

Cascade Observer Design For n-th Order Derivatives of Measured Value

金應錫* · 金裕男** · 李昌勳**

(Eung-Seok Kim · You-Nam Kim · Chang-Hoon Lee)

Abstract - We design a sliding mode cascade observer to estimate derivatives of the output. In the 1st step of the observer, the output will be estimated, and the 1st order derivative of the output will be estimated via the 2nd step of the observer. Also, nth order derivative of the output will be estimated in the n+1th step of the observer. Exponential convergence of the estimation errors is shown under the bounded initial condition. Numerical examples will be presented to show the validity of the proposed observer.

Key Words : Cascade Observer, Sliding Observer, High Gain Observer

1. 서 론

시스템 출력의 n차 도함수를 정확히 알 수 있다면 제어기 설계 문제가 훨씬 간단해 질 수 있을 것이다. 이를 위해 무수히 많은 상태관측기들이 소개되었으며 이용되고 있다. 대표적인 관측기의 종류로 루엔버거(Luenberger) 관측기와 슬라이딩 관측기[1]-[4]를 꼽을 수 있다. 루엔버거 관측기의 경우에는 상태를 관측하기 위해 시스템의 동특성을 알거나 내부 파라미터를 알아야 한다. 이를 해결하기 위해서는 불확실한 시스템 동특성에 대해 강인한 구조를 갖는 관측기를 설계하거나, 별도의 파라미터 적용칙이 필요하다. 슬라이딩 관측기[1]-[4]는 내부 파라미터를 알아야 할 필요는 없지만 시스템 동특성에 대한 정보를 필요로 한다. 이와는 달리 고이득 관측기(High gain observer)[5]-[7]는 triangular형으로 표현 가능한 시스템에 적용가능하며, 시스템의 동특성 및 내부 파라미터에 대한 정보를 필요로 하지 않는다. 그러나 관측기의 이득이 관측상태의 개수에 비례해서 제공팔로 커지게된다. 이는 관측 초기의 과도상태 및 관측하려는 상태의 급격한 변화에 대하여 관측오차가 심하게 진동하는 원인이 될 수 있다. 이러한 경우 제어기의 출력이 심하게 진동함으로써 시스템을 불안정하게 할 수도 있다. 또한 고정연산(Fixed point calculation) 방식으로 디지털 제어를 구현할 경우 이득값의 크기는 데이터 바이트 수에 종속되므로 크기조정에 제약이 따를 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이와 같은 문제점을 극복하기 위하여 축차형 슬라이딩 모드(sliding mode) 상태 관측기를 제안하고자 한다. 본 논문에서 제안한 상태관측기의

기본 설계 개념은 관측오차의 축차적인 수렴성 보장에 있다. 축차형 상태 관측기의 구조를 소개하기 전에 먼저, 일반적인 고이득 관측기의 구조부터 알아보기로 한다. 다음의 식(1)은 3개의 상태를 관측하기 위한 고이득 관측기이다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + k_2(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^2 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= k_3(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^3 \end{aligned} \tag{1}$$

식(1)을 Laplace transform을 이용해서 정리하면,

$$\hat{x}_1 = \frac{\epsilon^2 k_1 s^2 + \epsilon k_2 s + k_3}{\epsilon^3 s^3 + \epsilon^2 k_1 s^2 + \epsilon k_2 s + k_3} x_1 \tag{2}$$

이 된다. 시스템 출력 x_1 이 일정하고 분모다항식이 안정하다면, 그 도함수들이 모두 '0'으로 수렴하므로 시간이 지남에 따라 $\hat{x}_1 = x_1$ 이 될 것이다. 이는 $\epsilon=0$ 인 이상적인 경우와 결과가 같음을 알 수 있다. 이 결과로부터 식(1)에서 $\hat{x}_2 = \dot{\hat{x}}_1$ 이 됨을 알 수 있다. 이때 $\hat{x}_1 = x_1$ 이므로 시스템 출력 x_1 이 연속미분 가능한 신호라면 $\dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1$ 이 되므로 $\hat{x}_2 = \dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1$ 이 만족된다. 이 결과를 이용하면 $\hat{x}_3 = \ddot{\hat{x}}_1$ 가 되고 $\hat{x}_3 = \ddot{\hat{x}}_1 = \ddot{x}_1$ 이 되어 시스템 출력의 미분 가능한 횟수 만큼의 도함수를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 시스템 출력 x_1 이 일정하지 않은 경우에는 ϵ 을 가능한 작게 함으로써 상대적으로 오차의 크기를 줄일 수 있다. 그러나 시스템 출력의 시간에 따른 변화율이 커짐에 따라 관측오차가 커지는 단점이 있으며, 상태 관측기 이득값의 크기에 비례해서 과도상태에서의 오차가 커지는 현상이 있다. 관측오차의 수렴성은 이득값의 크기에 반비례하지만, 과도상태

* 正 會 員 : 한라대 電氣工學部 助敎授 工學博士
 ** 正 會 員 : 한라대 電氣工學部 助敎授 工學博士
 *** 正 會 員 : 한라대 電氣工學部 助敎授 工學博士
 接受日字 : 2000年 10月 19日
 最終完了 : 2001年 2月 8日

에서의 오차크기는 이득 값의 크기에 비례하므로 적당한 크기의 이득값을 선정하는 것이 고이득 관측기의 성능 향상의 관건이라 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 상태관측오차의 축차적 수렴성, 즉 $\hat{x}_1 = x_1$ 이 됨에 따라 $\hat{x}_2 = \hat{x}_1$ 이 되고 $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 = \hat{x}_1$ 이 되어 $\hat{x}_3 = \hat{x}_2$ 가 되므로 $\hat{x}_3 = \hat{x}_2 = \hat{x}_1$ 이 되도록 한다는 개념을 이용하여 연속미분 가능한 출력신호의 n차 도함수 추정을 위한 축차형 슬라이딩 모드 관측기를 설계하기로 한다.

2. 관측기 설계

관측오차의 축차적인 수렴성 보장 개념에 근거하여 다음과 같은 축차형 상태 관측기를 설계하기로 한다.

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) + \beta_i S_g(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) \quad (3)$$

여기서 $i = 1$ 즉, 첫 번째 단계는 \hat{x}_0 대신에 관측 대상 시스템의 출력을 여기(excitation) 신호로 사용한다. $i = n$ 일 때 즉, 맨 마지막 단계에서는 $\hat{x}_{n+1} = 0$ 으로 하면 된다. $k_i > 0, \beta_i > 0$ 는 모두 상수로서 설계 파라미터이며, $S_g(x)$ 는 관측기 오차의 지수함수적인 수렴성을 보장할 수 있도록 설계되는 함수이다. 오차에 대하여 슬라이딩 모드(sliding mode) 동작이 이루어지기 위해서는 스위칭 함수로 정의하거나 포화함수로서 구성할 수 있다.

$$\text{포화 함수: } S_g(x_i) = \begin{cases} 1, & x > \delta_i \\ -1, & x < -\delta_i \\ x_i/\delta_i, & |x_i| \leq \delta_i \end{cases} \quad (4)$$

여기서 δ_i 는 포화영역으로서 설계파라미터이다. 식(3)으로 주어진 관측기에서 만일 $\hat{x}_{i-1} \rightarrow \hat{x}_i$ 이 된다면, 순차적으로 $\hat{x}_i \rightarrow \hat{x}_{i+1}$ 이 됨으로써 관측오차의 축차적 수렴성이 만족될 수 있을 것이다. 식(3)의 축차형 상태관측기에 대하여 4단 축차 관측기의 구성 예제를 통해 이해를 돕기로 한다. MATLAB-SIMULINK를 이용하여 4단으로 구성한 예가 그림 1-1부터 그림 1-4까지 주어져 있다.

수치 예제 4-1)

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1) + \beta_1 S_g(y - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_3 + k_2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 S_g(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_4 + k_3(\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + \beta_3 S_g(\hat{x}_2 - \hat{x}_3) \\ \hat{x}_4 &= k_4(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) + \beta_4 S_g(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) \end{aligned} \quad (5)$$

윗 식으로부터 $\hat{x}_1 \rightarrow y$ 이 됨에 따라 $\hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_1 \rightarrow \dot{y}$ 가 되

고 이어서 $\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_2 \rightarrow \dot{y}$ 가 되어 $\hat{x}_4 \rightarrow \hat{x}_3 \rightarrow \frac{d}{dt} \dot{y}$ 가 됨을 알 수 있다. 이때 $\hat{x}_4 \rightarrow 0$ 이므로 $\hat{x}_4 \rightarrow \hat{x}_3 \rightarrow \frac{d}{dt} \dot{y}$ 의 수렴성이 저하될 수도 있다. 따라서 관측기의 단 수를 L, 추정 상태의 개수를 N이라 하면 $L=N+1$ 이 되도록 하는 것이 좀더 정확한 상태 관측에 유리하다.

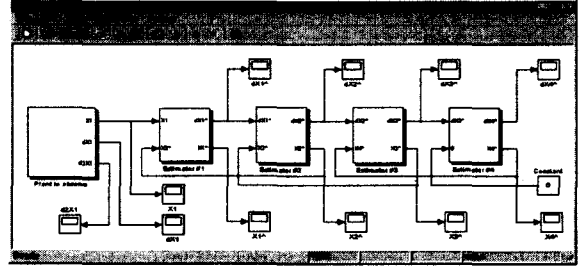


그림 1-1. 4단 축차형 슬라이딩 모드 상태 관측기.
Fig. 1-1 The cascade sliding observer with four stages.

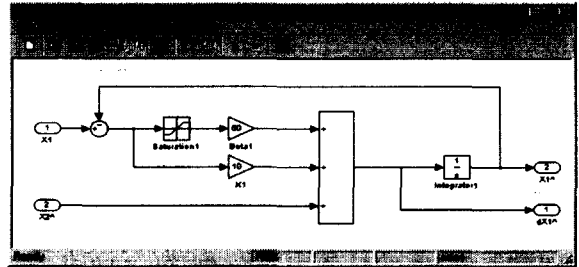


그림 1-2. 축차형 슬라이딩 모드 상태 관측기의 첫째 단.
Fig. 1-2 The first stage of cascade sliding observer.

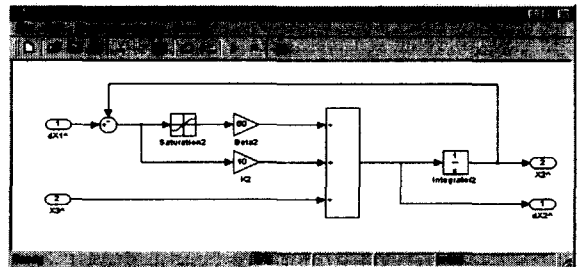


그림 1-3. 축차형 슬라이딩 모드 상태 관측기의 둘째 단.
Fig. 1-3 The second stage of cascade sliding observer.

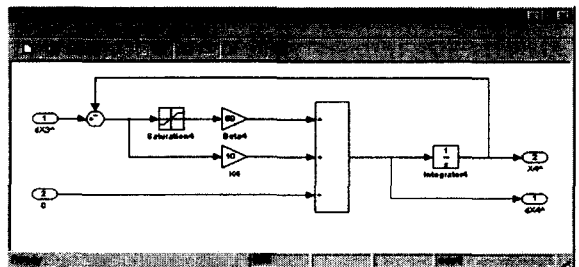


그림 1-4 축차형 슬라이딩 모드 상태 관측기의 마지막 단.
Fig. 1-4 The end stage of cascade sliding observer.

그림 1-2부터 그림 1-4까지는 축차형 상태관측기의 각 단의 구조를 나타내고 있다. 관측기 각단의 구조는 동일하다. 다만 첫째단의 입력은 관측대상 시스템의 출력이다. 그림에 주어진 상태 관측기는 4단으로 구성되어 있다. 따라서 시스템의 출력을 x_i 라고 한다면 상태 관측은 $\hat{x}_i, \hat{x}_i, \hat{x}_i$ 및 $\frac{d}{dt} \hat{x}_i$ 까지만 가능하다. 이론적으로는 필요한 n 개의 상태들을 모두 관측할 수 있지만, 실제 응용시에는 CPU 성능 및 메모리의 용량에 따라 관측 가능한 상태의 개수가 제한 받을 것이다. 이제 식(3)과 식(4)로 주어진 관측기의 안정도 및 오차 수렴성에 대해 알아 보기로 한다.

정리 1: 추정오차 $\tilde{x}_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i$ 및 보조오차 $e_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}$ 에 대해서 $t=0$ 일 때 식(3)-(4)의 해인 \tilde{x}_i, e_i 가 초기치 집합(initial set)

$$D_{Si} = \{ e_i, \tilde{x}_i : |e_i| \leq \beta_i, |\tilde{x}_i| \leq \beta_i \} \quad (6)$$

에 속한 경우 지수함수적인 빠르기로 나머지 집합(residual set)

$$D_{Ri} = \left\{ e_i, \tilde{x}_i : e_i \leq \frac{\beta_i}{k_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta_i}{\delta_i k_i}}}, \right. \\ \left. |\tilde{x}_i| \leq \frac{\beta_i}{k_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta_i}{\delta_i k_i}}} \right\} \quad (7)$$

에 속하게 되도록 하는 양의 상수 β_i, k_i 및 δ_i 가 존재한다.

증명 : $V_i = \frac{1}{2} (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2$ 을 Lyapunov function candidate으로 설정하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)(\dot{\hat{x}}_{i-1} - \dot{\hat{x}}_i) \\ &= -(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) [\hat{x}_{i+1} + k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) \\ &\quad + \beta_i S_g(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)] + (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) \hat{x}_{i-1} \\ &\leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 - (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) [\beta_i S_g(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) \\ &\quad - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|] \end{aligned} \quad (6)$$

이 된다. $S_g(\cdot)$ 가 스위칭 함수인 경우와 포화 함수인 경우에 대해 수렴성을 알아보기로 한다.

$S_g(\cdot)$ 가 스위칭 함수인 경우: 식(6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| [\beta_i - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|] \end{aligned} \quad (7)$$

$\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|, \forall t \geq 0$ 가 만족되도록 β_i 를 설정할 수 있다면 위의 부등식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{V}_i \leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 = -2k_i V_i \quad (8)$$

따라서 $V_i(t) = V_i(t_0) \varepsilon^{-2k_i(t-t_0)}$ 가 되어 지수 함수적으로 안정하여 $V_i \rightarrow 0, \dot{V}_i \rightarrow 0$ 이 만족된다. 즉 $V_i \rightarrow 0^+, \dot{V}_i \rightarrow 0^-$ 이고, $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \rightarrow 0, \forall t \geq t_0$ 임을 알 수 있다.

$S_g(\cdot)$ 가 포화 함수인 경우: 이 경우에는 두가지로 나누어서 생각해 볼 수 있다.

case 1: 식(6)에서 만일 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| > \delta_i$ 이라면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| [\beta_i - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|] \end{aligned} \quad (9)$$

$\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|, \forall t \geq 0$ 가 만족되도록 β_i 를 설정할 수 있다면 위의 부등식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{V}_i \leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 = -2k_i V_i \quad (10)$$

식(10)으로부터 V_i 는 지수함수적으로 안정하며, $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \leq \delta_i, \forall \delta_i > 0$ 이 될 때까지 $V_i \rightarrow 0, \dot{V}_i \rightarrow 0$ 이 됨을 알 수 있다. 즉, $\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i$ 는 반경이 δ_i 인 구(ball)내로 들어올 때까지 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \rightarrow \delta_i$ 이 보장됨을 알 수 있다.

case 2: $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \leq \delta_i$ 이 된다면 식(6)은

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 - \frac{\beta_i}{\delta_i} (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad + |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}| \end{aligned} \quad (11)$$

으로 정리할 수 있다. 식(11)의 우변 첫 항을 이등분해서 정리하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\frac{k_i}{2} (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad - \left(\frac{k_i}{2} + \frac{\beta_i}{\delta_i} \right) (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 + \beta_i |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \\ &\leq -\frac{k_i}{2} (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad - \alpha_i \left(|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| - \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \right)^2 + \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i} \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다. 여기서 $\alpha_i = \frac{k_i}{2} + \frac{\beta_i}{\delta_i}$ 이다. 식(12)의 우변 두 번째 항을 소거하더라도 부등관계는 만족되므로 다시 정리하면

$$\dot{V}_i \leq -k_i V_i + \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i} \quad (13)$$

이 된다. 따라서 관측오차가 유계임을 알 수 있다. 이제 나머지 오차(residual error)의 크기를 알아보기로 한다. 식(13)을 적분하면 다음 관계를 만족한다.

$$V_i(t) \leq \left[V_i(t_0) - \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i k_i} \right] e^{-k_i(t-t_0)} + \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i k_i} \leq \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i k_i} + c_i \epsilon_i \quad (14)$$

여기서 상수 $c_i = \left| V_i(t_0) - \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i k_i} \right| e^{k_i t_0} \geq 0$ 이고, $\epsilon_i = e^{-k_i t}$ 이다. 따라서 각 단의 관측오차 $\tilde{x}_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i$ 및 보조오차 $e_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}$ 에 대해서 나머지 오차 집합을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$D_{Ri} = \left\{ e_i, \tilde{x}_i : e_i \leq \frac{\beta_i}{k_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta_i}{\delta_i k_i}}}, |\tilde{x}_i| \leq \frac{\beta_i}{k_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta_i}{\delta_i k_i}}} \right\} \quad (15)$$

조건 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|$ 의 성립여부: 편의상 초기 시간을 $t = 0$ 으로 놓기로 한다. 모든 경우에 초기값을 알 수는 없겠지만 전동기, 로봇, 자동차, 항공기, 선박 등 운행 초기의 운동상태 값을 미리 예측할 수 있는 시스템의 경우에는 초기값 $\hat{x}_{i-1}(0)$ 또는 그 상한값 $|\hat{x}_{i-1}(0)|_{\max}$ 을 알 수 있으므로 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1}(0) - \hat{x}_{i+1}(0)|$ 가 만족되는 β_i 를 설정할 수 있다. 상태의 초기값 혹은 상한값을 아는 경우, 시간이 지남에 따라 조건 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|$ 이 계속 성립할 수 있는지 알아 보기로 한다.

$t=0$ 에서 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| > \delta_i$ 이라 하면 case 1의 식(10)으로부터 $V_i \rightarrow 0$, $\dot{V}_i \rightarrow 0$ 이므로 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i|$ 는 지수함수적인 빠르기로 δ_i 로 수렴하게 된다. 그러므로 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \leq \delta_i, \forall \delta_i > 0$ 이 되는 시점을 $t = t_{\delta_i}$ 이라고 하면 $t = t_{\delta_i}$ 이 될 때까지, $|\hat{x}_{i-1}(0) - \hat{x}_i(0)| \geq |\hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_i(t)|, \forall 0 \leq t \leq t_{\delta_i}$ 이 되고 지수함수적으로 $\hat{x}_{i-1}(t) \rightarrow \hat{x}_i(t)$ 이 만족된다. 따라서 $\hat{x}_{i-1} \rightarrow \hat{x}_i \rightarrow \hat{x}_{i+1}$ 이 만족함으로써

$\hat{x}_{i-1}(t) \rightarrow \hat{x}_{i+1}(t)$ 이 성립한다. 식(3)으로부터 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1}(0) - \hat{x}_{i+1}(0)| \geq |\hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_{i+1}(t)|, \forall 0 \leq t \leq t_{\delta_i}$, 또한 성립함을 알 수 있다. $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i|$ 이 지수함수적으로 감소해서 $|\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i| \leq \delta_i$ 이 되는 시점($t \geq t_{\delta_i}$)에도 $|\hat{x}_{i-1}(0) - \hat{x}_i(0)| \geq |\hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_i(t)|$ 은 성립하므로 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1}(0) - \hat{x}_{i+1}(0)| \geq |\hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_{i+1}(t)|, \forall t \geq 0$ 가 만족된다.

지금까지 식(4)의 포화함수를 사용하는 경우에 대한 추정오차의 수렴성에 대해 알아보았다. 이제 포화함수를 사용하는 대신에 스위칭함수를 이용할 경우의 추정오차의 수렴성에 대해 간단히 알아보기로 한다.

$$\text{스위칭 함수: } S_g(x_i) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (16)$$

정리 2: 추정오차 $\tilde{x}_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i$ 및 보조오차 $e_i = \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}$ 에 대해서 $t=0$ 일 때 식(3),(16)의 해인 \tilde{x}_i, e_i 가 초기치 집합(initial set)

$$D_{Si} = \{ e_i, \tilde{x}_i : |e_i| \leq \beta_i, |\tilde{x}_i| \leq \beta_i \} \quad (17)$$

에 속한 경우 지수함수적인 빠르기로 '0'으로 수렴하도록 하는 양의 상수 β_i 및 k_i 가 존재한다.

증명: $V_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2$ 을 Lyapunov function candidate으로 설정하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -k_i(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 \\ &\quad - (\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)[\beta_i S_g(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i) - |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|] \\ &\leq -k_i \tilde{x}_i^2 - |\tilde{x}_i|[\beta_i - |e_i|] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $e_i \in D_{Si}$ 이므로 위의 부등식은 다음의 관계를 만족한다.

$$\dot{V}_i \leq -k_i \tilde{x}_i^2 \leq -2k_i V_i \quad (19)$$

위의 관계로부터 V_i 는 지수함수적으로 안정함을 알 수 있다. 따라서 (17)을 만족하는 $\beta_i(>0)$ 와 임의의 상수 $k_i(>0)$ 에 대해 추정오차 \tilde{x}_i 와 보조오차 e_i 는 모두 지수함수적인 빠르기로 '0'으로 수렴한다.

이제까지 측차형 상태 관측기를 설계하고 추정오차의 수렴성에 대해서 알아보았다. 본 논문에서 제시한 측차형 상태관측기의 관측오차는 스위칭함수를 사용할 경우에는 지수함수

적인 빠르기로 '0'으로 수렴하며, 포화함수를 사용할 경우에는 조건 $\beta_i \geq |\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_{i+1}|$ 이 성립하는 한도 내에서 β_i 를 작게 설정하고 δ_i 는 작을수록 k_i 는 클수록 관측오차의 크기가 작아지게 됨을 알 수 있었다. 물론 δ_i 는 관측 값의 떨림(chattering) 현상이 발생하지 않는 한도 내에서 작게 설정해야 하며, k_i 는 관측 값의 급격한 발산(bursting)이 발생하지 않는 한도 내에서 크게 설정해야 한다.

참고 : 측차형 상태 관측기를 실제 적용시, 스위칭 함수보다는 포화함수를 사용하는 것이 유리하다. 그 이유는 수학적으로는 스위칭 함수의 경우 관측오차가 완벽하게 '0'으로 수렴할 수 있음을 입증할 수는 있지만, 관측 값의 떨림 현상이 발생하게 된다. 따라서 관측 값의 떨림 현상을 방지할 수 있는 포화함수를 사용하였다.

3. 시뮬레이션 결과

이제 앞 절에서 제시한 측차형 상태 관측기에 대한 수치예제를 검토하기로 한다. 그림 1-1에 주어진 것과 같이 4단으로 구성된 측차형 상태 관측기의 관측결과에 대해 검토하기로 한다. 관측해야할 시스템의 동특성은 다음과 같이 안정한 2차 시스템으로 하였다.

$$x_1 = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} r \quad (20)$$

위의 시스템에 대해 기준신호 $r = 5 \sin 0.3t$ 인 정현파인 경우에 대한 결과를 그림 2에 나타내었다. 크기 5, 주기 20[초]로 0.2% 크기의 백색잡음(표준편차가 0.01)이 포함된 구형파 기준신호에 대한 결과는 그림 3에 주어져 있다. 두 경우 모두 관측기 각단의 설계 파라미터는 $i=1,2,3,4$ 에 대하여 $\beta_i = 10$, $\delta_i = 0.00001$ 로 하였고 $k_i = [100 \ 100 \ 10 \ 1]$ 로 하였다. 그림 4는 $r = 5 \sin 0.3t$ 인 정현파에 0.2% 크기의 백색잡음(표준편차 0.01)이 포함된 경우에 대한 실험결과이다.

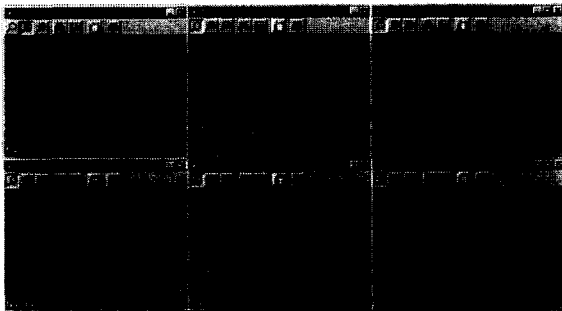


그림 2. 정현파 기준신호에 대한 시뮬레이션 결과.

Fig. 2 The estimation results for sinusoidal wave with white noise.

그림 2에서 위의 세 개의 그림은 왼쪽부터 시스템 출력, 1

계 도함수 및 2계 도함수를 나타내고 있다. 물론 측정 가능한 신호는 출력신호 뿐이다. 이에 대한 관측 결과는 아래의 그림 세 개에 나타내어져 있다. 관측이 잘되고 있음을 볼 수 있다.

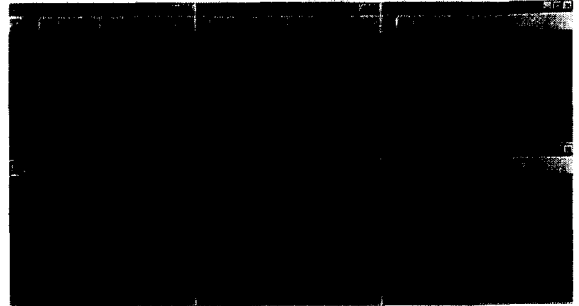


그림 3. 백색잡음이 포함된 구형파 신호에 대한 추정 결과.

Fig. 3 The estimation results for square wave with white noise.

그림 3은 백색잡음이 포함된 구형파에 대한 관측 결과를 보여주고 있다. 위의 세 개의 그림은 왼쪽부터 시스템 출력, 1계 도함수 및 2계 도함수를 나타내고 있다. 이에 대한 관측 결과는 아래의 그림 세 개에 나타내어져 있다. 결과로부터 백색잡음이 포함된 경우 출력신호의 도함수는 차수가 증가함에 따라 백색잡음의 영향으로 시간에 따른 변화가 급격하지만 관측이 잘되고 있음을 알 수 있다.

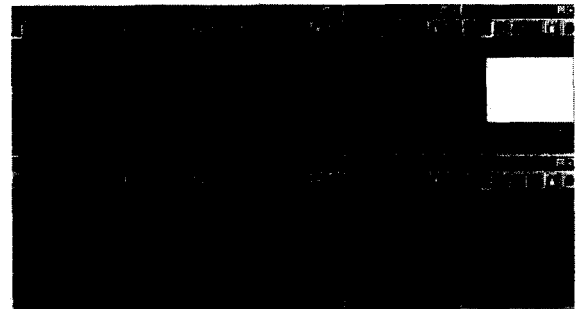


그림 4. 백색잡음이 포함된 정현파 신호에 대한 추정 결과.

Fig. 4 The estimation results for sinusoidal wave with white noise.

그림 4는 백색잡음이 포함된 정현파에 대한 관측결과를 보여주고 있다. 그림 4에서 윗줄의 5개의 그림들은 시스템 출력과 그 도함수들이다. 도함수들은 직접 미분을 하여 구하였다. 그림 4의 아래 줄의 5개의 그림은 본 논문에서 제안한 관측기를 이용하여 관측한 결과를 보여주고 있다. 그림 4의 윗줄 4번째와 5번째 그림은 각각 $\frac{d}{dt} \hat{x}_1$, $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \hat{x}_1$ 을 직접 미분해 얻은 결과이다. 이에 반해 아래줄 4번째와 5번째 그림은 대응하는 관측값을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 직접 미분한 값은 시스템의 안정도를 해칠 정도로 변동이 심한 반면, 관측값은 시스템의 안정도를 해치지 않으면서 이용이 가능하다는 것을 볼 수 있다.



그림 5. 백색잡음이 포함된 정현파 신호에 대한 추정 결과.
Fig. 5 Estimation results for sinusoidal wave with white noise.

위의 그림 5는 정현파 신호 $r = 5\sin(0.1\pi t)$ 에 백색잡음(표준편차 0.01)이 포함된 경우에 대한 적용 결과이다. 위쪽 줄의 그림이 측정신호를 직접 미분한 경우이고, 아래쪽 줄의 그림은 본 논문의 관측자를 사용한 경우이다. 이때 사용한 적분 방법은 Euler 방식이다. 이는 연속시간 계통에 대해 설계된 알고리즘을 실제의 디지털시스템에 적용할 경우 RK4 보다 Euler방법이 더 유용할 수도 있기 때문이다. 참고로 그림 2에서 그림 4 까지 제시된 결과들은 모두 RK4를 사용하였다.

다음의 그림 6은 고이득 관측기와 본 논문에서 제안한 관측기의 성능을 비교한 결과이다. 측정신호는 $x_1 = 10 \sin t$ 로서 연속미분 가능한 신호를 대상으로 하였다. 그림의 맨 위쪽 줄의 다섯 개의 그림은 x_1 을 직접 미분한 신호들이다. 두 번째 줄의 다섯 개의 그림은 고이득 관측기를 이용한 경우에 대한 결과이다. 그림의 왼쪽부터 $\hat{x}_1 = 10 \sin t$, $\hat{x}_1 = 10 \cos t$, $\frac{d}{dt} \hat{x}_1 = -10 \cos t$, $\hat{x}_1 = -10 \sin t$, $\frac{d^2}{dt^2} \hat{x}_1 = 10 \sin t$ 이다. 맨 아래 줄의 다섯 개의 그림이 본 논문에서 제안한 슬라이딩 모드 추차 관측기의 결과를 나타내고 있다. 본 논문에서 제안한 관측기의 경우, 고이득 관측기에 비해 실제 값과 근사함을 볼 수 있다.

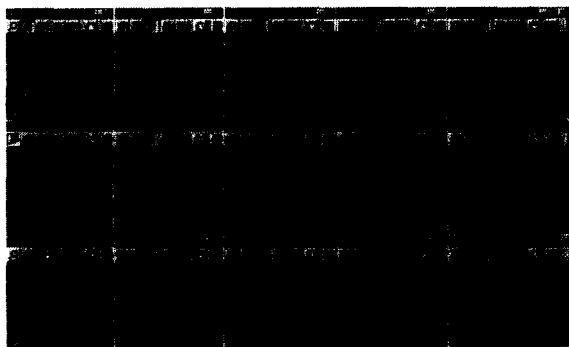


그림 6. 고이득 관측기와 제안한 관측기의 비교 결과.
Fig. 6. The comparison result between high gain observer and the proposed observer.

고이득 관측기는 다음 수식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_3 + k_2(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^2 \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_4 + k_3(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^3 \\ \hat{x}_4 &= \hat{x}_5 + k_4(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^4 \\ \hat{x}_5 &= k_5(x_1 - \hat{x}_1)/\epsilon^5 \end{aligned}$$

또

는

$$\hat{x}_1 = \frac{\epsilon^4 k_1 s^4 + \epsilon^3 k_2 s^3 + k_3 \epsilon^2 s^2 + \epsilon k_4 s + k_5}{\epsilon^5 s^5 + \epsilon^4 k_1 s^4 + \epsilon^3 k_2 s^3 + k_3 \epsilon^2 s^2 + \epsilon k_4 s + k_5} x_1 \quad (21)$$

여기서 $\epsilon = 0.1$ 로 설정하였고, $k_{1,2,3,4,5} = [5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1]$ 로 설정하였다. ϵ 값을 더 작게 설정하지 못한 것은 그림에서 볼 수 있듯이 초기 추정오차의 변동폭이 커져서 발산하기 때문이다. ϵ 값을 0.1 보다 크게 할 경우 초기 오차는 작지만 전체적인 추정 성능이 저하된다. 본 논문에서 제안한 슬라이딩 모드 추차 관측기의 이득은 다음과 같다. $\delta_i (i=1, \dots, 5)$ 는 모두 0.001로 하였고, $k_{1-5} = [200 \ 100 \ 40 \ 20 \ 10]$, $\beta_{1-5} = [100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100]$ 이다.

3. 결 론

본 논문에서는 추차형 구조를 갖는 슬라이딩 모드 상태관측자 설계문제를 다루었다. 관측을 필요로 하는 상태의 개수만큼 단일 상태 관측기를 종속 연결하는 방식으로 설계하였다. 관측하려는 시스템의 출력 신호만 측정할 수 있으면 필요한 개수의 도함수들을 얻을 수가 있음을 보였다. 또한 본 논문에서 제시한 관측자는 시스템의 동특성 및 파라미터 등에 대한 어떠한 정보도 필요로 하지 않는다. 첫 번째 단의 상태관측오차가 지수함수적으로 수렴함에 따라서 후속 단의 상태오차가 순차적으로 지수함수적인 수렴성이 보장됨을 입증하였으며, 무한개의 상태 관측기를 종속 연결할 수 있으므로 이론적으로는 무한개의 상태도 관측이 가능하다. 수치예에서 보았듯이 백색잡음이 포함된 상태값도 비교적 정확한 관측이 가능함을 알 수 있었다. 본 논문에서 제시한 관측자를 이용할 경우 출력신호의 도함수를 안정적으로 이용할 수 있게되어 기존의 복잡한 제어기 설계 문제를 단순화시킬 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] T. Ahmed-Ali and F. Lammabhi-Lagarrige, "Sliding Observer-Controller Design for Uncertain Triangular Nonlinear Systems," IEEE Trans. on Automatic

Control, vol. 44, no. 6, pp. 1244-1249, June 1999.

[2] E. A. Misawa and J. K. Hedrick, "Nonlinear Observers: A state-of-the-art survey," Trans. ASME, J. Dynamic Syst., Measurement and Contr., vol. 111, pp. 344-352, 1989.

[3] J. J. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa, "On sliding observers for nonlinear systems," Trans. ASME, J. Dynamic Syst., Measurement and Contr., vol. 109, pp. 245-252, 1987.

[4] G. B. Wang, S. S. Peng, and H. P. Huang, "A sliding observer for nonlinear process control," Chemical Engineering Science, vol. 52, no. 5, pp. 787-805, 1997.

[5] G. Besancon, "Further Results on High Gain Observers for Nonlinear Systems," Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, vol.3, December 1999, pp.2904-2909.

[6] E. S. Shin and K. W. Lee, "Robust Output Feedback Control of Robot Manipulators Using High-Gain Observer," Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, vol.1, August 1999, pp.881-886.

[7] Dabroom AM, Khalil HK, "Discrete-time implementation of high-gain observers for numerical differentiation," International Journal of Control, vol.72, no.17, pp.1523-1537, 1999.

저 자 소 개



김응식 (金應錫)

1962년 11월 9일 생. 1988년 한양대 전기공학과 졸업. 1990년 동 대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1993년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1993년~1994년 8월 한국과학기술연구원 Post Doc. 1994년 9월

~1999년 2월 삼성종합기술원 전문연구원. 1999년 3월~현재 한라대학교 전기·전자·제어공학부 조교수.

Tel : 033-760-1248, Fax : 033-760-1241

E-mail : eskim@hit.halla.ac.kr



이창훈 (李昌勳)

1983년 연세대 전기공학과 졸업. 1985년 8월 동대학원 졸업(석사). 1991년 2월 동 대학원 졸업(공학). 1986년~1987년 삼성종합기술원 연구원. 1991년~1996년 2월 LG산전연구소 선임연구원. 1996년 3월~현재

한라대 전기, 전자, 제어공학부 조교수.

Tel : 033-760-1246, Fax : 033-760-1241

E-mail: chlee@hit.halla.ac.kr



김유남 (金裕男)

1955년 3월 17일 생. 1981년 부산대 공과대학 전기기계과 졸업. 1983년 연세 대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1989년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1984년~1986년 금성기전. 1986년~1988년 삼성

종합기술원. 1989년~1995년 쌍용자동차. 1995년~현재 한라대학교 전기전자컴퓨터 공학부 조교수.

Tel : 033-7601-244, Fax : 033-7601-241

E-mail : ynkim@hit.halla.ac.kr