

모델 변환을 이용한 시간지연 선형시스템의 지연종속 H_∞ 제어

論 文
50D-9-1

Design of H_∞ Control of Time-Delayed Linear Systems Using Model Transformation

馬 三 善* · 李 喜 松** · 金 鎮 勳***
(Sam-Sun Ma · Hee-Song Lee · Jin-Hoon Kim)

Abstract - This paper deals with the design of delay-dependent H_∞ control for time-delayed linear systems. We propose the two different model transformations to handle efficiently the time delay and derive conditions linear matrix inequalities (LMI's) of which are dependent on the size of time-delay and its time-derivative. The H_∞ controller is obtained by checking the feasibility of these LMI's. Finally, we show the usefulness and applicability of our results by an example.

Key Words : model transformation, delay-dependent, H_∞ control, LMI.

1. 서 론

시간지연은 전력계통, 공정제어, 우주항공제어 등과 같이 대규모 시스템뿐만 아니라 일반적인 제어에서도 흔히 발생하는 문제로써, 제어기 설계 시에 시간지연을 무시할 경우 시스템의 성능을 저하시킬 뿐만 아니라 불안정하게도 될 수 있다. 따라서 시간지연을 고려한 시스템의 해석 및 설계에 관해 지난 수십 년간 많은 연구가 수행되어 왔다 [1]. 일반적으로 시간지연의 해석 및 설계 연구는 시간지연 독립(delay-independent)[2][3]과 시간지연종속(delay-dependent)[4][5] 두 가지 방법으로 분류할 수 있다. 전자의 경우는 시간지연의 크기에 안정성 또는 제어기 설계조건이 독립적으로 제시되는 방법이고, 후자의 경우는 그 조건에 시간지연의 크기가 종속되어지는 방법으로, 시간지연 독립 방법보다는 시간지연 종속 방법이 덜 보수적(conservative)이다. 그래서 시간지연 연구의 초기에는 시간지연 독립 방법을 이용한 연구들이 주류를 이루었지만, 근래에는 시간지연 종속 방법을 통한 시간지연 시스템의 안정성 해석이나 제어기 설계 문제를 많이 다루고 있다.

시간지연 종속 방법은 시스템에서 발생하는 지연정보를 고려하여 해석하는 방법으로 이전 결과로는 주로 Razumikhin이론 [4]이나 Lyapunov이론 [3]을 이용하여 시스템의 안정성을 보장하는 시간지연에 대한 상한 값을 구하였다.

최근에는 시간지연 시스템의 해석이나 설계 시에 지연 종속 조건을 얻기 위해 시스템의 모델 변환을 이용하는 연구가 진행되고 있다. 모델 변환을 이용할 경우에는 시간지연 크기에 종속되는 조건을 좀 더 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있다 [6]. 또한 외란으로부터 출력까지의 성능지수를 최소로 하기 위한 H_∞ 제어는 강인 제어 연구의 한 분야로서 시간지연과 더불어 많은 연구가 되고 있다 [7]. 기존에는 ARI(Algebraic Riccati Inequality)이나 BRL (Bounded Real Lemma)등을 통해 제어기를 설계하였지만 이러한 접근법 들은 많은 제약조건들과 가정으로 이루어져 파라미터의 해를 구하는데 어려움이 있었을 뿐만 아니라 얻어진 결과 역시 개선의 여지를 가지고 있었다 [8]. 하지만 LMI (Linear Matrix Inequality)을 이용하여 제시된 조건들은 여러가지 제약 조건들을 쉽게 다룰 수 있고 원하는 해를 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있어 많은 연구가 되고 있다 [9].

본 논문에서는 시변 시간지연을 갖는 선형시스템에 두 가지 새로운 모델 변환을 이용하여 시간지연의 크기 및 변화율에 종속하는 충분조건을 제시한다. 제시된 결과들은 L_2 이득을 만족시키는 조건으로 LMI의 형태로 구해지고 제시된 조건으로부터 쉽게 시스템의 H_∞ 제어기 설계가 가능하다. 마지막으로 유도된 결과를 LMI toolbox 를 이용한 시뮬레이션을 통해 적절한 시간지연의 크기를 구할 수 있음을 보인다. 본 논문에서 $\|\cdot\|$ 는 유클리드 벡터 노름(norm) 이고, $\|\cdot\|_2$ 는 연속 벡터의 L_2 노름, 즉 $\|w(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right)^{1/2}$ 이며, $(\cdot)^T$ 는 벡터 혹은 행렬의 전치이다. 그리고 $Y < X$ 또는 $Y \leq X$ 는 두 정방 행렬

* 正 會 員 : 韓 電 電 力 研 究 院 發 電 研 究 室 先 任 研 究 員
** 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 電 氣 學 科 博 士 課 程
*** 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 計 測 制 御 工 學 科 副 教 授 · 工 博
接受日字 : 2001年 5月 26日
最終完了 : 2001年 9月 12日

$X, Y \in R^{n \times n}$ 에 대한 행렬 $(X - Y)$ 의 양한정 (positive definite), 또는 양반한정 (positive semi-definite) 행렬을 의미하고 $X^{1/2}(X^{1/2})^T = (X^{1/2})^T X^{1/2} = X$ 의 관계가 성립한다. 그리고 I 는 적당한 차원을 갖는 단위행렬 이다. 그리고 논문의 구성은 제2장에서는 시간지연 시스템의 기술과 본 논문에서 제시한 두 가지 모델변환 방법과 주요 결과의 증명에 이용되는 보조정리들을 서술하였고, 제3장에서는 이러한 변환된 시스템을 바탕으로 시간지연을 포함하는 시스템에 대해 H_∞ 제어가 존재하는 충분조건을 제시하였다. 제4장에서는 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해 간단한 예제를 보였다.

2. 문제기술

2.1 시간지연 시스템

다음으로 기술되는 시간지연 선형시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $w(t) \in R^p$ 는 외란을 나타내며, A, A_1, B, B_w, C, D 는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. 그리고 다음을 만족하는 시변 시간지연을 가정하자.

$$0 \leq \tau(t) \leq d, \quad \frac{d\tau(t)}{dt} \leq h < 1, \quad \forall t \quad (2)$$

여기서 $h, d \geq 0$ 는 상수이고, 초기상태와 외란은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, \quad t \in [-2d, 0], \\ w(t) &= 0, \quad t \in [-d, 0]. \end{aligned} \quad (3)$$

위와 같은 조건에 다음의 상태피환 제어를 적용하면

$$u(t) = Kx(t) \quad (4)$$

주어진 시스템 (1)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [A + BK]x(t) + A_1x(t - \tau(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 H_∞ 제어는 외란 w 로부터 출력 z 까지의 L_2 이득이 주어진 값 γ 보다 작거나 같게되는 제어, 다시 말하면 $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ 가 되는 상태피환제어 (4)를 찾는 것이

다. 이를 위해 먼저 초기 상태조건과 초기 외란 조건을 고려한 모델변환 방법과, 다음으로 상태, 외란 그리고 출력에 대한 변환계수를 지수형태로 두어 모델변환하는 방법을 이용하여 시간변화율에 따른 시간지연의 크기에 대한 가능해 집합 (feasible set)의 범위를 구한다.

2.2 모델변환 방법

시간지연 시스템에 대한 다양한 모델변환 방법이 있으나 여기서는 다음과 같은 두 가지의 방법에 대하여 제시한다.

방법 1 : 시간지연 항의 변형을 이용한 모델변환

먼저 시간지연 항을 변환하면

$$\begin{aligned} x(t - \tau(t)) &= x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t [(A + BK)x(s) + A_1x(s - \tau(s)) + B_w w(s)] ds \\ &= x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t (A + BK)x(s) ds - \int_{t-\tau(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} \frac{1}{1-\tau'(s)} A_1x(s) ds \\ &\quad - B_w \int_{t-\tau(t)}^t w(s) ds. \end{aligned}$$

위의 식을 이용하여 식(5)는 다음 식(6)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A + BK + A_1)x(t) - A_1(A + BK) \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \\ &\quad - A_1 \int_{t-\tau(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} \frac{1}{1-\tau'(s')} x(s) ds \\ &\quad - A_1 B_w \int_{t-\tau(t)}^t w(s) ds + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $t' = t - \tau$ 이고 $s' - \tau(s') = s$ 이다. 식 (5)와 식 (6)을 비교해 보면, 시스템 (5)에서는 $x(t), t \in [-d, 0]$ 와 같은 초기상태 조건이 필요하지만 시스템 (6)에서는 $x(t), t \in [-2d, 0]$ 와 $w(t), t \in [-d, 0]$ 같은 초기 상태조건과 초기 외란 조건이 필요함을 알 수 있다. 여기서 식 (3)과 같은 초기조건을 가정하면 시스템 (5)와 (6)은 같게 된다. 이것은 시스템 (5) 대신 (6)을 사용함으로써 H_∞ 제어 (4)를 구할 수 있다는 의미이다.

방법 2 : 지수함수를 이용한 모델변환

모델변환을 위한 상태, 제어, 외란 변수를 각각 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= e^{\beta t} x(t) \\ \tilde{w}(t) &= e^{\beta t} w(t) \\ \tilde{z}(t) &= e^{\beta t} z(t) \end{aligned} \quad (7)$$

이때 계수 β 의 값은 등가변환(equivalence transformation)을 위해 $\beta > 0$ 으로 한다. 이를 이용하여 시간지연 시스템 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= ae^{\beta t}x(t) + e^{\beta t}\dot{x}(t) \\ &= ae^{\beta t}x(t) + e^{\beta t}[(A+BK)x(t) \\ &\quad + A_1x(t-\tau(t)) + B_w w(t)] \\ &= (A+BK+\beta I_n)\tilde{x}(t) + e^{\beta\tau(t)}A_1\tilde{x}(t-\tau(t)) + B_w\tilde{w}(t) \\ \tilde{z}(t) &= C\tilde{x}(t) + D\tilde{w}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

이것 또한 시스템 (5) 대신 (8)과 같은 모델변환 방법을 사용하여 H_∞ 제어 (4)를 구할 수 있게 된다.

다음은 주요결과의 증명에 사용되는 보조정리들이다.

보조정리 1 : $g(t)$ 가 다음과 같이 주어질 때

$$g(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t-\theta}^t \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds d\theta$$

다음의 조건이 성립한다.

(i) $g(t) \geq 0$ and $g(0) = 0$

(ii) $\frac{d}{dt}g(t) = [b(t) - a(t)]\|\mathcal{F}(t)\|^2 - (1 - \dot{b}(t)) \cdot \int_{t-b(t)}^{t-a(t)} \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds + [b(t) - \dot{a}(t)] \int_{t-a(t)}^t \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds.$

여기서 $a(t) \leq b(t)$ 이고 $\mathcal{F}(s) = 0, s \in [-b(0), 0]$ 이다.

증명 : $a(t) \leq b(t)$ 이므로 $g(t) \geq 0$ 는 명백하다. 시간미분을 증명하기 위해서 $f_1(s)$ 를 $\frac{d}{ds}f_1(s) = \|\mathcal{F}(s)\|^2$ 로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b \int_{t-\theta}^t \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds d\theta \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b \int_{t-\theta}^t \frac{d}{ds} f_1(s) ds d\theta \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b [f_1(t) - f_1(t-\theta)] d\theta \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b f_1(t) d\theta + \frac{d}{dt} \int_{t-a}^{t-b} f_1(\theta) d\theta \\ &= \frac{d}{dt} [(b-a)f_1(t)] + \frac{d}{dt} \int_{t-a}^{t-b} f_1(\theta) d\theta \\ &= (b-a)\dot{f}_1(t) + (b-\dot{a})f_1(t) + (1-b)\dot{f}_1(t-b) \\ &\quad - (1-\dot{a})f_1(t-a) \\ &= (b-a)\|\mathcal{F}(t)\|^2 - (1-\dot{b})[f_1(t-a) - f_1(t-b)] \\ &\quad + (\dot{b}-\dot{a})[f_1(t) - f_1(t-a)] \\ &= (b-a)\|\mathcal{F}(t)\|^2 - (1-b) \int_{t-b}^{t-a} \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds \\ &\quad + (b-\dot{a}) \int_{t-a}^t \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

보조정리 2 : $a(t) \leq b(t)$ 라 할 때, 다음의 부등식이 성립한다.

$$\left\| \int_{a(t)}^{b(t)} \mathcal{F}(s) ds \right\|^2 \leq [b(t) - a(t)] \int_{a(t)}^{b(t)} \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds$$

증명 : 다음과 같은 부등식으로부터

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \mathcal{F}(s) ds \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(s) ds \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b ds \right) \left(\int_a^b f_i^2(s) ds \right) \\ &= \left(\int_a^b ds \right) \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i^2(s) ds \\ &= (b-a) \int_a^b \|\mathcal{F}(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다.

보조정리 3 [10] : 다음의 2개 행렬은 동치이다.

$$\begin{aligned} i) & R > 0, Q - SR^{-1}S^T > 0 \\ ii) & \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

보조정리 4 : 함수 $v(x(t), w(t))$ 가 존재하여 $v(x(t), w(t)) \geq 0, \forall t > 0$ 이고 $v(x(0), w(0)) = 0$ 인 조건에서 다음을 만족하면

$$\frac{d}{dt}v(x, w) + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0, \forall x, w \tag{9}$$

L_2 이득은 γ 보다 적거나 같게 된다. 즉, $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ 가 된다.

증명 : 식 (7)을 $v(x(0), w(0)) = 0$ 조건으로 0에서 T 까지 적분하면 다음과 같이 된다.

$$v(x(T), w(T)) + \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \leq 0$$

따라서 $v(x(T), w(T)) \geq 0, \forall T > 0$ 이면 $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ 가 된다.

3. 주요 결과

다음의 정리 1은 시간지연 항의 변형을 이용한 모델변환 방법 1의 주요 결과이다.

정리 1 : 시스템 (1)에 식 (2)와 같이 표현되는 시간지연의 영향을 고려하자. 만일 양 한정 행렬 $X, Q_1, Q_2 \in R^{n \times n}$, $Q_3 \in R^{q \times q}$ 가 존재하고 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 다음의 LMI를 만족할 때

$$\begin{bmatrix} m_{11} & A_1 B_w & (AX+BY)^T & X & XC^T & A^T \\ B_w^T A_1^T & -Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (AX+BY) & 0 & -(\frac{1-h}{d^2})Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -\phi & 0 & 0 \\ CX & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Psi \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

여기서 $A = D^T CX + B_w^T$, $\phi = (\frac{(1-h)^3}{d^2})Q_2$,

$\Psi = [\gamma^2 I - D^T D - (\frac{d^2}{1-h})Q_3]$ 로 놓는다.

다음의 제어를 적용하면

$$u(t) = Kx(t); K = YX^{-1}$$

외란 w 에서부터 출력 z 까지의 L_2 이득은 γ 보다 작거나 같게 됨을 보장한다. 또한

$$m_{11} = (A + A_1)X + X(A + A_1)^T + BY + Y^T B^T + A_1 Q_1 A_1^T + A_1^2 Q_2 (A_1^T)^2$$

증명 : 먼저 다음과 같이 놓고

$$v_0(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

$$v_1(x(t)) = \int_0^t \int_{t-\theta}^t x^T(s) (A + BK)^T Q_1^{-1} (A + BK) x(s) ds d\theta$$

$$v_2(x(t)) = \int_t^{t+d} \int_{t-\theta}^t x^T(s) Q_2^{-1} x(s) ds d\theta$$

$$v_3(w(t)) = \int_0^t \int_{t-\theta}^t w^T(s) Q_3 w(s) ds d\theta$$

식 (6)의 궤적에 따라 시간미분 $\dot{v}_0(x)$ 를 구하면 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0(x) &= 2x^T(t) P (A + BK + A_1)x \\ &\quad - 2x^T(t) A_1 \int_{t-\tau(t)}^t (A + BK) x(s) ds \\ &\quad - 2x^T P A_1^2 \int_{t-\tau(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} \left(\frac{1}{1-\tau(s')} \right) x(s) ds \\ &\quad - 2x^T(t) P A_1 B_w \int_{t-\tau(t)}^t w(s) ds + 2x^T(t) P B w(t) \\ &\leq 2x^T(t) P (A + BK + A_1)x + \|x^T(t) P A_1 Q_1^{1/2}\|^2 \\ &\quad + \left\| \int_{t-\tau(t)}^t Q_1^{-1/2} (A + BK) x(s) ds \right\|^2 \\ &\quad + \|x^T(t) P A_1^2 Q_2^{1/2}\|^2 \\ &\quad + \left\| \int_{t-\tau(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} \left(\frac{1}{1-\tau(s')} \right)^2 Q_1^{-1/2} x(s) ds \right\|^2 \\ &\quad + \|x^T(t) P A_1 B_w Q_3^{-1/2}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left\| \int_{t-\tau(t)}^t Q_3^{1/2} w(s) ds \right\|^2 + 2x^T(t) P B w(t) \\ &\leq 2x^T(t) P (A + BK + A_1)x + \|x^T(t) P A_1 Q_1^{1/2}\|^2 \\ &\quad + d \cdot \int_{t-\tau(t)}^t \|Q_1^{-1/2} (A + BK) x(s)\|^2 ds \\ &\quad + \|x^T(t) P A_1^2 Q_2^{1/2}\|^2 \\ &\quad + \left(\frac{d}{(1-h)^2} \right) \int_{t-\tau(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} \|Q_1^{-1/2} x(s)\|^2 ds \\ &\quad + \|x^T(t) P A_1 B_w Q_3^{-1/2}\|^2 + d \cdot \int_{t-\tau(t)}^t \|Q_3^{1/2} w(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2x^T(t) P B w(t) \end{aligned}$$

그리고 보조정리 1과 보조정리 2를 사용하여 $\frac{d}{dt} v_1(x)$,

$\frac{d}{dt} v_2(x)$, $\frac{d}{dt} v_3(w)$ 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} v_1(x) = \tau(t) \cdot x^T(t) (A + BK)^T Q_1^{-1} (A + BK) x(t)$$

$$\begin{aligned} &- (1 - \dot{\tau}(t)) \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) (A + BK)^T \\ &\quad \cdot Q_1^{-1} (A + BK) x(s) ds \end{aligned}$$

$$\leq d \cdot x^T (A + BK)^T Q_1^{-1} (A + BK) x(t)$$

$$\begin{aligned} &- (1-h) \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) (A + BK)^T \\ &\quad \cdot Q_1^{-1} (A + BK) x(s) ds \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} v_2(x) = \tau(t) \cdot x^T(t) Q_2^{-1} x(t)$$

$$- (1 - \dot{\tau}(t)) \int_{t-\tau(t)-d}^{t-\tau(t)} x^T(s) Q_2^{-1} x(s) ds$$

$$\leq d \cdot x^T(t) Q_2^{-1} x(t) - (1-h) \int_{t-\tau(t)-d}^{t-\tau(t)} x^T(s) Q_2^{-1} x(s) ds$$

$$\frac{d}{dt} v_3(w) = \tau(t) \cdot w^T(t) Q_3 w(t)$$

$$- (1 - \dot{\tau}(t)) \int_{t-\tau(t)-d}^{t-\tau(t)} w^T(s) Q_3 w(s) ds$$

$$\leq d \cdot w^T(t) Q_3 w(t)$$

$$- (1-h) \int_{t-\tau(t)-d}^{t-\tau(t)} w^T(s) Q_3 w(s) ds.$$

이제 $v(x, w)$ 를 다음과 같이 놓으면

$$\begin{aligned} v(x, w) &= v_0(x) + \left(\frac{d}{1-h} \right) v_1(x) + \left(\frac{d}{(1-h)^3} \right) v_2(x) \\ &\quad + \left(\frac{d}{1-h} \right) v_3(w) \end{aligned} \quad (11)$$

보조정리 1과 초기 조건식 (3)에 의해서 $v(x(0), w(0)) = 0$ 과 $v(x(t), w(t)) > 0, \forall t > 0$ 임을 명백히 알 수 있다. 위에서 유도한 결과 식과 $Y = KX$ 를 이용하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{dv(x, w)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w$$

$$\begin{aligned} &\leq x^T P[(A+A_1)X+X(A+A_1)^T+BY+Y^T B^T \\ &\quad +A_1 Q_1 A_1^T+A_1^2 Q_2(A_1^T)^2+A_1 B_w Q_3^{-1} B_w^T A_1^T \\ &\quad +\left(\frac{d^2}{1-h}\right)(AX+BY)^T Q_1^{-1}(AX+BY) \\ &\quad +\left(\frac{d^2}{(1-h)^3}\right)XQ_2^{-1}X+XC^T CX]Px(t) \\ &\quad +2x^T P(B_w+XC^T D)w \\ &\quad -w^T(t)[\gamma^2 I-D^T D-\left(\frac{d^2}{1-h}\right)Q_3]w(t) \\ &= [x^T P \quad ; \quad w^T] \cdot M(X, Y, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} Px \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서

$$M(X, Y, \gamma) = \begin{bmatrix} M_{11} & XC^T C + B_w \\ D^T C X + B_w^T & -(\gamma^2 I - D^T D - \left(\frac{d^2}{1-h}\right) Q_3) \end{bmatrix}$$

그리고

$$\begin{aligned} M_{11} &= (A+A_1)X+X(A+A_1)^T+BY+Y^T B^T \\ &\quad +A_1 Q_1 A_1^T+A_1^2 Q_2(A_1^T)^2+A_1 B_w Q_3^{-1} B_w^T A_1^T \\ &\quad +\left(\frac{d^2}{1-h}\right)(AX+BY)^T Q_1^{-1}(AX+BY) \\ &\quad +\left(\frac{d^2}{(1-h)^3}\right)XQ_2^{-1}X+XC^T CX \end{aligned}$$

마지막으로 LMI (10)과 보조정리 3으로부터 $M(X, Y, \gamma) < 0$ 임을 알 수 있으며, 이것이 의미하는 바는

$$\frac{d}{dt} u(x, w) + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0, \quad \forall x, w \leq 0$$

가 된다. 따라서 보조정리 4와 같이 w 로부터 z 까지의 L_2 이득이 γ 보다 작거나 같게 됨을 알 수 있다.

따름정리 1 : 시간지연이 없는 ($\tau(t)=0$) 경우에 대해 시스템 (1)을 고려해보자. 만일 행렬 $X=X^T \in R^{n \times n} > 0$, $Y \in R^{n \times n}$ 이 존재하여 다음의 LMI를 만족할 때

$$\begin{bmatrix} \Pi & XC^T & XC^T D + B_w \\ CX & -I & 0 \\ D^T C X + B_w^T & 0 & -(\gamma^2 I - D^T D) \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

편의상 $\Pi=(A+A_1)X+X(A+A_1)^T+BY+Y^T B^T$ 라 두고 다음의 제어를 적용하면

$$u(t) = Kx(t): K = YX^{-1}$$

w 로부터 z 까지의 L_2 이득은 γ 보다 작거나 같게 됨을 보장한다.

증명 : 이는 정리 1로부터 쉽게 성립됨을 알 수 있다.

Remark 1 : 보조정리 1은 시간지연이 없는 경우에 대한 해석으로 잘 알려진 바와 같이 Boyd et. al. [10]의 결과와 일치한다.

다음의 정리 2는 지수함수를 이용한 모델 변환방법 2를 적용한 경우의 주요 결과이다.

정리 2 : 식 (2)와 같이 표현되는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자. 다음의 행렬부등식을 만족하는 양의 한정행렬 $P, Q \in R^{n \times n}$ 과 행렬 $Y \in R^{m \times n}$, 그리고 양의 상수 $\beta, \gamma > 0$ 이 존재할 때

$$\begin{bmatrix} \Theta & e^{\beta d} A_1 X & B_w & XC^T \\ X A_1^T e^{\beta d} & -(1-h)Q & 0 & 0 \\ B_w^T & 0 & -\gamma I_n & D^T \\ CX & 0 & D & -\gamma I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

여기서 $\Theta = XA^T + AX + Y^T B^T + BY + 2\beta X + Q$ 라 놓은 후 다음의 제어를 적용하면

$$u(t) = Kx(t): K = YX^{-1}$$

외란 w 에서부터 출력 z 까지의 L_2 이득은 γ 보다 작거나 같게 됨을 보장한다.

증명 : 시스템의 L_2 이득인 $\frac{\tilde{z}(t)}{\tilde{w}(t)} = \frac{z(t)}{w(t)}$ 가 γ 보다 작게 되도록 하는 제어기를 설계하기 위해서 Lyapunov 함수를 다음과 같이 잡고

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}^T(\theta) P Q P \tilde{x}(\theta) d\theta \quad (14)$$

식(8)의 궤적에 따라 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t)) &= \tilde{x}^T(t)(A+BK+\beta I_n)^T P \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}^T(t) P(A+BK+\beta I_n) \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}^T(t-\tau(t)) A_1^T e^{\beta \tau(t)} P \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}^T(t) P e^{\beta \tau(t)} A_1 \tilde{x}(t-\tau(t)) \\ &\quad + \tilde{w}^T(t) B_w^T P \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P B_w \tilde{w}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t) P Q P \tilde{x}(t) \\ &\quad - (1-\dot{\tau}(t)) \tilde{x}^T(t-\tau(t)) P Q P \tilde{x}(t-\tau(t)) \end{aligned}$$

그리고 다음의 식에서

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + \tilde{z}^T(t) \tilde{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) < 0$$

$Px = \hat{x}$, $P^{-1} = X$ 로 놓고 앞에서 구한 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \dot{V}(\hat{x}(t)) + \hat{z}^T(t)\hat{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) \\ &= \hat{x}^T(t)X(A+BK+\alpha I_n)^T\hat{x}(t) \\ &+ \hat{x}^T(t)(A+BK+\alpha I_n)^T X\hat{x}(t) \\ &+ \hat{x}^T(t-\tau(t))XA_1^T e^{\beta\tau(t)}\hat{x}(t) \\ &+ \hat{x}^T(t)e^{\beta\alpha(t)}A_1X\hat{x}(t-\tau(t)) \\ &+ \tilde{w}^T(t)B_w^T\hat{x}(t) + \hat{x}^T(t)B_w\tilde{w}(t) \\ &+ \hat{x}^T(t)Q\hat{x}(t) - (1-\tau(t))\hat{x}^T(t-\tau(t))Q\hat{x}(t-\tau(t)) \\ &+ \hat{x}^T(t)XC^T CX\hat{x}(t) + \hat{x}^T(t)XC^T D\tilde{w}(t) \\ &+ \tilde{w}^T(t)D^T CX\hat{x}(t) + \tilde{w}^T(t)D^T D\tilde{w}(t) \\ &- \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) \end{aligned}$$

이를 $KX = Y$ 로 놓고 아래와 같은 형태로 전개하고

$$[\hat{x}^T : \hat{x}^T(t-\tau(t)) : \tilde{w}^T] \cdot N(X, Q, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}(t-\tau(t)) \\ \tilde{w} \end{bmatrix} < 0$$

시간지연 조건식 (2)로부터 $\frac{e^{2\beta\tau(t)}}{(1-\tau(t))} XA_1^T Q^{-1} A_1 X < 0$
 $\Rightarrow \frac{e^{2\beta d}}{1-h} XA_1^T Q^{-1} A_1 X < 0$ 이 성립되므로 이를 바탕으로 다시 $N(X, Q, \gamma)$ 을 정의하면 식 (15)가 된다.

$$\begin{bmatrix} E & e^{\beta d} A_1 X & XC^T D + B_w \\ XA_1^T e^{\beta d} & -(1-h)Q & 0 \\ D^T CX + B_w^T & 0 & -(\gamma^2 I_n - D^T D) \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

편의상

$E = XA^T + AX + Y^T B^T + BY + 2\beta X + Q + XC^T CX$ 라 하면 식 (15)는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + Y^T B^T + BY + 2\beta X + Q & e^{\beta d} A_1 X & B_w \\ XA_1^T e^{\beta d} & -(1-h)Q & 0 \\ B_w^T & 0 & -(\gamma^2 I_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XC^T CX & 0 & XC^T D \\ 0 & 0 & 0 \\ D^T CX & 0 & D^T D \end{bmatrix} < 0$$

여기에 보조정리 3을 이용하여 정리하면 LMI (13)을 얻게 된다. 따라서 이는 보조정리 4와 같이 w 로부터 z 까지의

L_2 이득은 γ 보다 작거나 같게 됨을 알 수 있다. 이것으로 증명을 마친다. ■

Remark 2 : Lyapunov 후보함수인 식 (14)의 시간지연 관련항 $\int_{t-\tau(t)}^t \hat{x}^T(\theta)PQP\hat{x}(\theta)d\theta$ 에서 $PQP = W$ 로 놓을 수 있으므로, 이것은 $\int_{t-\tau(t)}^t \hat{x}^T(\theta)W\hat{x}(\theta)d\theta$ 와 등가이다.

4. 수치예제

앞에서 구한 결과에 대한 유용성을 보이기 위해서 다음과 같은 시간지연 종속의 문제에 대하여 시간지연 크기의 시물레이션과 강인 제어기 설계를 보인다.

예제 : 시간지연이 있는 다음의 시스템에 대해 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} x(t-\tau(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$z(t) = [1 \ 1]x(t) + 0.1w(t)$$

시스템 (16)이 다음과 같은 시간지연을 만족할 때

$$0 \leq \tau(t) \leq d, \quad \frac{d\tau(t)}{dt} \leq h < 1, \quad \forall t$$

정리1을 사용하여 시간지연을 (h)에 따른 시간지연크기 (d)의 가능해의 상한값을 구할 수 있으며 결과를 정리하면 표 1과 같다. 표 1을 분석해 보면 우리가 예상했던 바와 같이 지연크기 d와 시간지연을 h의 관계는 반비례하여 h가 감소하면 d는 증가함을 알 수 있다.

표 1. 시간지연을 (h)에 대한 시간지연의 크기 (d)의 상한값

h	0.99	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
d ($\gamma=1$)	1.00	4.48	6.33	7.75	8.95	10.00

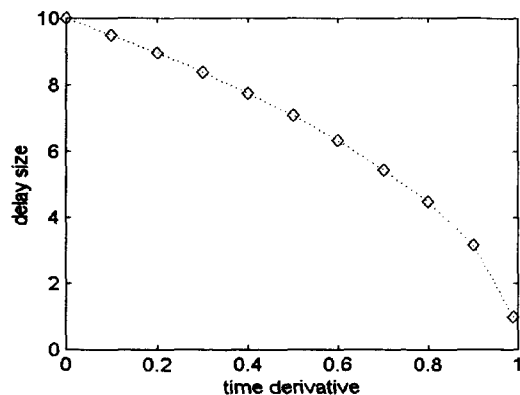


그림 1. 모델변환 방법 1에 대한 지연율과 지연크기

다음으로 모델변환 방법 2를 적용한 정리 2의 결과 값은 표 2와 같다. 여기서 우리는 시간지연의 크기와 시간지연만을 단순히 고려한 경우에 비해, 적절한 모델변환 계수 β 를 도입함으로써 시간지연 크기를 향상시킬 수 있음을 알 수 있다. 이 경우에도 지연크기 d 와 시간지연 h 의 관계는 반비례하나 기울기는 비교적 작음을 알 수 있다. 모델변환 계수 β 를 점점 감소시켜 0에 근접하게 되면 모델변환 항이 1로 수렴하기 때문에 시간지연독립과 유사한 성격을 가진다. 즉, 시간지연의 크기가 대단히 커지게 된다. 반대로 모델변환 계수 β 를 증가시키면 시간지연의 크기는 점점 작아진다. 따라서 적절한 계수의 선정에 의해 정리 1 보다는 양호한 결과를 얻게 됨을 알 수 있다. 정리 1에 비해 정리 2의 또 다른 특징은 h 의 변화에 대한 d 의 변화 폭이 작다는 것을 알 수 있다. 이것은 시간지연 크기에 대한 민감도가 향상됨을 의미하며 해의 정확도 역시 높게 된다. 따라서 모델변환 방법은 모델변환계수 β 를 적절히 선택함으로써 시스템에 적합한 시간지연 크기를 구할 수 있는 유연한 방법임을 알 수 있다.

표 2. 모델변환계수 β 와 시간지연 (h)에 대한 시간지연크기 (d)의 상한값 ($\gamma=1$)

h	0.99	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
d ($\beta=0$)	330.0	337.9	340.2	345.6	347.4	350.3
d ($\beta=1$)	13.1	14.5	14.8	15.0	15.2	15.3
d ($\beta=10$)	1.31	1.45	1.48	1.50	1.52	1.53

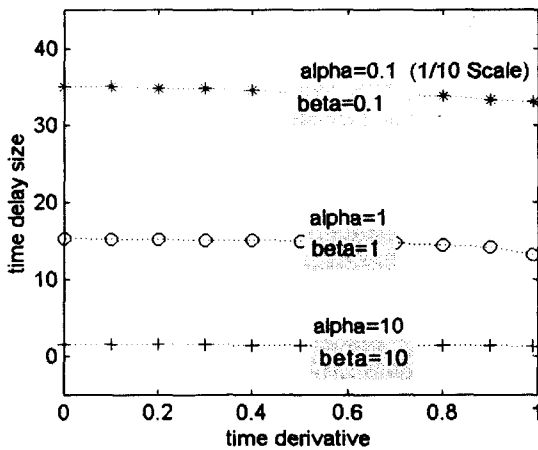


그림 2. 모델변환방법 2의 경우 변환계수에 따른 지연율과 지연크기

또한 제시된 조건으로부터 시간지연을 포함하는 시스템의 안정성을 보장하는 H_∞ 제어를 설계할 수 있다. 예를 들어 정리 2의 식 (13)으로부터 시간변화율 (h)=0.1, 시간지연

(d)=1, 그리고 변환계수 β 를 0.1로 할 때 γ 의 최적값은 $\gamma_{min}=0.1582$ 가 됨을 알 수 있다. 따라서 제어를 설계하기 위해 정리 2를 이용하여 X, Y, Q 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} 0.6927 & -0.6322 \\ -0.6322 & 0.7243 \end{bmatrix},$$

$$Y = [-0.6585 \quad -1.0982],$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.6924 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9562 \end{bmatrix}$$

여기서 $K = YX^{-1}$ 임으로, 제어기 이득 K 는 다음과 같다.

$$K = [-11.4649 \quad -11.5221]$$

위에서 얻어진 제어기는 시간지연크기를 고려한 시스템의 시변 시간지연뿐만 아니라 최적 L_2 이득 ($\gamma_{min}=0.1582$)을 보장하는 H_∞ 제어기이다.

5. 결 론

본 논문에서는 시간지연 항을 변환하는 방법과 지수함수를 이용한 변환 방법 등 두 가지의 모델변환 방법을 적용하여 시간지연율에 따른 시간지연 크기를 향상할 수 있는 강인 제어기 설계방안을 제시하였다. 특히 지수함수를 이용한 변환방법은 변환계수에 의해 다양한 특성을 보일 뿐만 아니라, 시간지연 크기를 조정할 수 있는 폭이 커서 제어기 설계시 유연성이 큼을 알 수 있다. 수치 예제에서는 각 모델변환 방법을 적용하여 시간변화율과 L_2 이득에 대한 시간지연크기의 가능해 상한 값과 일정한 조건에 대한 H_∞ 제어를 구하여 제안한 방법의 유용성을 증명하였다.

참 고 문 헌

- [1] M. M. Zavarei and M. Jamshidi, "Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications", North-Holland, 1987.
- [2] T. Mori and H. Kokame, "Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, pp. 460-462, 1989.
- [3] J. H. Kim, "Robust stability of linear systems with delayed perturbations," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 41, pp. 1820-1822, 1996.
- [4] J. H. Su, "Further results on the robust stability of linear systems with a single time delay," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 23, pp. 375-379, 1994.
- [5] L. Xie and C. E. Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach.", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol. 40, pp. 1144-1148, 1997.
- [6] S. I. Niculescu, "A Model Transformation Class for Delay-dependent Stability Analysis", *Proceedings of the American Control Conference, San Diego*

California Jun, pp. 314-318, 1999.
[7] L. Xie and C. E. Souza, "Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems", *Automatica*, vol. 35, pp. 1313-1321, 1999.
[8] L. Xie and C. E. Souza, "Robust H_∞ control for

linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 37, pp. 1188-1191, 1992.
[9] Vladimir L. Kharitonov, Daniel Melchor - Aguilar, "On delay-dependent stability conditions", *Syst. Contr. Lett.*, vol. 40, pp. 71-76, 2000.

저 자 소 개



마 삼 선 (馬 三 善)

1984년 부산대 기계공학과 졸업. 1988년 동대학원 기계공학과 졸업(석사). 충북대 대학원 전기공학과 박사과정 수료. 현재 한전 전력연구원 발전연구실 선임연구원
Tel : 042-865-5305, Fax : 042-865-5304
E-mail : samsunma@kepri.re.kr



김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 8일 생. 1985년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(석사). 1993년 동 전기 및 전자 공학과 졸업(공학박). 1993~1994 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 현재 충북대 전기전자공학부 부교수.
Tel : 043-261-2387
E-mail : jinhkim@cbucc.chungbuk.ac.kr



이 희 송 (李 喜 松)

1974년 1월 28일 생. 1997년 대전산업대 제어계측공학과 졸업. 1999년 충북대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학과 박사과정
Tel : 043-261-2387
E-mail : heeslee@just.chungbuk.ac.kr