는다.

**5. 결 론**

체적 적분방정식법을 적용하여 등방성 무한기지에 직교 이방성 함유체가 포함되어 있는 무한고체에서의 종파 및 횡파 산란문제 해석을 수행하였다. 직교 이방성 함유체에 의한 산란현상이 등방성 함유체에 의한 산란현상과 비교하여 볼 때 많은 차이가 남을 알 수 있었다.

체적 적분방정식법에 의한 탄성과 산란문제 해석에는 함유체와 기지 사이의 밀도 및 탄성상수 차와 등방성 무한기지에서의 Green 함수만이 필요하다는 장점이 있다. 그러나, 경계요소법을 적용한 해석에는 등방성 기지에서의 Green 함수와 직교 이방성 함유체에서의 Green 함수 모두가 필요하다는 단점이 있다. 그러므로, 등방성 무한기지에 다수의 일반적인 이방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성동역학 문제해석에는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는 체적 적분방정식법이 매우 효과적인 수치해석 방법임을 알 수 있다.

따라서, 체적 적분방정식법을 적용하면 등방성 재료인 Ti 기지와 강한 이방성 재료인 SiC 섬유로 이루어진 금속기지 복합재료에서의 파손 메카니즘 규명과 비파괴 평가기술을 향상시킬 수 있을 것으로 판단된다.

**후 기**

본 연구는 산업자원부의 기술기반조성사업 대학보유기술이전사업 연구비 지원으로 이루어진 것이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

**참고문헌**

[1] J. K. Lee and A. K. Mal, "Characterization of matrix damage in metal matrix composites under transverse loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339-346, (1998)

[2] A. K. Mal and L. Knopoff, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *J. Inst. Math. Applies.*, Vol. 3, pp. 376-387, (1967)

[3] J. K. Lee and A. K. Mal, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135-159, (1995)

[4] J. K. Lee and A. K. Mal, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23-31, (1997, Mar.)

[5] A. Tverdokhlebov and J. Rose, "On Green's Functions for Elastic Waves in Anisotropic Media," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 83, No. 1, pp. 118-121, (1988)

[6] C.-Y. Wang and J. D. Achenbach, "Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids," *Proc. R. Soc. London. A*, Vol. 449, pp. 441-458, (1995)

[7] C.-Y. Wang and J. D. Achenbach, "Two-dimensional time domain BEM for scattering of elastic wave in solids of general anisotropy." *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 26, pp. 3843-3864, (1996)

[8] A. J. Niklasson and S. K. Datta, "Scattering by an infinite transversely isotropic cylinder in a transversely isotropic medium," *Wave Motion*, Vol. 27, pp. 169-185, (1998)

[9] A. Sáez and J. Domínguez, "BEM analysis of wave scattering in transversely isotropic solids," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 44, pp. 1283-1300, (1999)

[10] A. Sáez and J. Domínguez, "Far field dynamic Green's functions for BEM in transversely isotropic solids," *Wave Motion*, Vol. 32, pp. 113-123, (2000)

[11] M. Dravinski and T. Zheng, "Numerical evaluation of three-dimensional time-harmonic Green's functions for a nonisotropic full-space," *Wave Motion*, Vol. 32, pp. 141-151, (2000)

[12] M. Kitahara, *Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, Elsevier Science Pubs., London and New York, (1985)

[13] 최성준, 라원석, 이정기, "이방성 함유체를 포함하는 무한고체의 탄성해석", *대한기계학회 논문집 A권*, 23권 11호, pp. 1993-2006, (1999)