

불확실한 동적 시스템의 상태공간 표현 강인 모델추종 제어기

論 文

50D-12-3

Robust Model-Following Controller for Uncertain Dynamical Systems by State-Space Representation

朴炳錫* · 尹智燮** · 姜理錫***
(Byung-Suk Park · Ji-Sup Yoon · E-Sok Kang)

Abstract - It is hard to obtain good robust performance and robust stability for uncertain and time-varying system. The robust 2-DOF controller is frequently used to obtain the desired response and the good robustness. Two controllers can be independently designed. Generally, one controller reduces sensitivity to parameter variations, nonlinear effects, and other disturbances. On the other hand, the other controller reduces the error between the desired command and output. In this paper, the various robust perfect MFCs(model-following controllers) combined with TDC(Time Delay Control) are designed, and the imperfect stable MFC combined with TDC and SMC(Sliding Mode Control) is proposed. These controllers are based on the method of designing robust 2-DOF controllers for dynamic system with uncertainty. The performance of the proposed imperfect stable MFC has been evaluated through computer simulations. The simulation results indicate that the proposed controller shows the excellent performance characteristics for an overhead crane with uncertain and time-varying parameters.

Key Words : Time delay control, Sliding mode control, 2-DOF, Robust, Model-following, Overhead crane

1. 서 론

시스템을 기술하는 수학적 모델은 실제 시스템의 동적 특성과는 모델링 및 외란 등에 의한 오차가 존재한다. 이와 같은 오차에도 불구하고 시스템의 안정성이 보장되고, 요구되는 성능을 만족하도록 설계된 제어기가 강인 제어기(robust controller)다. 강인 제어 기법으로는 시간 지연 제어(Time Delay Control, TDC)[1,2], 슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control, SMC)[3,4,5], 외란 및 환경 관측기(disturbance & environment observer)[6] 등이 있다. TDC는 과거의 몇 샘플링 주기 동안의 시스템의 입출력 정보를 이용하여 잘 모르는 선형 또는 비선형 동력학과 예측하지 못한 외란 항들을 제거한다. 그러나, TDC는 시간지연이 작다는 가정 하에 설계되기 때문에 시간 지연이 다소 큰 경우, 즉 제어시간(sampling time)을 작게 할 수 없는 경우 외란을 완벽하게 제거할 수 없다. 또한, 대부분의 시스템은 제어신호가 시스템의 상태변수 보다 적기 때문에 제어입력에 pseudo-inverse가 존재하여 최적해를 구하기가 쉽지 않다. SMC는 제어 대상의 상태에 따라 제어기의 구조를 바꿔 상태 공간에서 미리 설정한 슬라이딩 평면에 상태를 구속시키면서 목표값에 도달시키는 제어

방식인데 상태가 슬라이딩 평면에 도달할 경우의 시스템은 원래의 시스템과 무관하게 된다. SMC는 매개변수의 변동과 외란에 가장 강인한 성능을 보이지만, 디지털 제어시에는 불연속적인 입력에 의해 떨림(chattering)이 발생하는 단점이 있다. 특히, 떨림의 크기는 제어시간 및 불확실성의 크기와 밀접한 관련이 있다. 외란 및 환경 관측기는 TDC와 근본적으로 유사한 개념이며 구조도 거의 같다.

이 들의 장점을 최대한 활용하기 위하여 슬라이딩모드 제어기와 시간지연 제어를 결합한 구조가 소개되고[7,8] 있으나, 대부분 먼저 슬라이딩모드 제어기를 설계하고, 시간지연 제어기를 이용하여 불확실성을 감소시킴으로서 슬라이딩모드 제어기의 단점인 채터링을 감소시키는데 목적이 있다.

본 논문에서는 다변수의 불확실한 동적 시스템에 대해 상태공간 표현법을 사용하여 기준모델(reference model)을 추종하는 강인 모델추종 제어기를 체계적으로 설계하는데 목적이 있다.

강인 모델추종 제어는 시스템에 미지의 동력학과 미지의 외란이 존재하는 상황에서도 시스템의 출력 또는 상태변수가 원하는 기준모델의 동력학으로 치환되도록 한다. 즉, 주어진 궤적을 정확하게 추종하도록 제어 입력을 결정한다. 그러나, 제어신호가 시스템의 상태변수 보다 적은 경우나 제어 입력의 개수와 출력의 개수가 다를 경우 완전한 모델추종(perfect model-following)을 기대 할 수 없다.

본 논문에서는 강인한 2자유도(two degrees of freedom, 2-DOF) 제어기 설계법[9,10]을 근간으로 불확실한 동적 시스템에 대해서 시간지연제어 기법을 도입하여 완전 모델추종 조건하에서 체계적으로 이상적인 여러 가지 상태공간 완전

* 正 會 員 : 韓國原子力研究所 前任研究員

** 正 會 員 : 韓國原子力研究所 責任研究員 · 工博

*** 準 會 員 : 忠南大 工大 機械設計工學科 教授 · 工博

接受日字 : 2001年 8月 2日

最終完了 : 2001年 11月 30日

모델추종제어기(완전 불명확 모델추종 제어기, 완전 명확 모델추종 제어기, 완전 안정 모델추종 제어기)를 설계하였으며, 완전 모델추종 조건을 만족시키지 못하는 경우에 대해서는 슬라이딩모드제어 기법을 도입하여 불안정 안정 모델추종 제어기를 설계하였다.

크레인의 동력학은 이송물의 흔들림 각도 및 각속도 등에 의한 시스템의 비선형, 구동부의 마찰, 바람 등으로 인한 외란, 모델되지 않은 동력학 부분 및 줄길이 변화를 포함한 시변(time-varying) 모델로 나타낼 수 있다. 크레인은 이와 같은 동적 특성으로 인해 이송물의 흔들림 억제, 정확한 지점의 안착에 있어서 강인한 제어가 요구된다.

본 논문에서는 제안한 불안정 안정 모델추종 제어기의 성능 검증을 위해 비선형 불확실 시변 시스템으로 알려진 천정 크레인(overhead crane)을 대상으로 전산모사(simulation)를 수행하였다.

2. 강인 모델추종 제어기

2.1 완전 불명확 모델추종 제어기

시스템 매개변수의 변화, 시스템의 비선형성, 불확실성 및 외란을 고려한 일반적인 다변수 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t) \\ &= (A_o + \Delta A(t))x(t) + (B_o + \Delta B(t))u(t) + f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(t)$ 는 $n \times 1$ 시스템의 상태벡터, $u(t)$ 는 $r \times 1$ 제어입력 벡터, A_o 는 알고 있는 $n \times n$ 시스템 매개변수 행렬, B_o 는 rank가 r 인 알고 있는 $n \times r$ 제어 입력 매개변수 행렬이며, (A_o, B_o) 는 제어 가능하다고 가정한다. 또한, $\Delta A(t)$ 는 시스템 매개변수의 변화 행렬, $\Delta B(t)$ 는 입력 매개변수의 변화 행렬, $f(t)$ 는 $n \times 1$ 시스템 비선형성, 불확실성 및 외란 벡터이다. 여기서, $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $f(t)$ 는 연속이고, (1)은 유한 집합 공간 내에 존재하는 것으로 가정한다. 변수 t 는 시간이다. 식 (1)에서 모든 상태변수와 그들의 미분은 측정 혹은 추정 가능하다고 가정한다. 따라서, 식 (1)은 총체적인 불확실요소(비선형, 시변, 불확실성 및 외란)로 이루어진 $n \times 1$ 벡터 $d(t)$ 가 포함된 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u(t) + d(t) \quad (2)$$

여기서, $d(t) = \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t) + f(t)$ 이다.

시스템이 추종하기를 원하는 선형 시불변 다변수(time-invariant multivariable) 기준 모델을 정의한다.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \quad (3)$$

여기서 $x_m(t)$ 는 $n \times 1$ 모델 상태 벡터, A_m 은 $n \times n$ 상수 안정 시스템 행렬이다. 즉, A_m 의 고유값(eigenvalues)은 음의 실수부를 가진다. B_m 은 $n \times r$ 상수 제어 지령 매개변수 행렬이고, $r(t)$ 는 $r \times 1$ 제어 지령 벡터이다. 오차 $e(t)$ 는 시스템과 모델 상태 벡터와의 차이인 $n \times 1$ 벡터로서 다음과 같다.

$$e(t) = x_m(t) - x(t) \quad (4)$$

식 (2)에서 식 (4)로부터 다음과 같은 오차 동력학 방정식을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = A_m x_m(t) - A_o x(t) + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t) \quad (5)$$

식 (5)의 우변에 $A_m x(t)$ 를 더하고 빼면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_m e(t) + \{(A_m - A_o)x(t) \\ &\quad + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t)\} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 제어입력 $u(t)$ 는 다음과 같은 방정식을 항상 만족하게 함으로서 구할 수 있다.

$$(A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t) = 0 \quad (7)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하면 오차 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) \quad (8)$$

일반적으로 제어신호가 시스템 상태변수 보다 적기 때문에 매개변수 행렬 B_o 의 역행렬은 pseudo-inverse 행렬이 되어 식 (8)이 되는 제어신호 $u(t)$ 는 근사 제어신호가 된다.

$$u(t) = B_o^+ \{(A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - d(t)\} \quad (9)$$

여기서 $B_o^+ = (B_o^T B_o)^{-1} B_o^T$ 이다.

식 (9)의 제어법칙에서 $d(t)$ 는 알려져 있지 않다. 따라서, 이를 추정해야 한다. 식 (2)로부터 시스템의 총체적 불확실요소 $d(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d(t) = \{\dot{x}(t) - A_o x(t) - B_o u(t)\} \quad (10)$$

그러나, $d(t)$ 가 미지의 함수이므로 바로 구하는 것은 불가능하다. 따라서, 미지 함수의 추정치인 $\hat{d}(t)$ 을 사용한다. 만약 시간 지연(time delay) L 이 충분히 작고, $d(t)$ 가 연속함수라면 시간 t 에서의 함수값 $d(t)$ 와 시간 $(t-L)$ 에서의 함수값 $d(t-L)$ 은 거의 동일하다고 할 수 있으므로 함수의 추정치

는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{d}(t) \approx d(t-L) = \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) - B_o u(t-L) \} \quad (11)$$

식 (11)을 식 (9)에 대입함으로써 다음과 같은 시간지연 제어가 결합된 모델추종 제어가 얻어진다.

$$u(t) = u(t-L) + B_o^+ \{ (A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - \dot{x}(t-L) + A_o x(t-L) \} \quad (12)$$

식 (7)을 만족하는 구속조건은 다음과 같은 과정을 통해서 얻어진다. 식 (9)를 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o B_o^+ \{ (A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - u(t) \} + d(t) \quad (13)$$

식 (3)에서 식 (13)을 빼면 다음과 같은 오차 동력학을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + (I - B_o B_o^+) \{ (A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - d(t) \} \quad (14)$$

식 (8)과 같이 주어진 원하는 오차 동력학을 얻기 위해서는 시간이 무한대로 갈 때 다음과 같은 구조적 구속 (structural constraint) 방정식을 만족하여야 한다.

$$(I - B_o B_o^+) \{ (A_m - A_o)x(t) + B_m r(t) - d(t) \} = 0 \quad (15)$$

즉, 다음과 같은 정합조건(matching conditions)을 만족하면 모든 $x(t)$, $r(t)$ 및 $d(t)$ 에 대해 식 (15)가 만족되어 완전 모델추종이 이루어진다.

$$\begin{aligned} (I - B_o B_o^+)(A_m - A_o) &= 0, \\ (I - B_o B_o^+)B_m &= 0, \\ (I - B_o B_o^+)d(t) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

만약 B_o 가 $n \times n$ 이다면, $I - B_o B_o^+ = I - B_o B_o^{-1} = 0$ 이 되어 식 (15)의 구조적 구속방정식을 항상 만족한다. 그러나, 일반적으로 제어신호가 시스템 상태 변수 보다 적기 때문에 $I - B_o B_o^+$ 는 0이 되지 않는다. 식 (15)의 구속 방정식을 만족하지 못하면 식 (15)는 $n-r$ 개의 rank를 가지기 때문에 $n-r$ 개의 구속 방정식을 갖게 된다. 따라서, r 개의 제어 입력은 단지 r 개의 상태변수만을 제어하게 되므로 n 개의 상태 변수를 완전히 제어하기 위해서는 나머지 $n-r$ 개의 상태 변수는 구속조건하에서 자동으로 제어되도록 하여야 한다. 결국,

B_o 가 $n \times r$ 이면 식 (15)의 구속조건을 만족하기 위해서 다음이 성립되어야 한다.

$$\begin{aligned} B_o F &= A_m - A_o, \\ B_o G &= B_m, \\ B_o u(t) &= d(t) \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)을 식 (9)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$u(t) = Fx(t) + Gr(t) - w(t) \quad (18)$$

여기서 $F = B_o^+(A_m - A_o)$, $G = B_o^+ B_m$ 이며 $w(t)$ 는 시간지연 기법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w(t) &= \hat{w}(t) = B_o^+ \hat{d}(t) \\ &= B_o^+ \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) - B_o u(t-L) \} \end{aligned} \quad (19)$$

따라서, 식 (12)는 다음과 같은 강인 완전 모델추종 제어가 된다.

$$u(t) = u(t-L) + Fx(t) + Gr(t) - B_o^+ \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) \} \quad (20)$$

식 (20)에는 기준모델의 모든 상태가 포함되어 있지 않다. 단지, 모델의 동력학 매개변수 행렬 A_m 및 제어 입력변수 벡터 B_m 만 나타나 있다. 즉, 그림 1에서 보는 바와 같이 기준 입력값만 추종하는 형태가 된다. 따라서, 식 (20)은 완전 불명확 모델추종 제어기(perfect implicit model-following controller)라 할 수 있다.

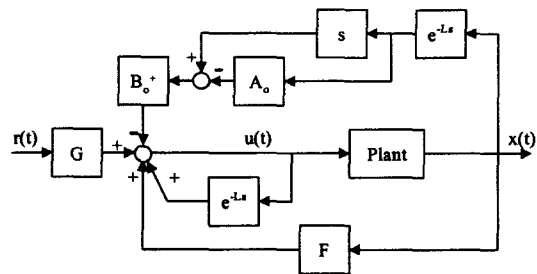


그림 1 완전 불명확 모델추종 제어기.
Fig. 1 Perfect implicit model-following controller.

2.2 완전 명확 모델추종 제어기

식 (5)의 우변에 $A_o x_m(t)$ 를 더하고 빼면 다음과 같다.

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) + \{ (A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t) \} \quad (21)$$

식 (21)의 제어입력 $u(t)$ 는 다음과 같은 방정식을 항상 만족하게 함으로써 구할 수 있다.

$$(A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t) = 0 \quad (22)$$

따라서, 제어입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$u(t) = B_o^+ \{ (A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - d(t) \} \quad (23)$$

식 (22)를 식 (21)에 대입하면 다음과 같은 오차 동력학 방정식을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) \quad (24)$$

여기서도 식 (17) 및 시간지연 법칙을 적용하면 식 (23)은 식 (25)와 같이 되며 이는 완전 모델추종 제어기가 된다.

$$u(t) = u(t-L) + Fx_m(t) + Gr(t) - B_o^+ \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) \} \quad (25)$$

식 (25)에는 기준모델의 모든 상태가 포함되어 있다. 따라서, 식 (25)는 그림 2에서 보는 바와 같이 기준모델을 추종하게 되어 완전 명확 모델추종 제어기(perfect explicit model-following controller)라 할 수 있다. 그러나, 식 (24)의 오차 동력학이 시스템 매개변수 행렬 A_o 의 고유값에 의해 지배되므로 안정적이지 못하다.

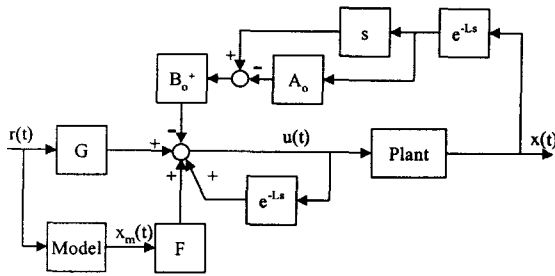


그림 2 완전 명확 모델추종 제어기.
Fig. 2 Perfect explicit model-following controller.

2.3 완전 안정 모델추종 제어기

식 (25)에서는 기준모델이 분명히 나타나나 오차 동력학이 시스템의 매개변수 행렬의 고유값에 좌우 되므로 안정하다고 할 수 없다. 따라서, 오차를 피드백(feedback)하는 항을 추가하면 안정한 모델추종을 하게 된다.

식 (22)의 우변에 되먹임 항을 놓으면 다음과 같이 된다.

$$(A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - B_o u(t) - d(t) = -Ke(t) \quad (26)$$

여기서 K 는 $n \times n$ 오차 피드백 게인 행렬이다.

식 (26)으로부터 제어입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$u(t) = B_o^+ \{ (A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - d(t) + Ke(t) \} \quad (27)$$

식 (27)을 식 (21)에 대입하면 다음과 같은 오차 동력학 방정식을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = (A_o - K)e(t) = A_e e(t) \quad (28)$$

여기서 A_e 는 원하는 $n \times n$ 오차 시스템 행렬이다. 따라서, 식 (28)은 K 를 적절히 선택함으로써 A_e 의 고유값을 임의로 설정할 수 있어 오차 동력학을 안정되게 할 수 있다.

여기서는 식 (16)의 구속조건에 다음과 같은 구속조건이 추가된다.

$$(I - B_o B_o^+)K = 0 \quad (29)$$

이를 만족하기 위해서 다음이 성립한다고 가정한다.

$$B_o K_e = K \quad (30)$$

여기서 K_e 는 $r \times n$ 행렬이다.

이 경우에 있어서도 시간지연 법칙을 적용하면 식 (27)은 식 (31)과 같은 완전 모델추종 제어기가 얻어진다.

$$u(t) = u(t-L) + Fx_m(t) + Gr(t) + K_e e(t) - B_o^+ \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) \} \quad (31)$$

여기서 $K_e = B_o^+ K$ 이다.

식 (31)에는 모델의 모든 상태가 포함되고, 오차도 피드백되고 있다. 따라서, 식 (31)은 그림 3에서 보는 바와 같이 기준모델을 안정하게 추종하게 되어 완전 안정 모델추종 제어기(perfect stable model-following controller)라 할 수 있다.

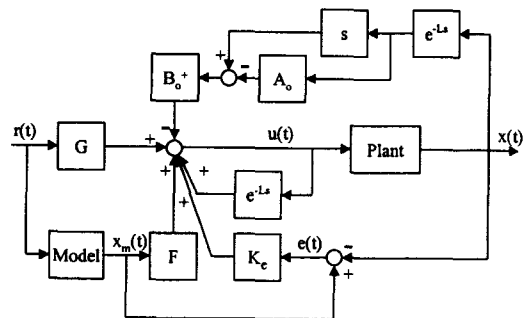


그림 3 완전 안정 모델추종 시간지연 제어기.
Fig. 3 Perfect stable model-following controller.

2.4 불완전 안정 모델추종 제어기

2.4.1 시간지연 제어기

일반적으로 다변수 시스템에서는 입력과 시스템의 상태 개수가 같지 않기 때문에 식 (15)의 구조적 구속 방정식을 쉽게 만족하지 못해 완전 모델추종을 할 수 없게 된다. 이 경우에 있어서 다음과 같은 제어 방법을 생각 할 수 있다.

식 (2)의 제어입력을 $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ 로 분할하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u_1(t) + B_o u_2(t) + d(t) \quad (32)$$

여기서, $B_o u_1(t) + d(t) = 0$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$B_o u_1(t) = -d(t) \quad (33)$$

다음에는 총체적 불확실요소 $d(t)$ 를 추정한다.

시간지연제어 기법을 도입하여 식 (2)로부터 시스템의 총체적 불확실요소 $d(t)$ 를 추정하면 $u_1(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$u_1(t) = -B_o^{-1} \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) - B_o u(t-L) \} \quad (34)$$

위 식을 식 (32)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u_2(t) + \delta d(t) \quad (35)$$

여기서 $\delta d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ 이다.

따라서, 시스템 $\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u(t) + d(t)$ 가 $\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u_2(t) + \delta d(t)$ 로 바뀌어졌음을 볼 수 있으며, 모르는 총체적 불확실성 $d(t)$ 는 큰 양이지만 $\delta d(t)$ 는 시간지연 추정에 의하여 매우 작은 양이 된다.

식 (3), (4)와 (35)로부터 다음과 같은 오차 동력학 방정식을 얻는다.

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) + \{ (A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) - B_o u_2(t) - \delta d(t) \} \quad (36)$$

식 (36)의 제어입력 $u_2(t)$ 를 다음과 같이 분할한다.

$$u_2(t) = u_{21}(t) + u_{22}(t) \quad (37)$$

식 (36)이 다음과 같이 되도록 한다.

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) - B_o u_{22}(t) - \delta d(t) \quad (38)$$

식 (38)과 같이 되기 위한 분할된 제어입력 $u_{21}(t)$ 은 다음과 같이 된다.

$$u_{21}(t) = B_o^{-1} \{ (A_m - A_o)x_m(t) + B_m r(t) \} \quad (39)$$

2.4.2 가변구조 제어기

식 (38)과 같이 구한 오차상태방정식을 이용하여 시스템의 각 상태를 제어하기 위한 제어입력 $u_{22}(t)$ 를 설계하기 위해 슬라이딩 평면을 다음과 같이 도입한다.

$$s(t) = C_s e(t) \quad (40)$$

여기서, C_s 는 $r \times n$ 행렬, $s^T(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_r(t)]$ 이다.

슬라이딩 평면 $s(t)$ 는 페루프 시스템의 상태 궤적이 슬라이딩평면에서 점근안정성 및 추종성을 갖도록 설계되어야 한다. 슬라이딩조건에 맞는 제어입력 $u_{22}(t)$ 를 다음과 같이 두 부분으로 나누어 설계한다.

$$u_{22}(t) = u_{22eq}(t) + u_{22N}(t) \quad (41)$$

여기서, $u_{22eq}(t)$ 는 $\delta d(t) = 0$ 인 표준(nominal) 시스템의 등가제어입력(equivalent control input)으로 일단 시스템의 상태궤적이 슬라이딩평면에 이르게 되면 그 평면에 항상 존재하게 하며, $u_{22N}(t)$ 은 $\delta d(t) \neq 0$ 일 때의 불연속적인 도달제어입력(reaching control input)으로 시스템의 상태궤적이 항상 슬라이딩평면을 향하게 한다. 일단 슬라이딩 모드가 발생되면 $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ 이므로 등가제어입력 $u_{22eq}(t)$ 를 구하기 위해 슬라이딩 평면을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= C_s \dot{e}(t) \\ &= C_s \{ A_o e(t) - B_o u_{22eq}(t) \} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

따라서, 등가제어입력 $u_{22eq}(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$u_{22eq}(t) = (C_s B_o)^{-1} C_s A_o e(t) \quad (43)$$

여기서, $C_s B_o$ 는 비특이(nonsingular) 행렬이고, 양 한정(positive definite) 이다고 가정한다. 도달제어입력과 총체적 불확실요소 $\delta d(t)$ 에 대해 정리하기 위해 다음과 같은 리아프노프 함수(Lyapunov function) 후보를 정한다.

$$V(t) = \frac{1}{2} s(t)^T s(t) \quad (44)$$

$$\dot{V}(t) = s(t)^T C_s \{ A_o e(t) - B_o [u_{22eq}(t) + u_{22N}(t) + \delta w(t)] \} \quad (45)$$

여기서, $\delta d(t) = B_o \delta w(t)$ 가 성립한다고 가정한다. $\delta w(t)$ 는 $n \times 1$ 벡터이다.

식 (43)을 식 (45)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(t) = -s(t)^T C_s B_o (u_{22N}(t) + \delta w(t)) \quad (46)$$

총체적 불확실요소 $\delta w(t)$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$|\delta w(t)| \leq \hat{k} \quad (47)$$

여기서, $\hat{k} = |\delta w(t)|_{\max}$ 이다.

다음과 같이 도달제어입력을 정한다.

$$u_{22N}(t) = k \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (48)$$

여기서, k 는 도달제어입력 계인이고 $k = \hat{k} + k_o$, \hat{k} 및 k_o 는 양의 상수이다.

식 (48)을 식 (46)에 적용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -s(t)^T C_s B_o k \operatorname{sgn}(s(t)) + s(t)^T C_s B_o \delta w(t) \\ &\leq -s(t)^T C_s B_o k \operatorname{sgn}(s(t)) + |s(t)^T C_s B_o| \hat{k} \\ &= -|s(t)^T C_s B_o| k + |s(t)^T C_s B_o| (k - k_o) \\ &= -|s(t)^T C_s B_o| k_o \end{aligned} \quad (49)$$

따라서, $\dot{V} < 0$ 이므로 슬라이딩 모드 존재 조건인 $s(t)^T \dot{s}(t) < 0$ 를 만족하며 최종적인 제어입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t-L) - B_o^{-1} \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) \\ &\quad - (A_m - A_o) x_m(t) - B_m r(t) \} \\ &\quad + (C_s B_o)^{-1} C_s A_o e(t) + k \operatorname{sgn}(s(t)) \end{aligned} \quad (50)$$

식 (50)은 그림 4에서 보는 바와 같이 기준모델을 안정하게 추종하지만 불연속 제어 함수가 존재하기 때문에 불완전 안정 모델추종 제어기(imperfect stable model-following controller)라 할 수 있다.

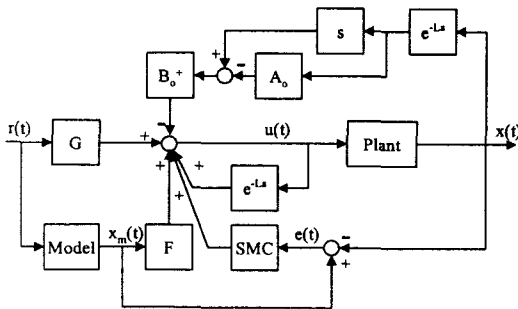


그림 4 불완전 안정 모델추종 제어기.

Fig. 4 Imperfect stable model-following controller.

한편, 불연속함수에 의한 제어입력의 떨림(chattering) 현상을 줄이기 위해 식 (50)과 같이 구해진 제어입력에서 불연속적인 부호함수($\operatorname{sgn}(\cdot)$)를 식 (51)과 같이 일정한 두께를 가진 경계층 내에서 연속적인 특성을 가지는 포화함수(saturation function)로 치환한다.

$$\operatorname{sat}(s(t)) \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(s(t)) & \text{if } |s(t)| \geq \phi \\ \frac{s(t)}{\phi} & \text{if } |s(t)| < \phi \end{cases} \quad (51)$$

3. 전산모사를 위한 천정 크레인 시스템 설정

본 논문에서는 속도제어 모터구동 드라이버 및 트롤리(trolley), 이송물로 이루어진 천정크레인 시스템의 동력학 모델을 고려한다[11].

트롤리 및 이송물의 상태변수를 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T \\ &= [y(t) \ \theta_y(t) \ \dot{y}(t) \ \dot{\theta}_y(t)]^T \end{aligned} \quad (52)$$

여기서, $y(t)$ 는 크레인 트롤리의 위치, $\theta_y(t)$ 는 트롤리 주행 방향의 이송물의 흔들림 각도이다.

이때 트롤리 및 이송물의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t) \quad (53)$$

여기서,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_1(t) & 0 \\ 0 & -a_2(t)a_6(t) - a_5(t) & a_1(t)a_6(t) & -a_4(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1(t) \\ -a_1(t)a_6(t) \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2(t)\theta(t) + v_A(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} \text{이며, } u(t)$$

는 트롤리 구동 드라이버에 가하는 제어 속도, $f(t)$ 는 시스템의 비선형성, 불확실성 및 외란항의 합이다. 또한,

$$a_1(t) = D_y(t), \quad a_2(t) = \gamma_1(t) \frac{mg}{M}, \quad a_4(t) = \left(\frac{2K(t)}{l(t)} + D_l(t) \right),$$

$$a_5(t) = g/l(t), \quad a_6(t) = 1/l(t) \text{이고, } D_y(t), D_l(t) \text{는 각각 트롤리 및 이송물의 점성 마찰계수, } m \text{은 이송물의 질량, } M \text{은 트롤리 주행 차륜의 질량, } l(t) \text{는 로프의 힌지점(hinged point)부터 이송물의 무게중심까지 길이, } g \text{는 중력가속도(} 9.8m/s^2 \text{)} \text{이다.}$$

이상적으로 추종하기를 원하는 크레인 목표값 궤적을 생성하기 위해 식 (54)와 같은 가제어(controllable) 기준모델을 설정한다.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_d(t) \quad (54)$$

여기서,

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & -\omega_{n\theta}^2 & \frac{\omega_{n\theta}^2}{g\tau} & -2\zeta_\theta\omega_{n\theta} \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \\ -\frac{\omega_{n\theta}^2}{g\tau} \end{bmatrix}$$

이고, $u_d(t)$ 는 속도입력, $\omega_{n\theta}$ 및 ζ_θ 는 각각 원하는 이송물의 고유진동수 및 감쇠계수(damping factor), τ 는 원하는 트롤리의 시정수(time constant)이다.

식 (53)의 공칭모델(nominal model)에 대해서는 다음과 같이 고려한다.

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u(t) + d(t) \tag{55}$$

여기서,

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \beta_1\beta_3 & 0 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ -\beta_1\beta_3 \end{bmatrix}$$

이고, $d(t)$ 는 $f(t)$

에 시변 $A(t)$ 및 $B(t)$ 까지 포함한 항이다.

이와 같은 기준모델과 공칭모델에 대한 불완전 안정 모델 추종 제어기는 다음과 같이 된다.

$$u(t) = u(t-L) - B_o^{-1} \{ \dot{x}(t-L) - A_o x(t-L) - (A_m - A_o)x_m(t) - B_m u_d(t) \} + (C_s B_o)^{-1} C_s A_o e(t) + k \operatorname{sgn}(s(t)) \tag{56}$$

기준모델의 역할은 제어 시스템이 추종하기를 원하는 기준 궤적을 제시하여 주는 것이므로 선정된 기준 모델에 의해 제어 시스템의 추종 성능이 상당히 영향을 받는다. 식 (54)의 크레인 기준모델의 트롤리 시정수 τ 는 0.05sec, 크레인 이송물의 기준모델 고유진동수 $\omega_{n\theta}$ 및 감쇠계수 ζ_θ 는 각각 1.67 rad/sec, 0.707로 설정하였다. 식 (53)의 크레인 모델에서 $\alpha_1(t)$ 는 7.32, $\gamma_1(t)$ 는 0.001, $D_f(t)$ 는 0.0015, m 과 M 은 각각 500kg으로 설정하였다. 이는 2톤 용량의 실제 트롤리 시스템과 유사하다. 제안한 제어기를 확인하기 위하여 식 (55)의 크레인 공칭모델에서 로프길이 l_0 는 500cm로 하였으며, $\beta_2 = g/l_0$, $\beta_3 = 1/l_0$, β_1 은 4.32로 설정하였다. $v_{1f}(t)$ 및 $v_{2f}(t)$ 는 비선형성, 모델되지 못한 불확실성을 포함한 항이나, 속도 제어형 크레인 시스템에서는 큰 영향을 미치지 못하기 때문에 무시하였다.

4. 전산모사

식 (48)의 도달제어입력으로 오차의 상태궤적이 슬라이딩평면에 이르면 식 (43)의 등가제어입력으로 슬라이딩평면을 따라 운동하는 슬라이딩모드가 발생하게 된다. 이 때, 식

(38)의 오차동력학은 $\dot{e}(t) = [I - B_o(C_s B_o)^{-1} C_s] A_o e(t)$ 로 된다. 따라서, 오차 동력학이 점근 안정성을 갖기 위해서는 적절한 C_s 가 선정되어야 한다. 여기서 C_s 는 극배치법(pole-placement method)을 이용하여 구하였다. 오차 동력학의 고유값은 -7, 0, $-1.414 \pm 1.414j$ 로 선정하였으며, 이때의 C_s 는 [1 155.9155 0.8501 390.0255]로 계산되었다. 또한, 슬라이딩모드 제어기의 성능은 경계층(ϕ) 값의 결정에도 달려 있다. 여기서, 경계층 값이 크면 큰 허용오차를 가진다. 본 논문에서는 경계층 값을 0.27로 작게 설정하였다. 슬라이딩모드 제어기의 게인(k)도 추종성능의 한 변수로서 총체적 불확실 요소보다 큰 값을 가지면 되나 너무 크게 되면 심한 채터링을 유발시킨다. 본 논문에서는 TDC에 의해서 불확실성이 사전에 제거되기 때문에 게인을 비교적 작은 값인 0.3으로 설정하였다. 제안한 불완전 안정 모델추종 제어기의 성능평가는 PC-586에서 C-language를 활용하여 미분방정식을 4차 Runge-Kutta method로 풀면서 전산모사로 수행하였다. 제어시간은 크레인의 특성을 고려하여 100msec로 하였다. 크레인 시스템의 실제 동력학 모델과 차이가 나는 공칭모델을 토대로 시변요소인 로프길이 변화, 이송물 흔들림 각도의 초기값 존재, 갑작스런 외란 등을 고려하여 불완전 안정 모델추종 제어기가 원하는 상태궤적(크레인 트롤리의 위치, 속도, 이송물의 흔들림 각도, 각속도(각도와 유사한 형상이기 때문에 그림 도시는 생략))을 잘 추종시키는지의 성능을 평가하였다.

그림 5는 로프길이 500cm 지점에 매달린 이송물을 로프길이 변화 없이 트롤리의 이송속도를 30cm/sec, 가감속 시간을 3초로 하여 제어하지 않고 680cm 이송시킨 경우와 로프의 상하속도를 15cm/sec, 가감속 시간을 1.5초로 하여 로프의 길이를 150cm 변화시킨 경우에 대한 전산모사 결과이다. 이송물의 흔들림이 정속 구간에서 크게 발생함을 볼 수 있으며, 특히 로프 길이가 변화하는 경우에 있어서, 정지구간에서 이송물의 흔들림이 매우 커짐을 볼 수 있다.

그림 6은 그림 5에 대해 불완전 안정 모델추종 제어기를 적용한 결과를 보여준다. 그림에서 보는 바와 같이 로프 길이의 변화가 없는 경우에는 제어입력에 떨림 현상이 발생하지 않으나, 로프 길이 변화가 있는 경우에는 떨림이 발생함을 볼 수 있다. 이는 매개변수 변화에 대해 신속히 대처하고 있기 때문이다. 크레인의 물리적인 특성 때문에 가감속 구간에서 이송물의 원하는 흔들림 궤적을 정확하게 추종하지는 못하나 매우 근사적으로 잘 추종함을 볼 수 있으며, 특히 정속 구간 및 정지 시에는 원하는 궤적(0°)과 잘 일치함을 볼 수 있다. 속도 궤적도 가감속 구간의 상승/하강 침투 부분을 제외하고는 원하는 궤적과 잘 일치함을 볼 수 있다. 이송위치에 대한 궤적도 잘 추종함을 알 수 있다.

그림 7은 초기각도가 0.5° 존재하고, 로프가 변화하지 않는 경우와 변화하는 경우에 대해서 성능을 평가하였다. 이 경우에서도 초기의 미세한 차이를 제외하고는 초기각도가 존재하지 않는 그림 6의 경우와 성능이 거의 똑같았다.

그림 8은 로프 변화 및 이송도중 갑작스런 0.3°의 외란을 고려한 경우로, 이 경우에서도 외란을 신속하게 제거함을 볼 수 있으며 나머지 구간에서는 외란이 발생하지 않는 경우와

똑같았다.

그림 9는 제한한 불안전 안정 모델추종 제어를 전산 모사 한 그림 6, 7, 8의 결과 중에서 로프가 변화하는 가운데 이송 물의 흔들림 초기각도 및 외란이 없는 경우, 초기 각도가 0.5 도 존재하는 경우, 외란이 0.3도 존재하는 경우에 대한 트롤리 이송거리, 이송 속도 및 이송물의 흔들림 각도의 모델추종 오차를 보여준다.

실제 천정 크레인 모델과 일치하지 않는 공칭모델을 가정 하고, 로프 길이 변화, 이송물의 초기 각도 및 이송물의 외란 을 고려하여 불안전 안정 모델추종 제어를 전산모사 한 결과, 이 들의 환경에 신속하게 대처하는 성능을 보여주었으며, 급 격한 변화가 있는 부분을 제외하고는 원하는 궤적에 잘 추종 함을 알 수 있었다.

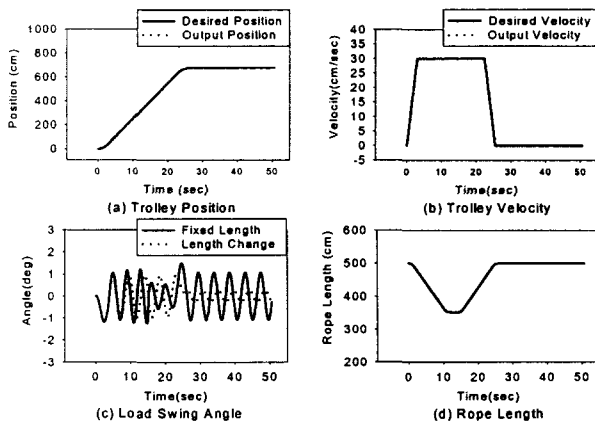


그림 5 크레인의 사다리형 속도 운전.
Fig. 5 Crane operation with trapezoidal velocity.

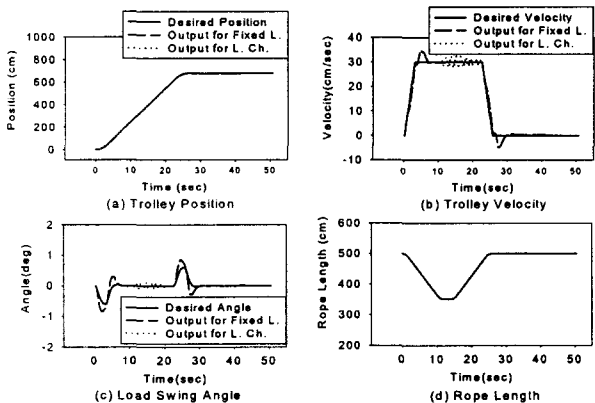


그림 6 초기 흔들림이 없는 경우의 불안전 안정 모델추종 제어.
Fig. 6 Imperfect stable model-following control for initial 0 deg.

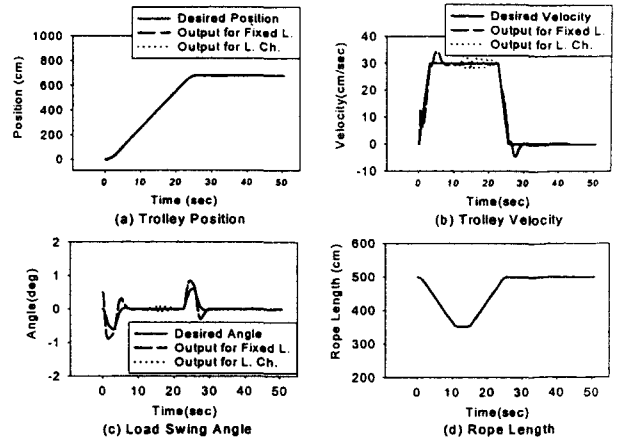


그림 7 초기 이송물 흔들림 각도가 있는 경우의 불안전 안정 모델추종 제어.

Fig. 7 Imperfect stable model-following control for initial 0.5 deg.

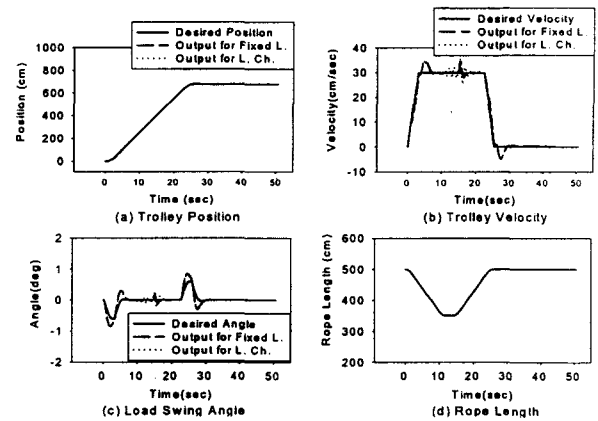


그림 8 이송물 흔들림에 0.3도의 외란이 있는 경우의 불안전 안정 모델추종 제어.

Fig. 8 Imperfect stable model-following control for disturbance 0.3 deg.

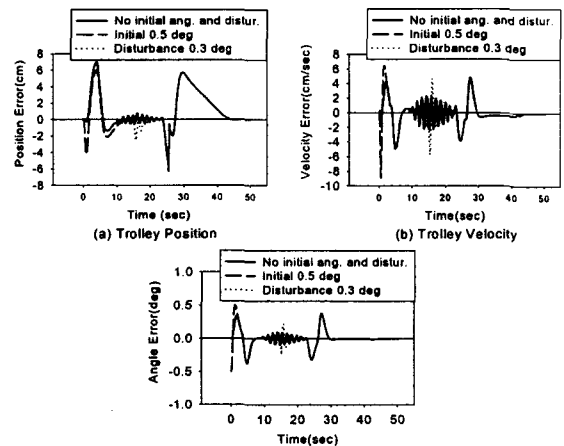


그림 9 불안전 안정 모델추종 제어에 대한 모델 추종오차.
Fig. 9 Model-following error for imperfect stable model-following control.

5. 결 론

불확실한 동적 시스템을 상태공간으로 표현하여 시간지연 제어와 결합된 여러 가지 이상적인 강인 완전 모델추종 제어기를 설계하였으며, 완전 모델추종 조건을 만족하지 못하는 경우에 대해서 시간지연 제어와 슬라이딩모드 제어를 결합한 불안정 안정 모델추종 제어기를 설계하였다. 실제 크레인 시스템, 이와 다른 공칭모델 및 원하는 기준모델을 설정하고, 불안정 안정 모델추종 제어기를 적용하여 실제 크레인 시스템의 매개변수 변화, 초기값 및 외란에 대해서 원하는 상태궤적(크레인 트롤리의 위치, 속도, 이송물의 흔들림 각도 등)의 추종성능을 전산모사를 통해서 평가하였다. 전산모사 결과, 제어기는 로프변화에 신속하게 대처하는 성능을 나타냈으며, 초기 흔들림 각도 및 외란에도 신속히 대처하면서 원하는 상태궤적에 잘 추종하는 강인한 성능을 보여주었다. 향후 이를 현장의 크레인 시스템에 적용하여 좀더 실질적인 성능 평가를 수행할 계획이다.

감사의 글

본 연구는 2001년도 과학기술부의 원자력연구 개발사업의 일환으로 이루어진 연구로서, 관계부처에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

[1] K. Youcef-Toumi and O. Ito, "A Time Delay Controller for Systems with Unknown Dynamics," Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 112, pp. 133-142, 1990.

[2] T.C. Steve Hsia, "A New Technique for Robust Control of Servo Systems," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 36, no. 1, pp. 1-7, 1989.

[3] V.I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," IEEE Transaction on Automatic Control., vol. ac-22, no. 2, pp. 212-222, 1977.

[4] J.-J.E. Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulators," International Journal of Robotics Research, vol. 4, no. 2, pp. 49-64, 1985.

[5] J.Y. Hung, W.B. Gao and J.C. Hung, "Variable Structure Control: A Survey," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.

[6] Satochi Komada, Koichi Nomura, and Takamasa Hori Muneaki Ishida, "Robust Force Control Based on Compensation for Parameter Variation of Dynamic Environment," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 40, No. 1, pp. 89-95, 1993.

[7] H. Elmali and N. Olgac, "Sliding Mode Control with Perturbation Estimation(SMCPE) : A New Approach," Int. J. of Control, vol. 56, no. 4, pp. 923-941, 1992.

[8] J.X. Xu, W.J. Cao, "Synthesized Sliding Mode and Time-Delay Control for a Class of Uncertain Systems," Automatica, vol. 36, pp. 1909-1914, 2000.

[9] J. J. Craig, "Introduction to Robotics: Mechanics and

Control," Addison-Wesley, 1986.

[10] Y. Hori, "Robust Motion Control Based on a Two-Degrees-Of-Freedom Servosystem," Advanced Robotics, vol. 7, no. 6, pp. 525-546, 1993.

[11] 박병석, 윤지섭, 강이석, "오차피드백 제어입력이 개선된 모델추종 시간지연 제어기 설계", 한국정밀공학회지 제17권 제12호, pp. 176-184, 2000.

저 자 소 개



박 병 석 (朴炳錫)

1960년 3월 20일 생. 1986년 조선대 기계공학과 졸업. 1990년 전남대학교 기계공학과 졸업(석사). 1996년~현재 충남대 기계설계공학과 박사과정. 1987년~현재 한국원자력연구소 선임연구원
Tel : 042-868-2596, Fax : 042-868-2854
E-mail : nbspark@kaeri.re.kr



윤 지 섭 (尹智燮)

1958년 2월 3일 생. 1980년 서울대 기계공학과 졸업. 1982년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(석사). 1987년 동대학원 기계공학과 졸업(공학박사). 1987년~현재 한국원자력연구소 책임연구원(팀장)
Tel : 042-868-2855, Fax : 042-868-2854
E-mail : jsyoon@kaeri.re.kr



강 이 석 (姜理錫)

1952년 2월 14일 생. 1974년 서울대 기계공학과 졸업. 1983년 아주대 기계공학과 졸업(석사). 1994년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학박사). 1981년~현재 충남대 기계설계공학과 교수
Tel : 042-821-6647, Fax : 042-822-7366
E-mail : eskang@hanbat.chungnam.ac.kr