비등방성 원뿔형 쉘의 안정성에 관한 연구

박원태† · 손병직*
천안공업대학 토목공학과 · *서울시립대학교 토목공학과
(2001. 9. 24. 접수 / 2001. 12. 10. 채택)

A Study on the Stability of Anisotropic Circular Conical Shells

Weon-Tae Park† · Byung-Jik Son*
Department of Civil Engineering, Cheonan National Technical College
*Department of Civil Engineering, University of Seoul
(Received September 24, 2001 / Accepted December 10, 2001)

Abstract : In this paper, stability analysis is carried out for the out of plane behaviors under compressive loads to the conical direction. It is not easy to obtain the analytic solutions about the stability analysis of anisotropic conical shells consisted of composite materials. For solving this problems, this paper used the finite difference method which is one of the numerical methods. The characteristics of the buckling behaviors of anisotropic laminated composite conical shells may be different according to a variety of causes, that is, the change of fiber angle, material arrangement, radius ratio, shape ratio and so on. The objective of this study is to analyze buckling behaviors of circular conical shells with shear deformation effects and to prove the advantage of composite materials.
Key Words : stability analysis, anisotropic laminated composite conical shells, characteristics of the buckling behaviors, finite difference method

1. 서 론

토목구조물에 사용하는 재료로는 대부분 콘크리트나 강재가 사용되어 왔으나, 최근에는 구조물이 대형화됨에 따라 경량 재료의 사용이 요구되고 있다. 이러한 경량 재료는 중량이 가볍고 필요한 강성을 가지며 내구성이 우수한 재료를 필요로 하고 있으며 대표적인 재료로 각광을 받는 재료가 복합재료이다. 복합재료는 두 가지 이상의 재료적 특성, 즉 직교이방성 재료특성을 갖는 서로 다른 재료들을 적층시켜 전체적인 강성을 효과적으로 발휘하도록 제작된 구조재료를 말한다. 특히 방향성을 갖는 단일소재만으로 구성된 구조재보다 구조적으로 약한 방향을 보강하도록 적층시킨 복합재료는 구조적 효율성이 뛰어난 구조물로 제작할 수 있는 장점을 지니고 있을 뿐만 아니라 손쉽게 제작할 수 있다는 점에서 높이 평가받는 구조재이다. 그러므로 여러 선진국에서는 경량구조물로 제작이 요구되는 선박, 항공기, 자동차 산업뿐만 아니라 최근 토목, 건축 산업에서도 복합재료를 사용하려는 시도가 이루어지고 있다.

본 연구는 적층 원뿔형 쉘 구조를 해석대상으로 하여 원뿔길이 방향으로 면내 압축력을 받을 때 좌굴 해석을 수행함으로서 적층 원뿔형 쉘 구조의 안정성에 대해서 검토하였다. 이것을 해석하고자 시스템 강도매트릭스와 기하학적 강도매트릭스를 구성하여 고유치 문제로 이상화한 후 좌굴하중을 결정하였다. 특히, 본 연구에서는 공식화하기 쉽게 각종 구조물에 적절히 사용할 수 있는 수치해석기법 중에서 유한차분법을 사용하여 쉘의 기하학적 조건과 복합재료의 사용에 따른 다양한 좌굴거동특성을 분석하였다.

원뿔형 쉘에 대한 처짐 및 응력해석은 기존의 여러 논문에서 연구 발표되었으나 안정성 해석은 아직까지 미비한 상태이다. 쉘 구조는 기하학적 특성상 압축력에 대하여 곡면 방향의 면내거동으로 저항하는 구조형식이므로 기하학적 형상에 따른 면내

†To Whom correspondence should be addressed.
pwtae@dragon.cntc.ac.kr

거동의 영향에 대하여 집중적인 연구가 필요하다.

따라서 본 논문에서는 복합재료의 특성 및 이점을 규명하고, 비등방성 원뿔형 쉘의 좌굴거동을 분석하여 쉘구조의 안정성을 검토하는데 있다. 또한, 수치해석을 통해서 높은 강성을 가질 수 있는 화이버의 적절한 보강방안을 제시하고자 한다.

2. 기본이론

본 연구에서는 전단변형 효과를 고려하여 비등방성 원뿔형 쉘의 안정성 해석을 하였다. Fig. 1은 해석모델의 미소요소에 대한 좌표계를 나타내며, Fig. 2는 면내력을, Fig. 3은 면외력을 나타낸다.[11]

여기서, x축은 원뿔방향을, θ축은 원주방향을, 그리고 z축은 반경방향을 의미한다. u_x, u_θ, u_z는 x, θ, z방향의 변위를 나타내며, β_x, β_θ는 x, θ방향의 회전각변위를 나타낸다.[7]

비등방성 원뿔형 쉘의 합응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.[7,8]

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{\theta x} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{\theta x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{\theta\theta} \\ \gamma^0_{\theta x} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{\theta x} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\theta z} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0_{\theta z} \\ \gamma^0_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} [\ \overline{Q}_{ij}\ ]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i,j = 1,2,6)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} [\ \overline{Q}_{ij}\ ]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (i,j = 1,2,6)$$

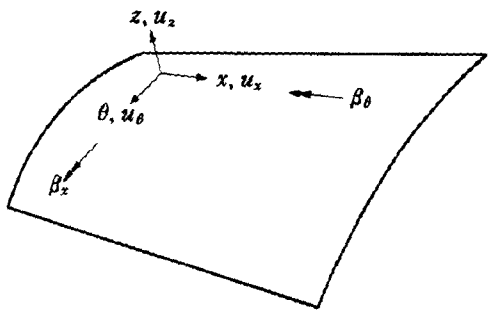

Fig. 1. Coordinate system and displacement field for conical shells

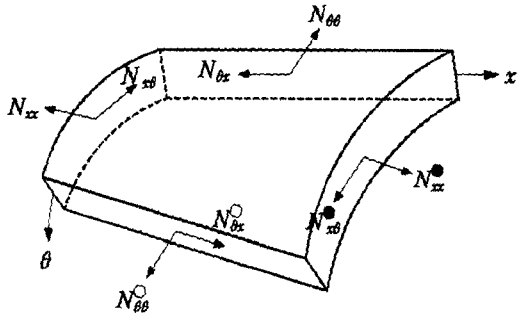

Fig. 2. In-plane forces for conical shells

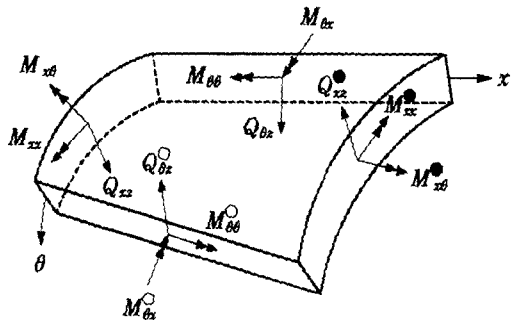

Fig. 3. Out-of-plane forces for conical shells

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} [\ \overline{Q}_{ij}\ ]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i,j = 1,2,6)$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=1}^{N} [\ \overline{Q}_{ij}\ ]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i,j = 4,5)$$

이고, A_{ij}는 면내력 강도, B_{ij}는 휨-면내력 연계강도, D_{ij}는 휨강도, 그리고 K는 전단보정계수를 의미한다.[13,14] 또한 $[\overline{Q}_{ij}]$는 재료축에서의 재료강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타내며, 변형률-변위 관계식은 참고문헌에 나타낸 바와 같다.

비등방성 원뿔형 쉘의 미소요소인 Fig. 2~Fig. 3에 정의된 합응력으로 지배방정식을 얻을 수 있다. 힘과 모멘트의 평형조건을 이용하면 원뿔형 쉘의 안정성에 대한 지배방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.[5,6,9,10]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{x\sin\alpha}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{x}(N_x - N_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{x\sin\alpha}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x\tan\alpha} Q_\theta + \frac{2}{x} N_{x\theta} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{x\sin\alpha}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{x\tan\alpha} N_\theta + \frac{1}{x} Q_x - N_{cr}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{1}{x\sin\alpha}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial\theta}-Q_x+\frac{M_x}{x}-\frac{M_\theta}{x}=0$$
$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{x\sin\alpha}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}-Q_\theta+\frac{2}{x}M_{x\theta}=0 \qquad (3)$$

여기서, x는 쉘의 첨점에서부터의 거리를 나타내며, α는 첨점각의 반을 나타낸다. 또한, N_{cr}은 구하고자 하는 좌굴하중을 나타낸다.

3. 수치해석의 적용

해석해는 모든 경계가 단순지지이거나 마주 보는 경계가 단순지지인 경계조건을 갖고, 크로스-플라이의 적층형태를 갖는 경우에 한해서 이중조화함수나 퓨리에 급수를 이용하여 구할 수 있다. 그러나 경계조건이 복잡하거나 다양한 경우, 하중조건이 복잡하거나 여러 가지일 경우 및 재료의 배치가 임의의 보강방향을 가지는 비등방성일 경우 해석해를 구하기는 거의 불가능하다. 이와 같이 해석해를 구하기가 어렵거나 구할 수 없는 복잡한 구조물을 해석하기 위해서는 수치해석 기법을 적용해야 한다.

본 논문에서는 여러 가지 수치해석 기법 중 해석하고자 하는 구조물의 기본방정식에 직접 적용할 수 있는 유한차분법을 사용하였다. 유한차분법은 적층판이나 쉘의 기본방정식을 효과적으로 근사화시키는 수치해석기법으로서 수렴성과 결과치의 안정성을 제공하고 기본방정식을 수학적인 근사방법으로 간편하게 변환하여 정리할 수 있으므로 판이나 쉘과 같은 연립 편미분방정식을 기본방정식으로 갖는 구조체의 해석 시 편리한 수치해석 기법이다.[1~4]

식(3)에 합응력 식(1), (2)를 대입하여 정리하면 식(4)와 같이 지배방정식을 변위의 항으로 표시할 수 있다.

식(4)와 같이 변위 미분항으로 유도된 비등방성 원뿔형 쉘의 좌굴에 대한 기본방정식에 유한차분법을 적용하면 미분방정식이 연립방정식의 형태

$$\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}&L_{13}&L_{14}&L_{15}\\L_{21}&L_{22}&L_{23}&L_{24}&L_{25}\\L_{31}&L_{32}&L_{33}&L_{34}&L_{35}\\L_{41}&L_{42}&L_{43}&L_{44}&L_{45}\\L_{51}&L_{52}&L_{53}&L_{54}&L_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_\theta\\u_z\\\beta_x\\\beta_\theta\end{bmatrix}$$
$$=N_{cr}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&L_{g33}&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_\theta\\u_z\\\beta_x\\\beta_\theta\end{bmatrix} \qquad (4)$$

로 바뀌게 되므로 이 연립방정식을 컴퓨터 프로그램화하면 해석이 용이하게 된다.

따라서 본 연구에서는 변위의 항으로 표현된 기본 방정식에 유한차분법을 적용하여 비등방성 원뿔형 쉘의 좌굴거동 특성에 대하여 해석을 수행하였다. 쉘 구조의 내부점에서는 중앙차분법을 사용하였고, 자유경계에서는 가상점이 발생하므로 경계조건을 이용하여 가상점을 소거하여 쉘 구조의 내부점으로 치환하였다. 원뿔형 쉘의 임의의 j선상에서 모든 i점에 대하여 차분식으로 표현하면 식(5)와 같다.

$$[A\ ]\{X_{j-1}\}+[B\ ]\{X_j\}+[C\ ]\{X_{j+1}\}$$
$$=[A_g]\{X_{j-1}\}+[B_g]\{X_j\}+[C_g]\{X_{j+1}\} \qquad (5)$$

식(5)에서 계수 매트릭스는 $i-1, i, i+1$점에서 각각의 자유도에 대한 값을 나타낸다. 이렇게 임의의 한 점에 대한 차분방정식이 구성되면 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스와 기하학적 매트릭스를 중첩의 원리를 적용하여 식(6)과 같이 구성할 수 있다.

$$[K_S]\{X\}=\lambda[K_G]\{X\} \qquad (6)$$

여기서, $[K_S]$는 쉘 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스이고, $[K_G]$는 기하학적 매트릭스, λ는 쉘 구조물의 고유치인 좌굴하중을 나타내며, $\{X\}$는 고유벡터로 쉘 구조물의 좌굴형상을 나타낸다. 식(6)에서 고유치인 λ를 구하기 위해서는 식(7)과 같이 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$det\,|[K_S]-\lambda[K_G]|=0 \qquad (7)$$

유한차분법으로 구성되는 시스템 매트릭스와 기하학적 매트릭스는 비대칭 매트릭스 형태를 가지게 된다. 이런 비대칭 매트릭스의 고유치를 구하는 방법으로는 IMSL 중에서 본 목적에 맞는 방법을 택하여 사용하였다.

4. 해석 예 및 결과분석

4.1 해석모델

본 연구에서는 폐합된 원뿔형 쉘을 해석모델로 설정하였으며, 경계조건에 따라 두 가지 경우, 즉 모두 고정인 경우(Model A)와 반경이 큰 곳이 고정이고 반경이 작은 곳이 자유인 경우(Model B)로 설정

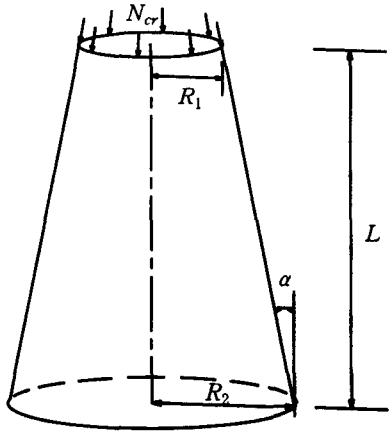

Fig. 4. Conical shell model

Table 1. GFRP(*GPa*) (Glass Fiber+Epoxy Matrix)

E_1	E_2	G_{23}	G_{13}	G_{12}	ν_{12}
36.905	10.065	2.0	2.9	2.9	0.33

하였으며, Fig. 4와 같다.

또한 수치해석에 사용된 재료의 물성치는 Table 1과 같다.

4.2. 수치해석 타당성 분석

범용구조해석 프로그램인 LUSAS와의 해석결과 비교와 해석모델의 수렴성을 분석하여 수치해석의 타당성을 입증하였으며, 수치해석 타당성 분석시 사용될 재료는 등방성 재료인 강재를 사용하여 비교·분석하였다.

Table 2에서 보인바와 같이 해석모델을 원통형 쉘로 채택한 이유는 LUSAS로 원뿔형 쉘을 모델하기가 난해하기 때문이다. 첨점각인 α를 0°로 수렴시키면 원통형 쉘이 되므로 원통형 쉘과 비교하였다. 표에서 보듯이 본 수치해석과 LUSAS는 분할수를

Table 2. Comparison of buckling loads for commerical package (LUSAS) (Model B)

Division Number	Buckling load (N)
11×11	0.3644699E+7
21×21	0.1871617E+7
29×29	0.1357030E+7
LUSAS result	0.134790E+7

※ The following geometric data of cylindrical shell is used : R_1=20cm, R_2=20cm, L=100cm, t=1cm α=0°

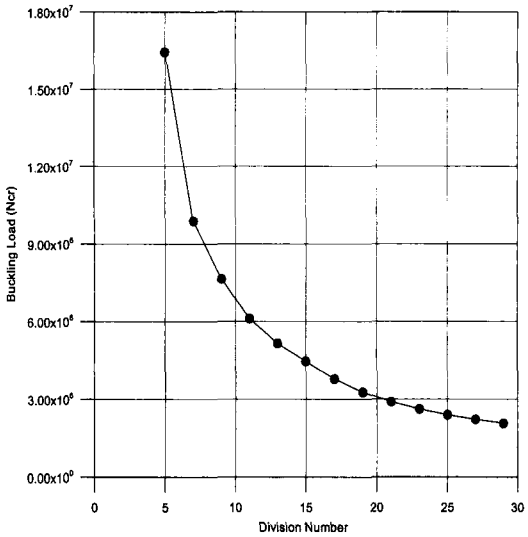

Fig. 5. Convergence as a result of increase in division number (Model B) ※ The following geometric data of conical shell is used : R_1=10cm, R_2=20cm, L=00cm, t=1cm

잘게 나눌수록 수렴해간다는 것을 알 수 있다. LUSAS의 분할 수는 25×25로 사용하였다.

Fig. 5는 원뿔형 쉘의 수렴도를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 29×29(2156563N)를 정해로 볼 경우 25×25(2307183N)에서 90% 이상(오차:(2156563-2307183)/2156563×100 = -6.98%)의 수렴성을 보이고 있다.

4.3. 화이버 보강각도 변화에 따른 결과 분석

Fig. 6은 원뿔형 쉘의 원뿔방향 길이(L)와 작은 반경(R_1)의 비인 형상비가 5.0, 7.5, 10.0이고, 화이버 보강각도를 0°(원뿔길이 방향)~90°(원주방향)까지 10°씩 증가시키면서 좌굴하중의 변화를 분석한 것이다. 여기서, R_1의 길이를 10cm로 고정시켰다. 좌굴하중은 형상비가 커지고 화이버가 원주방향으로 보강됨에 따라 커진다는 것을 알 수 있다. 이는 원뿔길이방향으로 작용하는 압축하중을 원주방향의 면내거동으로 저항하므로 원주방향의 강성이 증가하면 보다 큰 하중을 견딜 수 있다는 것을 의미한다.

Table 3은 앵글-플라이로 보강된 경우의 좌굴하중을 나타낸 것이다. 쉘의 기하학적 조건은 그림 5에 사용된 것과 같고, 물성치는 Table 1과 같이 두께가 0.25cm인 4개의 층이 임의의 각도로 배열된 경우이다. Case I(적층각이 동일한 경우)보다는 case III(anti-symmetric)가, case III보다는 case II(symmetric)가 좌

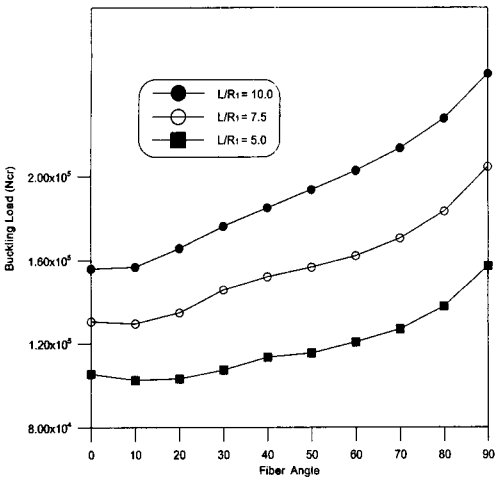

Fig. 6. Buckling loads versus aspect ratio, fibe angle(Model A)

Table 3. Buckling load for Model A

θ	$\theta/\theta/\theta/\theta$ Case I	$\theta/-\theta/-\theta/\theta$ Symmetric Case II	$\theta/-\theta/\theta/-\theta$ Anti-symmetric Case III
0°	0.15590E6	0.15590E6	0.15590E6
10°	0.15673E6	0.17082E6	0.15904E6
20°	0.16574E6	0.17430E6	0.17121E6
30°	0.17617E6	0.19360E6	0.18637E6
40°	0.18501E6	0.20892E6	0.20844E6
50°	0.19355E6	0.25372E6	0.23987E6
60°	0.20265E6	0.26294E6	0.26246E6
70°	0.21341E6	0.26793E6	0.26750E6
80°	0.22737E6	0.25653E6	0.25619E6
90°	0.24868E6	0.24865E6	0.24865E6

굴하중값이 크게 나타났다. 또한 case II, III에서는 보강각이 약 70°도 근처에서 좌굴하중값이 가장 크게 나타났다. 따라서 보강각도는 대칭 배열이 가장 유리하며, 원주방향 근처로 보강하는 것이 유리함을 알 수 있다.

4.4. 원뿔형 쉘의 좌굴거동 형상

좌굴거동은 여러 가지 요인, 즉 두께, 형상비, 보강각도, 재료특성치, 기하학적 조건 및 경계조건에 의해서 영향을 받는다. 이처럼 좌굴거동을 예측하기란 상당히 난해하다. 더구나 비등방성 쉘구조물의 좌굴거동은 더더욱 난해하다. 이러한 좌굴거동 형상을 수치해석의 기법을 통하여 고찰하였다.

좌굴형상은 원뿔길이 L=50cm이고, Model A의 첫 번째 모드에 대해서 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 화이버의 보강각도에 따라서 좌굴형상이 복잡한 거동을 나타낸다.

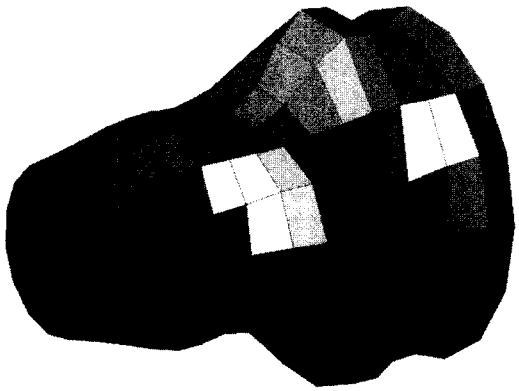

Fig. 7. Buckling mode for 0/0/0/0

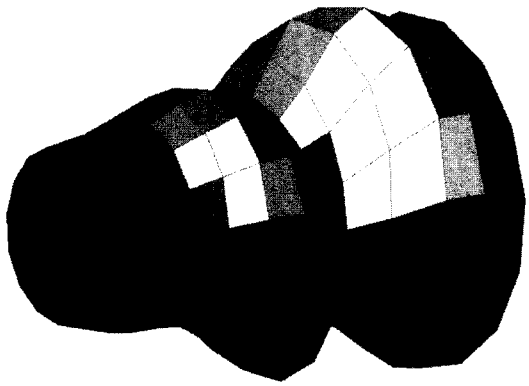

Fig. 8. Buckling mode for 30/30/30/30

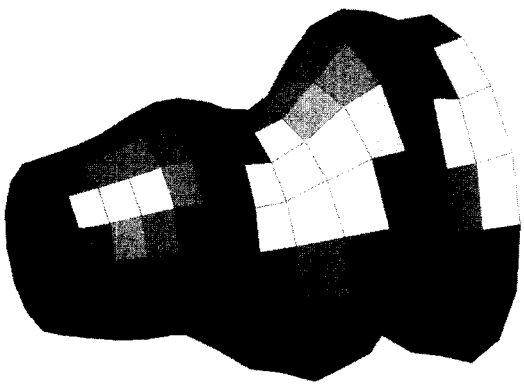

Fig. 9. Buckling mode for 45/45/45/45

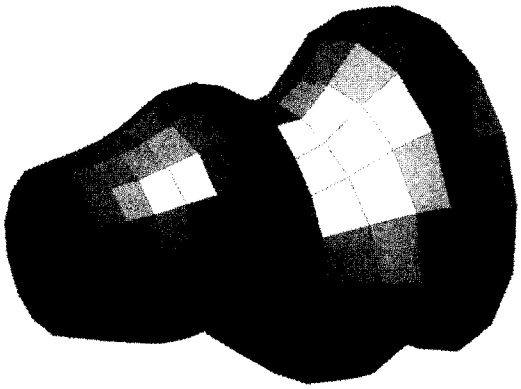

Fig. 10. Buckling mode for 60/60/60/60

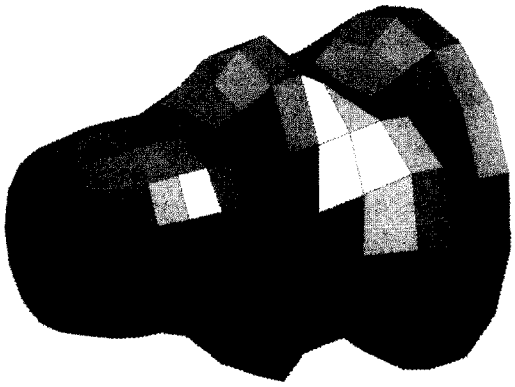

Fig. 11. Buckling mode for 90/90/90/90

5. 결 론

본 연구에서는 비등방성 원뿔형 쉘의 안정성 문제를 수치해석 기법인 유한차분법을 사용하여 해석하였다. 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻을 수 있었다.

1) 원뿔형 쉘의 안정성 문제는 여러 가지 요인, 즉 두께, 형상비, 보강각도, 재료특성치, 기하학적 조건 및 경계조건에 의해서 영향을 받는다.

2) 원뿔방향보다는 원주방향으로 보강된 경우가 보다 안정적인 거동을 한다. 이는 쉘구조는 기하 특성상 좌굴하중을 원주방향의 면내거동으로 저항한다는 것을 의미한다.

3) 재료의 배열형태는 대칭구조가 가장 안정적으로 판명되었으며, 좌굴하중값은 70°도 근처에서 가장 크게 나타났다.

참고문헌

1) 손병직, 백한솔, 장석윤, "자유경계를 갖는 비등방성 원뿔형 쉘의 해석," 한국강구조학회 V. 12 No. 4, pp. 417~428, 2000.
2) 박근우, 임성순, 장석윤, "비등방성 원통형 쉘의 안정성에 관한 연구," 한국강구조학회, Vol. 12 No. 2, pp. 187~196, 2000.
3) H. S. Paik, W. H. Lee and S. Y. Chang, "Buckling of Skewed Stiffened Plates," Korea-Japan Joint Seminar on Steel Bridge, pp. 521~530, 1999.
4) S. Y. Choi, H. S. Ji and S. Y. Chang, "Analysis of Sandwich Plates with Composite Facings," PSSC, pp. 97~102, 1998.
5) N. Partatmono and M. K. Chryssanthopoulos, "Asymmetric Elastic Buckling of Axially compressed Conical Shells with Various End Conditions," AIAA, Vol. 33, No. 11, pp. 2218~22127.
6) Liyong Tong, "Buckling of Filament Wound Composite Conical Shells under Axial Compression," AIAA-98-1769, pp. 585~594.
7) J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates," CRC press, 1997.
8) Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials," McGraw-Hill, 1975.
9) Werner Soedel, "Vibrations of Shells and Plates," Marcel Dekker, Inc., 1981.
10) Dirk J. Struik, "Lectures on CLASSICAL DIFFERENTIAL GEOMETRY," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950.
11) Stephen P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells," McGraw-Hill, 2nd Ed., 1959.
12) Stephen P. Timoshenko & J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability," McGraw-Hill, 1961, 2nd Ed.
13) Wilhelm Flugge, "Stresses in Shells," Springer-Verlag Berlin, 2nd Ed., 1973,
14) J. N. Reddy and A. Miravete, "Practical Analysis of Composite Laminates," CRC press, 1995.