

유계상수 추정과 동적인 퍼지 규칙 삽입을 이용한 비선형 계통에 대한 강인한 적응 퍼지 제어기 설계

論 文

50D-1-3

Design of Robust Adaptive Fuzzy Controller for Uncertain Nonlinear System Using Estimation of Bounding Constans and Dynamic Fuzzy Rule Insertion

朴張鉉* · 朴貴泰**
(Jang-Hyun Park · Gwi-Tae Park)

Abstract - This paper proposes an indirect adaptive fuzzy controller for general SISO nonlinear systems. In indirect adaptive fuzzy control, based on the proved approximation capability of fuzzy systems, they are used to capture the unknown nonlinearities of the plant. Until now, most of the papers in the field of controller design for nonlinear system considers the affine system using fuzzy systems which have fixed grid-rule structure. We proposes a dynamic fuzzy rule insertion scheme where fuzzy rule-base grows as time goes on. With this method, the dynamic order of the controller reduces dramatically and an appropriate number of fuzzy rules are found on-line. No *a priori* information on bounding constants of uncertainties including reconstruction errors and optimal fuzzy parameters is needed. The Control law and the update laws for fuzzy rule structrue and estimates of fuzzy parameters and bounding constants are determined so that the Lyapunov stability of the whole closed-loop system is guaranteed.

Key Words : robust adaptive control, nonlinear system, fuzzy control

1. 서론

비선형 시스템 제어는 최근 활발하게 연구되어 왔으며 특히 계통의 비선형항을 상쇄하여 입·출력간의 관계를 선형적으로 만드는 입출력 궤환 선형화 제어(input-output feedback linearizing control)[1]가 많은 주목을 받아왔다. 그러나 이러한 제어방식은 계통의 비선형 항을 상쇄시켜야 하므로 계통의 정확한 수학적 모델을 구할 수 있는 경우에만 적용 가능하며 실제 계통은 이러한 정확한 모델을 구하기 불가능하다. 즉 필연적으로 파라미터 또는 비구조화된 불확실성(uncertainty)이 내재되어 있기 마련이다. 따라서 이러한 불확실성에 대처할 수 있는 강인한 제어기의 설계가 요구된다.

퍼지 시스템은 제어대상의 정확한 수학적 모델이 필요치 않으며, 전문가의 지식을 반영할 수 있다는 장점으로 인하여 많은 제어 시스템에 성공적으로 적용되어 왔다. 특히 최근 신경망과 같이 퍼지시스템이 임의의 함수를 원하는 정도로 근사화할 수 있다는 소위 범용 근사화기 이론(universal approximation theorem)이 증명된 바 있다. Wang은 [2,13]에서 퍼지 시스템은 범용 근사화기이며, 퍼지 시스템의 출력은 퍼지 기저 함수(fuzzy basis function, FBF)의 선형 결합으로 표현됨을 보였다. 이러한 특성에 기초하여 전통적인 비선형 적응 제어 방식을 퍼지 시스템과 접목시킨 퍼지 제

어 방식이 널리 연구되고 있다.[2-5,8,12,15,16,20] 전통적인 적응 제어와 비교하여 범용 근사화기를 사용한 제어는 선형 파라미터화(linear parameterization) 조건이 불필요하다는 큰 장점을 가진다. 이들 제어 방식은 크게 두가지로 분류할 수 있는데 직접(direct) 적응 제어와 간접(indirect) 적응 제어가 그것이다. 직접 적응 제어 방식에서는 퍼지 시스템의 출력이 제어 입력이 되며 최적의 제어기를 근사화 하도록 설계된다. 간접 적응 제어에서는 계통의 비선형항을 퍼지 시스템을 이용하여 추정한 후 이 추정치를 이용하여 제어기를 구성하게 된다. 두 방식 모두 퍼지 파라미터들은 리아프노프 관점에서 안정하도록 제어 입력과 퍼지 파라미터 갱신 법칙이 결정된다.

그러나 퍼지 시스템의 구조(소속함수나 퍼지규칙의 개수 등)가 무한히 크지 않는 이상 근사화오차(approximation error)는 발생하기 마련이며 이 오차가 페루프 계통에 개입되어 계통의 안정도를 보장하기 어렵게 한다. 이것을 보상하기 위하여 슬라이딩 모드 입력항을 추가로 인가하는 기법[3-5,11,12]이 쓰이며 슬라이딩 이득(gain)은 계통의 불확실성항의 기저의 유계상수 정보로부터 계산되어 진다. 또한 이들은 모두 계통의 동특성식이 입력항에 대해 선형인 어파인(affine) 계통에 대해서만 적용 가능하며 또한 퍼지 규칙 구조(fuzzy rule structure)는 모두 초기에 격자구조로 결정된 후 고정되어 제어기의 차수가 불필요하게 높아지다는 단점이 있다.

본 논문에서는 일반적인 비선형 계통에 대해서 강인한 적응 퍼지 제어기를 설계함을 목표로 한다. 제시한 제어기는 온라인(on-line)으로 퍼지 규칙의 파라미터 뿐만이 아니라 구조도 갱신이 되며 각종 불확실성항의 유계상수를 추정하

* 正 會 員 : 高麗大 電氣電子電波工學部 博士課程

** 正 會 員 : 高麗大 電氣電子電波工學部 教授 · 工博

接受日字 : 2000年 9月 4日

最終完了 : 2000年 12月 27日

는 알고리즘을 사용한다. 따라서 퍼지 시스템의 동차수(dynamic order)가 불필요하게 높아지는 것을 방지할 수 있으며 또한 설계자가 계통과 퍼지 시스템의 불확실성항의 유계상수 정보를 계산할 필요성을 최소화한다. 모든 파라미터 갱신법칙과 제어 입력은 전체 페루프 계통이 리아프노브 관점에서 안정하도록 결정된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 제어 문제와 기본 아이디어를 기술하고 3장에서는 퍼지 시스템과 퍼지 규칙 구조 갱신법칙에 대해서 논한다. 그리고 4장에서는 제어 입력과 파라미터 갱신법칙을 유도하고 5장에서는 모의실험 결과를, 마지막으로 6장에서 결론을 제시한다.

2. 문제기술

본 논문에서는 다음과 같은 단일입력 단일출력(SISO) 비선형 시스템을 고려한다.

$$y^{(n)} = F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, u) \quad (1)$$

여기서

- $y \in R$: 시스템의 출력
- $u \in R$: 제어입력
- $y^{(i)} \ i=1, \dots, n$: y의 i번째 시간 도함수
- $F(\cdot) : R^n \rightarrow R$: 미지의 비선형 함수

이다. 상태변수 벡터를

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = [y \ y^{(1)} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T \in R^n$$

으로 정의하면 (1)은 다음과 같은 상태방정식으로 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F(x, u) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

미분 방정식 (1)의 유일한 해가 국부적으로 존재하기 위한 충분조건은 함수 $F(\cdot)$ 이 다음과 같이 정의되는 Lipschitz 조건을 만족하는 것이다.[9]

정의 1 : U 를 R^{n+1} 의 open subset이라고 하자. 함수 $f(w) : U \rightarrow R$ 는 모든 $w_a, w_b \in U$ 에 대해서 다음을 만족시키는 양의 상수 L 이 존재하면 U 에서 locally Lipschitz라고 하고 L 을 Lipschitz상수라고 한다.

$$|f(w_a) - f(w_b)| \leq L|w_a - w_b| \quad (3)$$

정리 1 : 만약 함수 f 가 C^1 에 속하면 f 는 locally Lipschitz이다. 또한 $\Omega \subset U$ 가 compact이면 f 는 Ω 에서 Lipschitz이다.

정리 1은 (1)의 유일한 해가 존재할 충분조건을 제시한다. 따라서 본 논문에서도 비선형 계통 (1)에 대해 제어기를 설계하기 위해서 다음과 같은 가정들이 필요하다.

가정 1: (1)의 함수 $F(x, u)$ 는 $(x, u) \in R^{n+1}$ 에 대해서

C^1 이고, 입력 u 에 대해서 smooth한 함수이다.

가정 2: 모든 $(x, u) \in R^{n+1}$ 에 대해서 $\frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \neq 0$

이 성립하고 $\frac{\partial F(x, u)}{\partial u}$ 의 부호는 알 수 있다.

가정 3: 기준입력 $y_d(t), y_d^{(1)}(t), \dots, y_d^{(n-1)}(t)$ 은 smooth하고 유계이다.

가정 2는 계통의 출력 가제어성(output-controllability)를 위해서 필요하며, $\partial F/\partial u$ 의 부호는 양으로 설정한다. 제어 목적은 출력 $y(t)$ 가 기준출력 $y_d(t)$ 를 원하는 정밀도로 추종하도록 하고 모든 상태변수와 제어입력이 유계되도록 제어 입력 u 를 결정하는 것이다.

가정 1에 의해서 $F(x, u)$ 는 u 에 대해서 smooth한 함수이므로 다음과 같이 $F(x, u)$ 를 명목입력값(nominal input)인 u_0 에 대해서 Taylor series expansion을 할 수 있다.

$$F(x, u) = F(x, u_0) + \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0} (u - u_0) + O(\cdot) \quad (4)$$

여기서 $O(\cdot)$ 는 고차항(higher order term)으로서 다음과 같다.

$$O(\cdot) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta F_{u_0}^{[k]} (u - u_0)^k, \quad \Delta F_{u_0}^{[k]} = \left. \frac{\partial^k F(x, u)}{k! \partial u^k} \right|_{u=u_0}$$

이제 다음과 같이 $f(x), g(x), u_d$ 를 정의하면

$$f(x) \triangleq F(x, u_0), \quad g(x) \triangleq \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0}, \quad u_d \triangleq u - u_0 \quad (6)$$

(1)은 다음과 같이 다시 기술될 수 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u_d + O(\cdot) \quad (7)$$

(1)의 $F(\cdot)$ 가 미지의 함수이므로 (7)의 $f(x), g(x)$ 도 역시 미지의 함수이다. 본 논문에서는 범용 근사화기로 알려진 퍼지 시스템을 이용하여 이들을 동정한 후 이 값들을 이용하여 제어기를 구성하는 일종의 간접 적용 제어 방식을 제시한다.

정리 2: 다음을 만족하는 l_1, l_2 가 존재한다.

$$|O(\cdot)| \leq l_1|u_d| + l_2\|x\| \quad (8)$$

<증명> 가정 1에 의해서 $\Delta F_{u_0}^{[k]}$ 은 C^1 에 속하고 u_d^k 도 C^1 에 속하므로 $O(\cdot)$ 은 compact set Ω 에서 Lipschitz임을 알 수 있다. 따라서 정의 1에 의해서 (8)이 성립한다.■

본 논문에서는 제어기를 설계할 때 (8)의 l_1 과 l_2 를 추정하는 기법을 이용하므로 [7]에서와 같이 설계자가 이들 상수값을 계산해야 할 필요는 없다.

3. 퍼지 시스템을 이용한 함수의 근사화

[1]에 의하면 crisp 퍼지화기, max-product 추론, 무계중심 비퍼지화기를 사용하면 퍼지시스템의 출력은 다음과 같고

$$y(x, \theta) = \frac{\sum_{l=1}^M \theta^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)} \triangleq \theta^T \xi(x) \quad (9)$$

위는 임의의 함수를 원하는 정도까지 근사화할 수 있다는 사실이 알려져 있다. 여기서 μ_{F_i} 은 i 번째 상태변수에 대한 l 번째 퍼지 소속함수를 나타내고 θ^l 은 l 번째 퍼지 규칙의 퍼지후건부 파라미터이고 M 은 퍼지규칙의 개수를 나타낸다. $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]^T$ 이고 $\xi(x)$ 는 k 번째 요소가 다음과 같이 정의되는 M 차원의 벡터이며 퍼지 기저 함수(fuzzy basis function, FBF) 벡터라고 한다.

$$\xi_k(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)} \quad (10)$$

만약 $x_i, (i=1, \dots, n)$ 에 대한 소속함수의 개수를 m_i 라고 하면 격자 구조에 의해서 생성되는 퍼지 규칙의 개수는 $M = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 이고 소속함수의 파라미터는 고정시키고 퍼지 후건부 파라미터만 갱신한다 하더라도 퍼지 시스템의 동적 차수(dynamic order)는 $2M$ 이 된다. 기존의 퍼지 시스템을 이용한 간접 적응 제어 방식[2-5]은 초기에 M 개의 퍼지 규칙을 정해놓고 전체 제어 계통을 운용하는 방법을 사용하지만 $\xi_k(x)$ 의 대부분이 0에 가까운 값을 가지므로 이는 비효율적이다. 따라서 본 논문에서는 시간 t_a 에서 다음의 두 조건이 만족되면 k 번째 퍼지 규칙을 $t \geq t_a$ 에서 활성화되는 방법을 제시한다.

- 1) 시간 t_a 이전에 k 번째 규칙이 활성화 되지 않았다.
- 2) 시간 t_a 에서 $\xi_k(x) \geq \epsilon_{FBF}$ 을 만족한다. 여기서 ϵ_{FBF} 는 활성화 경계값(activation threshold)을 나타내며 $0 < \epsilon_{FBF} < 1$ 의 범위를 갖는다.

이러한 동적인 퍼지규칙을 사용하면 퍼지 시스템의 출력은 오직 그 때까지 활성화된 퍼지 규칙들에 의해서만 결정된다. 활성화된 FBF와 그에 대응하는 퍼지 후건부 파라미터를 ξ_{fa}, ξ_{ga} 과 θ_{fa}, θ_{ga} 라고 표기하면 퍼지 시스템을 이용하여 함수 f, g 를 추정하는 식은 다음과 같고

$$\hat{f}_a(x, \theta_{fa}) = \theta_{fa}^T \xi_{fa} \quad (12a)$$

$$\hat{g}_a(x, \theta_{ga}) = \theta_{ga}^T \xi_{ga} \quad (12b)$$

(7)의 f, g 는 다음과 같이 기술된다.

$$f(x) = \hat{f}(x, \theta_{fa}^*) + \delta_f = \theta_{fa}^{*T} \xi_{fa} + \delta_f \quad (13a)$$

$$g(x) = \hat{g}(x, \theta_{ga}^*) + \delta_g = \theta_{ga}^{*T} \xi_{ga} + \delta_g \quad (13b)$$

여기서 δ_f, δ_g 는 근사화오차(approximation error)이며, $\theta_{fa}^*, \theta_{ga}^*$ 는 다음과 같이 정의되는 최적의 퍼지 파라미터이다.

$$\theta_{fa}^* = \arg \min_{\theta_{fa} \in \Omega_f} [\sup_{x \in U_f} |\hat{f}(x, \theta_{fa}^*) - f(x)|]$$

$$\theta_{ga}^* = \arg \min_{\theta_{ga} \in \Omega_g} [\sup_{x \in U_g} |\hat{g}(x, \theta_{ga}^*) - g(x)|]$$

$\theta_{fa}^*, \theta_{ga}^*$ 는 활성화된 부분 $\theta_{fa}^*, \theta_{ga}^*$ 과 비활성화된 부분 $\theta_{fp}^*, \theta_{gp}^*$ 로 분리할 수 있다.

$$\theta_{fa}^* = \begin{bmatrix} \theta_{fa}^* \\ \theta_{fp}^* \end{bmatrix}, \theta_{ga}^* = \begin{bmatrix} \theta_{ga}^* \\ \theta_{gp}^* \end{bmatrix} \quad (14)$$

위와 유사하게 $\theta_{fa}^*, \theta_{ga}^*$ 의 추정치인 θ_{fa}, θ_{ga} 도 다음과 같이 분리할 수 있다.

$$\theta_{fa} = \begin{bmatrix} \theta_{fa} \\ \theta_{fp} \end{bmatrix}, \theta_{ga} = \begin{bmatrix} \theta_{ga} \\ \theta_{gp} \end{bmatrix} \quad (15)$$

위에서 기술된 퍼지 시스템을 이용하여 제어기를 구하고 고차항과 근사화오차를 보상하는 강인제어항을 구성하는 방법을 다음 절에서 논한다.

4. 퍼지 시스템을 이용한 강인한 적응 궤환 선형화 제어기 설계

4.1 제어기 구조와 오차의 동특성식

(13)을 이용하면 (7)은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = \hat{f}(x, \theta_{fa}^*) + \delta_f(x) + (\hat{g}(x, \theta_{ga}^*) + \delta_g(x))u_d + O(\cdot) \quad (16)$$

(16)에 존재하는 근사화 오차와 고차항에 대하여 강인한 제어기를 설계하는 것이 이 장의 내용이다. 제어입력은 다음과 같이 결정한다.

$$u_d = \frac{1}{\hat{g}_a} (-\hat{f}_a + y_m^{(n)} + k^T e + \beta)$$

$$= u_{dc} + \frac{\beta}{\hat{g}_a} \quad (17)$$

여기서 $e = y_d - y, e = [e \ \dot{e} \ \dots \ e^{(n-1)}]^T$ 이고 \hat{f}_a, \hat{g}_a 는 각각 $\hat{f}_a(x, \theta_{fa}), \hat{g}_a(x, \theta_{ga})$ 를 줄인 표현이다.

위에서 제시한 제어기는 크게 두 부분으로 나눌 수 있다. u_{dc} 는 확정성 등가 제어입력(certainty equivalent control input)으로서 적응적으로 계통의 비선형성을 상쇄하고 페루프 계통을 안정화 시키며, β 는 재구성 오차를 다루기 위한 강인제어항으로서 뒤에서 정의된다. 벡터 k 는 $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n = 0$ 의 근이 s -평면의 좌반면에 있도록 선정된다. (17)을 (16)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{e} = \Lambda_c e + b_c((\hat{f}_a - \dot{f}^* - \delta_f) + (\hat{g}_a - \dot{g}^* - \delta_g)u_d - \beta - O(\cdot)) \quad (18)$$

여기서 \dot{f}^* 와 \dot{g}^* 는 각각 $\dot{f}(x, \theta_f^*)$ 와 $\dot{g}(x, \theta_g^*)$ 을 줄여서 표기한 것이며

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & -k_1 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

이다. Λ_c 는 안정한 행렬이므로 임의의 $n \times n$ 양정치 (positive definite) 행렬 Q에 대하여 다음과 같은 관계를 만족하는 양정치 대칭행렬 P가 존재한다.

$$\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q \quad (20)$$

4.2 퍼지 파라미터 갱신법칙과 안정도 해석

(13)의 재구성 오차와 미지의 최적의 파라미터에 대해 다음과 같은 가정이 성립한다.

가정 4: compact region Ω 에서 다음이 성립한다.

$$|\delta_f(x)| \leq \varepsilon_f \quad \forall x \in \Omega \quad (21)$$

$$|\delta_g(x)| \leq \varepsilon_g \quad \forall x \in \Omega \quad (22)$$

여기서 ε_f 와 ε_g 는 미지의 유계 상수이다.

가정 5: 최적의 퍼지 후건부 파라미터는 유계이다. 즉 다음을 만족하는 상수 M_f 와 M_g 가 존재한다.

$$|\theta_f^*| < M_f \quad (23)$$

$$|\theta_g^*| < M_g \quad (24)$$

가정 4와 5는 퍼지 시스템이나 신경망등의 온라인 근사화기를 이용하여 미지의 함수를 근사화 할 때 일반적으로 사용하는 가정들이다. 그러나 대부분 유계상수를 설계자가 알고 있다고 가정하지만 실제로 이들 상수를 알아내기는 어렵기 때문에 과추정을 하거나 오프라인(off-line) 실험을 통해서 알아내는 것이 일반적이다. 본 논문에서는 이들 상수도 추정하는 방식을 채택한다.

적용법칙을 유도하기 위해서 다음과 같이 리아프노브함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left(e^T P e + \frac{1}{\gamma_f} \partial_f^T \partial_f + \frac{1}{\gamma_g} \partial_g^T \partial_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \tilde{\psi} \right) \quad (25)$$

여기서 P는 (20)을 만족하는 양정치 대칭행렬이고 $\partial_f = \theta_f - \theta_f^*$, $\partial_g = \theta_g - \theta_g^*$, $\tilde{\psi} = \psi - \psi^*$ 이고 ψ^* 는 유계상수들을 이용하여 뒤에서 정의되는 벡터이며 ψ 는 이를 추정하는 벡터이다. 그리고 $\gamma_f, \gamma_g, \gamma_\psi$ 는 설계자가 정하는 학습율이다.

본 논문에서 제시하는 결과는 다음과 같이 정리된다.

정리 3. 계통 (1)에 대하여 가정 1, 2가 성립하고 기준출력에 대해서 가정 3이 성립하며 퍼지 시스템에 대해서 가정 4, 5가 성립한다고 하자. (26)의 강인제어항을 포함한 제어입력 (17)과 (27),(28),(29)와 같이 퍼지시스템의 파라미터 갱신법칙 그리고 유계상수 추정치 갱신법칙을 결정한다.

$$\beta = \frac{\psi^T w}{1 - \phi_2 / |\hat{g}_d|}, w = \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \\ |u_d| \tanh\left(\frac{z |u_d|}{\varepsilon}\right) \\ \|x\| \tanh\left(\frac{z \|x\|}{\varepsilon}\right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{\theta}_{fa} = -\gamma_f [e^T P b_c \xi_{fa} - \sigma(\theta_{fa} - \theta_{fa}^0)] \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_{ga} = -\gamma_g [e^T P b_c \xi_{ga} u_d - \sigma(\theta_{ga} - \theta_{ga}^0)] \quad (28)$$

$$\dot{\psi} = \gamma_\psi \begin{bmatrix} z w_1 - \sigma(\psi_1 - \psi_1^0) \\ z w_2 + \frac{z \beta}{|\hat{g}_d|} - \sigma(\psi_2 - \psi_2^0) \\ z w_3 - \sigma(\psi_3 - \psi_3^0) \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서 $z = e^T P b_c$ 이고 $\varepsilon, \sigma > 0$ 는 설계자가 정하는 상수이고 $\theta_{fa}^0, \theta_{ga}^0, \psi^0$ 는 각각 θ_f, θ_g, ψ 의 초기값들이다. 위와 같은 제어입력과 파라미터 갱신법칙은 계통의 상태변수와 퍼지 파라미터 그리고 유계상수 추정벡터를 uniformly bound시킨다. 또한 설계상수 $\varepsilon, \sigma, k_i, \gamma_f, \gamma_g, \gamma_\psi$ 를 적절히 선정하여 추종오차를 원점에 임의로 가까운 근방으로 수렴시킬 수 있다.

<증명> (25)를 시간에 대해 미분하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c (\partial_{fa}^T \xi_{fa} - \theta_{fp}^{*T} \xi_{fp} - \delta_f \\ &+ \partial_{ga}^T \xi_{ga} u_d + \partial_{gp}^T \xi_{gp} u_d - \delta_g u_d - \beta - O(\cdot)) \\ &+ \frac{1}{\gamma_f} \partial_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\gamma_g} \partial_g^T \dot{\theta}_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \partial_{fa}^T \left(\frac{1}{\gamma_f} \dot{\theta}_{fa} + e^T P b_c \xi_{fa} \right) \\ &+ \partial_{ga}^T \left(\frac{1}{\gamma_g} \dot{\theta}_{ga} + e^T P b_c \xi_{ga} u_d \right) - e^T P b_c \delta_f \\ &- e^T P b_c \theta_{fp}^{*T} \xi_{fp} - e^T P b_c \delta_g u_d \\ &- e^T P b_c \theta_{gp}^{*T} \xi_{gp} u_d - e^T P b_c \beta - e^T P b_c O(\cdot) \\ &+ \frac{1}{\gamma_f} \partial_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\gamma_g} \partial_g^T \dot{\theta}_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 $\partial_{fa} = \theta_{fa} - \theta_{fa}^*$, $\partial_{fp} = \theta_{fp} - \theta_{fp}^*$, $\partial_{ga} = \theta_{ga} - \theta_{ga}^*$, $\partial_{gp} = \theta_{gp} - \theta_{gp}^*$ 이고 $\dot{\theta}_{fp} = \dot{\theta}_{gp} = 0$ 를 이용하였다. θ_{fa}, θ_{ga} 에 대한 적용법칙을 (27),(28)로 선정하면 (30)으로부터 다음이 성립한다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \sigma \partial_{fa}^T (\theta_{fa} - \theta_{fa}^0) - \sigma \partial_{ga}^T (\theta_{ga} - \theta_{ga}^0) + \Lambda \quad (31)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Lambda &= e^T P b_c (\theta_{fp}^{*T} \xi_{fp} - \delta_f + \theta_{gp}^{*T} \xi_{gp} u_d - \delta_g u_d - O(\cdot)) \\ &- e^T P b_c \beta + \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \dot{\psi} \end{aligned} \quad (32)$$

이다. Λ 는 근사화 오차와 고차항 그리고 비활성화된 최적

퍼지 규칙에 의해 야기되는 불확실성을 모두 내포하고 있다. (8),(21)-(24)를 이용하면 (32)으로부터 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned} \Lambda &= z(\theta_{fp}^{*T} \xi_{fp} - \delta_f + \theta_{gp}^{*T} \xi_{gp} u_{dc} - \delta_g u_{dc} - O(\cdot)) - z\beta \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi \\ &\leq \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi + |z| \left(|\theta_{fp}^{*T} \xi_{fp}| + |\delta_f| + |\theta_{gp}^{*T} \xi_{gp} u_{dc}| + |\delta_g u_{dc}| \right. \\ &\quad \left. + |O(\cdot)| \right) + |z| \left| \theta_{gp}^{*T} \xi_{gp} \frac{\beta}{g_a} \right| + |z| \left| \delta_g \frac{\beta}{g_a} \right| - z\beta \\ &\leq \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi + |z| \left(M_f \alpha_f + \varepsilon_f + M_g \alpha_g |u_{dc}| + \varepsilon_g |u_{dc}| \right. \\ &\quad \left. + l_1 |u_{dc}| + l_2 \|x\| \right) + |z\beta| \frac{M_g \alpha_g + \varepsilon_g + l_1}{|g_a|} - z\beta \quad (33) \end{aligned}$$

여기서 $\alpha_f = \sup_{x \in U} \xi_{fp}(x)$, $\alpha_g = \sup_{x \in U} \xi_{gp}(x)$ 이다. 벡터 ψ^* 와 s 를

$$\psi^* = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_f \alpha_f + \varepsilon_f \\ M_g \alpha_g + \varepsilon_g + l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 1 \\ |u_{dc}| \\ |z| \end{bmatrix}$$

라고 정의하면 (33)은 다음과 같이 재기술된다.

$$\Lambda \leq \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi + |z| \psi^{*T} s - z\beta + \frac{\psi_2^*}{|g_a|} |z\beta| \quad (34)$$

강인 제어항 β 를 (26)과 같이 결정하면 다음이 성립된다.

$$z\beta = z\psi^T w + z\beta \frac{\psi_2}{|g_a|} \quad (35)$$

따라서 (35)를 (34)에 대입하면

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi + |z| \psi^{*T} s - z\psi^T w - z\beta \frac{\psi_2}{|g_a|} + z\beta \frac{\psi_2^*}{|g_a|} \\ &\leq \frac{1}{\gamma_\psi} \tilde{\psi}^T \psi - z\tilde{\psi}^T w - z\beta \frac{\tilde{\psi}_2}{|g_a|} + |z| \psi^{*T} s - z\psi^{*T} w \\ &\leq \tilde{\psi}^T \left(\frac{1}{\gamma_\psi} \psi - zw \right) - z\beta \frac{\tilde{\psi}_2}{|g_a|} + \psi^{*T} (|z|s - zw) \quad (36) \end{aligned}$$

이 된다. ψ 의 적응법칙을 (29)와 같이 결정하면, $\psi_i^0 \geq 0, i=1, 2, 3$ 이라면 (29)는 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $\psi_i(t) \geq 0$ 를 보장한다. 그 이유는 $z w_i \geq 0, z\beta \geq 0$ (Remark 2참조)이므로 $\psi_i = 0$ 에서 $\dot{\psi}_i > 0$ 이기 때문이다. (29)를 (36)에 대입하고 다음과 같은 부등식을 이용하면

$$0 \leq |\eta| - \eta \tanh\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) \leq x\varepsilon \quad (37)$$

다음이 얻어진다.

$$\Lambda \leq -\sigma \tilde{\psi}^T (\psi - \psi^0) + x\varepsilon \|\psi^*\|_1 \quad (38)$$

여기서 x 는 $x = \exp(-(x+1))$ 을 만족하는 상수이다. ($x = 0.2785$) (38)을 (31)에 적용하여 완전제곱꼴로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \sigma \tilde{\theta}_f^T (\theta_f - \theta_f^0) \\ &\quad - \sigma \tilde{\theta}_g^T (\theta_g - \theta_g^0) - \sigma \tilde{\psi}^T (\psi - \psi^0) + x\varepsilon \|\psi^*\|_1 \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{\sigma}{2} (|\tilde{\theta}_f|^2 + |\tilde{\theta}_g|^2 + |\tilde{\psi}_f|^2) \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} (|\theta_f^* - \theta_f^0|^2 + |\theta_g^* - \theta_g^0|^2 + |\psi^* - \psi^0|^2) + x\varepsilon \|\psi^*\|_1 \quad (39) \end{aligned}$$

여기서 $\|\cdot\|_1$ 은 벡터의 1-norm을 나타낸다. 만약 $Q=I$ 로 선택하면 다음이 성립한다.

$$\dot{V} \leq -cV + \lambda \quad (40)$$

여기서

$$c = \min \left\{ \frac{1}{\lambda_{\max}(P)}, \sigma \gamma_f, \sigma \gamma_g, \sigma \gamma_\psi \right\} \quad (41)$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} (|\theta_f^* - \theta_f^0|^2 + |\theta_g^* - \theta_g^0|^2 + |\psi^* - \psi^0|^2) + x\varepsilon \|\psi^*\|_1 \quad (42)$$

이다. $\rho = \lambda/c > 0$ 으로 정의하면 (40)에 의해서 다음이 만족되고

$$0 \leq V(t) \leq \rho + (V(0) - \rho) \exp(-ct) \quad (43)$$

따라서 리아프노프 함수 V 의 정의에 의해 $x, \theta_f, \theta_g, \psi$ 는 uniformly bounded된다. 또한 (43)과 (25)로 부터 주어진 $\mu > \sqrt{2\rho}$ 에 대해서 모든 $t \in T$ 에 대해 다음이 만족하는 T 가 존재함을 알 수 있다.

$$|y(t) - y_m(t)| \leq \mu \quad (44)$$

또한 설계상수인 $\varepsilon, \sigma, k_i, \gamma_f, \gamma_g$ 들을 적절히 선택하면 μ 를 원하는 정도까지 작게 만드는 것이 가능하며 따라서 추종오차를 0에 가깝게 보낼 수 있다. ■

Remark 1. 강인 제어 입력 β (33)을 구성하는데 쓰인 $\tanh(\cdot)$ 함수는 $\text{sgn}(\cdot)$ 함수를 사용할 경우 발생하는 채터링(chattering)현상을 제거하기 위해 사용되었다. $\varepsilon \rightarrow 0$ 이면 $\tanh(\cdot) \rightarrow \text{sgn}(\cdot)$ 이므로 $\varepsilon = 0$ 으로 설정하면 w 는 다음과 같이 된다.

$$w = \begin{bmatrix} \text{sgn}(z) \\ |u_{dc}| \text{sgn}(z) \\ \|x\| \text{sgn}(z) \end{bmatrix} \quad (45)$$

(45)는 $s_i \geq 0 (i=1, 2, 3)$ 이므로 (26)으로부터 쉽게 유도된다. 또한 여기에 덧붙여서 $\sigma = 0$ 으로 설정하거나 시스템이 오프라인으로 충분히 학습되어 $\theta_f^* \approx \theta_f^0, \theta_g^* \approx \theta_g^0, \psi_f^* \approx \psi_f^0$ 가 만족된다면 $\lambda = \rho = 0$ 이 되어 추종오차가 점근적으로 0으로 수렴함을 보장할 수 있다. 그러나 이 경우 비록 최적의 제어기 성능을 얻을 수 있으나 앞에 언급한 바와 같이 불연속인 $\text{sgn}(\cdot)$ 함수에 의해 채터링이 일어나게 된다.

Remark 2. $z\beta \geq 0$ 가 성립하려면 부등식 $\psi_2 < g_L$ 이 성립하여야 한다. 여기서 g_L 은 모든 $x \in U$ 에 대해 $0 < g_L \leq g(x)$ 을 만족시키는 상수이다. 따라서 본 논문에서는 다음과 같은 간단한 투영 알고리즘(projection algorithm)을 사용하여 ψ_2 가 g_L 을 넘어가는 것을 방지할 필요가 있다.

$$\dot{\psi}_2 = 0 \quad \text{if } \psi_2 \geq g_L \text{ and } \dot{\psi}_2 > 0 \quad (46)$$

투영 알고리즘이 사용되는 경우 Λ 의 변화분을 $\Delta\Lambda$ 라고 표기하면 (36)으로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\Delta\Lambda = -\hat{\psi}_2 z w_2 - z\beta \frac{\hat{\psi}_2}{|\hat{g}_a|} \quad (47)$$

$\hat{\psi}_2 > 0$, $z w_2 \geq 0$ 그리고 $z\beta > 0$ 으로부터 (47)은 음수가 되고 따라서 리아프노브 함수는 투영 알고리즘이 사용되더라도 그 영향으로 증가하는 것이 아니라 감소하는 것을 알 수 있다.

Remark 3. 파라미터 갱신법칙 (27)-(29)에서 파라미터의 표류(drift)를 막기 위해 강인 적응 제어에서 일반적으로 쓰이는 σ -보정법(σ -modification)을 이용하였다. 그리고 설계상수 중 k_i 는 추종오차의 수렴속도에 직접적으로 영향을 미치고, ϵ 을 작게 할수록 정상상태 오차는 작게된다.

5. 모의실험

제시한 알고리즘의 효율성을 보이기 위해 다음과 같은 계통에 대해서 모의실험을 수행하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 0.15u^2 + 0.1(1+x_2^2)u + \sin(0.1u) \quad (48) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

위 계통의 비선형성에 대한 사전지식은 없다고 가정한다. (49)에서 가정 2가 만족됨을 알 수 있으며

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = 0.45u^2 + 0.1 + 0.1x_2^2 + 0.1\cos(0.1u) > 0 \quad (49)$$

출력은 기준출력 $y_d(t) = \sin(t) + \cos(0.5t)$ 를 추종하도록 한다. 초기 상태변수값은 $x(0) = [0.6 \ 0.5]^T$ 로 설정하였다. 제어기에 쓰인 상수값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \sigma = 0.01, \epsilon = 0.05, P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}, \\ \gamma_f &= 1000, \gamma_g = 10, \gamma_\psi = 1, \epsilon_{FBF} = 0.1 \end{aligned}$$

위에서 u_0 를 0으로 선정하였으므로 $u = u_d$ 이고 (17)로부터 제어입력은 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{\hat{g}_a} (-\hat{f}_a + y_m^{(n)} + k^T e + \beta) \quad (50)$$

x_1 과 x_2 에 대해서 각각 5개의 소속함수를 그림 1과 같이 정하고 $\xi_k(x(0)) \geq \epsilon_{FBF}$ 를 만족하는 FBF는 3개이므로 초기 퍼지 규칙은 3개로 설정하였다. 초기 퍼지 규칙과 그들에 대한 θ_{fa}^0 , θ_{ga}^0 는 그림 2에 도시되어 있다. θ_{fa}^0 는 0으로 정하였고 $\hat{g}_a(0) > 0$ 이어야 되므로 θ_{ga}^0 는 1로 설정하였다.

모의실험 결과가 그림3에 도시되어 있다. 그림 3에서 (a)은 계통출력과 기준출력을 도시한 것이고 (b)는 제어입력을 그리고 (c)는 퍼지규칙의 개수변화를 도시한 것이다. 이 결과에서 계통의 출력은 정상상태 오차 없이 기준출력을 잘 추종함을 알 수 있고 채터링없는 smooth한 제어입력이 생성됨을 알 수 있다.

모의 실험 결과 초기에는 퍼지규칙의 개수가 3개였으나 15

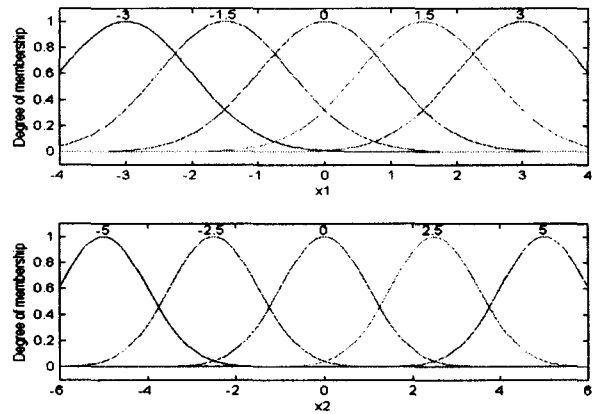


그림 1 x_1 과 x_2 에 대한 소속함수
Fig. 1 MFs for x_1 and x_2

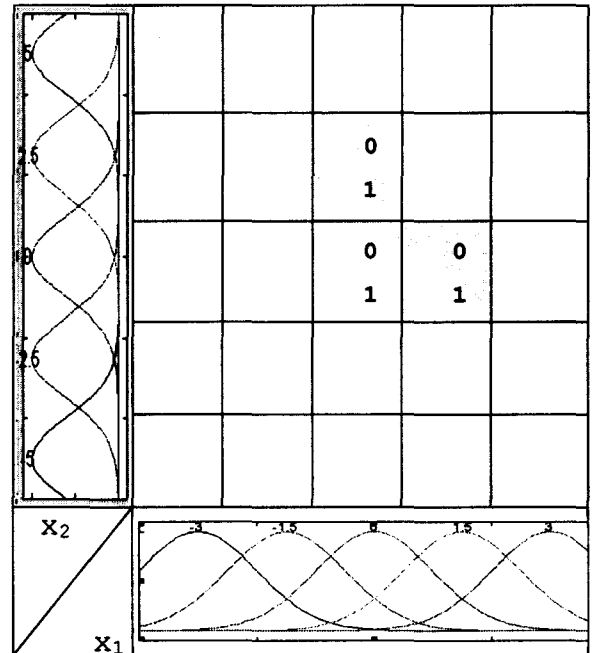


그림 2 초기의 퍼지 규칙과 후건부 파라미터
Fig. 2 Initial Fuzzy rules and corresponding consequent parameters

초 후의 퍼지 규칙의 개수는 11개로 증가함을 확인하였고 이를 그림 2와 4에 나타내었다. 3장에서 제시한 퍼지 규칙 활성화 조건을 고려하면 계통의 상태변수 궤적이 지나는 곳의 근방에 중심값이 위치한 소속함수들로 이루어진 퍼지 규칙이 활성화되므로 그림 4에서 상태변수 궤적을 간접적으로 유추할 수 있을 것이다. 또한 이 개수는 퍼지 규칙의 개수는 격자규칙에 의해 생성된 퍼지 규칙의 개수인 25(5×5)개의 44%로서 시스템의 차수가 높아질수록 이 비율은 낮아질 것으로 기대된다.

6. 결론

본 논문에서 제시한 방법이 기존 논문들의 결과에 비하여

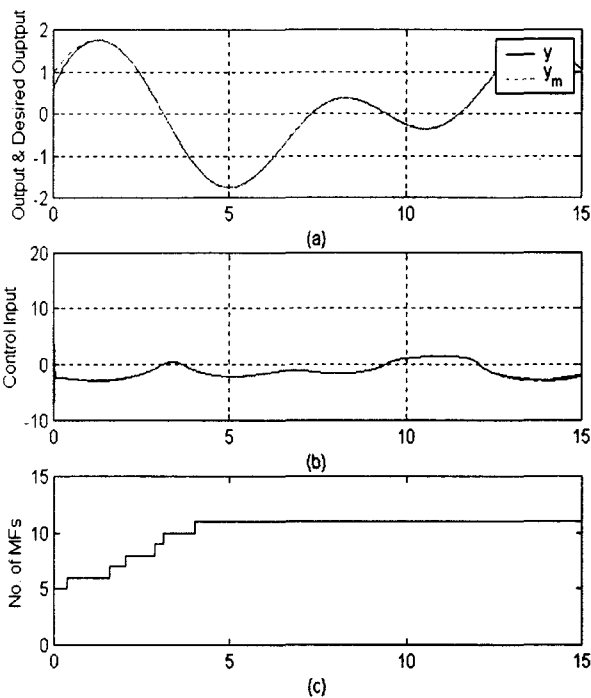


그림 3 (a) 시스템 출력과 기준출력, (b) 제어입력, (c) 퍼지 규칙의 개수 변화

Fig. 3 (a) System output and desired output, (b) Control input, (c) Variation of the number of MFs

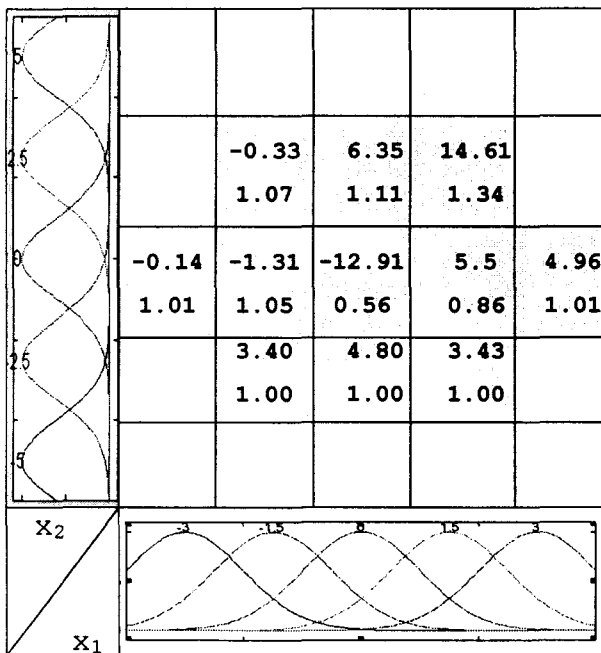


그림 4 15초 후의 퍼지 규칙과 후건부 파라미터
Fig. 4 Fuzzy rules and corresponding consequent parameters after 15 sec.

갖는 장점들은 다음과 같다.

1. 기존의 비선형 계통에 대한 적용 퍼지 제어기를 설계하는 논문들이 대부분 어파인(affine) 시스템에만 적용 가능

- 한 것에 비해 본 논문에서는 계통 동특성식의 우변이 상태변수와 제어입력의 일반적인 함수인 계통에 대해서 강한 적용 퍼지 제어기를 설계하였다.
2. 온라인으로 퍼지 규칙의 파라미터가 갱신될 뿐만 아니라 동적으로 퍼지 규칙이 삽입되는 알고리즘을 제시하여 기존의 격자 방식으로 초기에 퍼지 규칙을 정한 후 변화없이 사용하는 방식에 대해서 제어기의 동차수를 현저하게 줄일 수 있다. 더불어 이러한 변화들-파라미터뿐만이 아니라 퍼지규칙 구조의 변화-은 전체 폐루프 시스템이 리아프노브(Lyapunov) 관점의 안정도가 보장되도록 결정된다.
 3. 강인제어항의 이득을 계산하는데 있어서 필요한 각종 유계상수들을 추정하는 방법을 사용하여 설계자가 이들 상수를 오프라인으로 알아내거나 과추정을 할 필요가 없다. 향후 연구과제로서 본 논문의 기법을 퍼지관측기를 설계하는데 적용하는 기법에 대한 연구와, 다입력-다출력(MIMO) 시스템에 확장·적용하는 연구가 수행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1989
- [2] Li-Xin Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Tracking," *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics-Part B*, vol. 26, No. 5, pp. 677-691, October 1996.
- [3] C.-S. Chen, W.-L. Chen, "Robust model reference adaptive control of nonlinear systems using fuzzy systems," *Int. J. Systems Science*, vol. 27, no. 12, pp. 1435-1442, 1996
- [4] M. U. Polycarpou, M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 3, pp. 363-384, 1998
- [5] B. Yoo, W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 315-321, 1998
- [6] S. Fabri, V. Kadirkamanathan, "Dynamic Structure Neural Networks for Stable Adaptive Control of Nonlinear System," *IEEE trans. Neural Networks*, vol.7, no.5, pp.1151-1167, 1996
- [7] S. S. Ge, C. C. Hang, T. Zhang, "Adaptive Neural Network Control of Nonlinear Systems by State and Output Feedback," *IEEE trans. Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, vol. 29, no. 6, pp. 818-828, Dec. 1999
- [8] Y. G. Leu, W. Y. Wang, T. T. Lee, "Robust Adaptive Fuzzy-Neural Controllers for Uncertain Nonlinear Systems," *IEEE trans. Robotics and Automation*, vol. 15, no. 5, pp. 805-817, 1999
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, 1992

- [10] D. S. Yoo, M. J. Chung, "A Variable Structure Control with Simple Adaptation Laws for Upper Bounds on the Norm of the Uncertainties," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 860-865, 1992
- [11] E. Tzirkel-Hancock, F. Fallside, "Stable Control of Nonlinear Systems Using Neural Networks," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 2, pp. 63-68, 1992
- [12] H. Lee, M. Tomizuka, "Robust Adaptive Control Using a Universal Approximator for SISO Nonlinear Systems," *IEEE Trans. Fuzzy Sys.*, vol. 8, no. 1, pp. 95-106, 2000
- [13] L.-X. Wang, J. M. Mendel, "Fuzzy Basis Functions Universal Approximation, and Orthogonal Least-Squares Learning," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [14] M. M. Polycarpou, P. A. Ioannou, "On the Existence and Uniqueness of Solutions in Adaptive Control Systems," *IEEE Trans. Automatic contr.* vol. 38, no. 3, pp. 474-479, 1993
- [15] Yound-Hwan Park, Gwi-Tae Park, "Design of a robust adaptive fuzzy controller globally stabilizing multi-input nonlinear system with state-dependent uncertainty," *Control and Cybernetics*, vol. 27, no. 4, pp. 613-629, 1998
- [16] J. T. Spooner, K. M. Passino, "Stalbe Adaptive Control Using Fuzzy Systems and Neural Networks," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 339-359, 1996
- [17] P. A. Ioannou, A. Datta, "Robust Adaptive Control: A Unified Approach," *Proceedings of the IEEE*, vol. 79 no. 12, pp. 1736-1767, 1991
- [18] M. Kritic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, A Wiley-Interscience publication, 1995
- [19] J.-J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [20] K. Fischle, D. Schroder, "Improved Stable Adaptive Fuzzy Control Method," *IEEE Trans. Fuzzy Sys.* vol. 7, no. 1, pp. 27-49, 1999

저 자 소 개



박 장 현 (朴 張 鉉)

1972년 1월 24일 생. 1995년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년~현재 동 대학원 전기공학과 박사과정

Tel : 02-929-5185

E-mail : hyun@elec.korea.ac.kr



박 귀 태 (朴 貴 泰)

1947년 10월 25일 생. 1975년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1977년 동 대학원 전기공학과(석사). 1981년 동 대학원 전기공학과(공학박). 현재 고려대 전기공학과 교수

Tel : 02-3290-3218

E-mail : gtpark@elec.korea.ac.kr